E
39
306.82
56596
Smith
82

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

SMITHSONIAN INSTITUTION
FEB 9 1927
276087
NATIONAL MUSEUM

DIRECTOR : INGENIERO JULIO R. CASTIÑEIRA

ENERO-JUNIO 1923. — ENTREGAS I-VI. TOMO XCV

ÍNDICE

JAIME MULHALL, Densificación infinitesimal. Harmonización tensorial. Filosofía y digresiones matemáticas 5
NECROLOGÍA : Ingeniero Santiago Brian, fallecido el 24 de abril de 1923, por S. E. Barabino 279
Índice general de las materias contenidas en el tomo nonagésimoquinto 291

BUENOS AIRES
IMPRENTA Y CASA EDITORA «CONI»
684, PERÚ, 684

1923

JUNTA DIRECTIVA

(1922-1923)

Presidente	Ingeniero **Santiago E. Barabino.**
Vicepresidente 1º	Doctor **Nicolás Lozano.**
Vicepresidente 2º	Doctor **Raimundo Wilmart.**
Secretario de actas	Doctor **Rogelio A. Trelles.**
Secretario de correspondencia	Doctor **Reinaldo Vanossi.**
Tesorero	Ingeniero **Edmundo Parodi.**
Protesorero	Ingeniero **Juan Blaquier.**
Bibliotecario	Ingeniero **Juan José Carabelli.**
Vocales	Ingeniero **Antonio Paitoví.** Ingeniero **Manuel J. Arce.** Doctor **Salvador Debenedetti.** Ingeniero **Julio R. Castiñeiras.** Ingeniero **Ferruccio A. Soldano.** Doctor **Atilio A. Bado.** Profesor **Juan Nielsen.** Ingeniero **Evaristo V. Moreno.**
Gerente	Señor **Juan Botto.**

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los *Anales (personalmente responsables de la tesis que sustentan en sus escritos)* que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos deben solicitarlo por escrito. Por mayor número de ejemplares deberán entenderse con la Casa editora « Coni ». Tienen, además, derecho a la corrección de dos pruebas. Los manuscritos, correspondencia, etc., se enviarán a la Dirección, **Cevallos, 269.** — La Dirección.

PUNTOS Y PRECIOS DE LA SUBSCRIPCIÓN ADELANTADA

Local de la Sociedad, Cevallos 269 (abierto de 8 a 10 y de 15 a 23), y principales librerías

	$ m/n		$ m/n
Por mes	**1.00**	Número atrasado	**2.00**
Por año	**12.00**	Número atrasado para los socios	**1.00**

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA

ARGENTINA

DIRECTOR : INGENIERO JULIO R. CASTIÑEIRAS

TOMO XCV

Primer semestre de 1923

BUENOS AIRES
IMPRENTA Y CASA EDITORA «CONI»
684, PERÚ, 684

1923

DENSIFICACIÓN INFINITESIMAL

MATERIA, EVOLUCIÓN, CUERPO HUMANO
HARMONIZACIÓN TENSORIAL. LA OBRA DE H. WEYL

POR JAIME MULHALL

En nuestro *continuum* mayor o Universo rige una invariante : la *repetición*.

AB INITIO

Una obra de índole geométrica-física no es exactamente la que se presta para hacer gala de lenguaje, o elegancia de dicción; al contrario, en esta clase de « literatura » es más bien la monotonía y tautología que descuellan. En especial, la que acá se presenta carece de todo adorno verbal y las muy numerosas reiteraciones en un esquema fonético invariante han de causar verdadero fastidio a muchos lectores. Se ruega, particularmente a éstos, la concentración sobre el sentido y no la figura de la frase, ofreciéndoles como disculpa la clásica de Boltzmann, repetida por muchos, inclusive el mismo A. Einstein: « no se ocuparon los servicios del sastre ni del zapatero en la localidad » !

Aquel que cultiva « la reflexión » como un hábito intelectual, experimentará, sin duda, grandes placeres al tomar contacto con la naturaleza y divisar algunos de los secretos de su obra fenomenal, aunque sólo sea por el medio filosófico-geométrico, que no exige un conocimiento profundo de las matemáticas. Desgraciadamente, es muy necesaria la preparación matemática para el estudio de la filosofía natural, de manera que aquellos lectores poco familiarizados con

los conceptos geométricos, etc., tendrán, *a fortiori,* que hacer esfuerzos intelectuales superiores a los usuales en el curso ordinario de sus estudios y esto puede ser motivo de « desfallecimiento en el camino » y pérdida de interés. En cambio, aquel que domina las matemáticas en general y el cálculo tensorial en particular, experimentará sensaciones de asombro y de inmenso placer. Este inmenso placer estribará en la convicción, inmediata y completa, que ha estudiado « para algo », y que la vida brinda nuevos alicientes de orden intelectual, desconocidos anteriormente. Sentirá renacer fuerzas e interés y se afirmará en su nueva decisión de seguir estudiando, seguir observando y así: seguir adelante. ¡ Ojalá !

No se ha escatimado esfuerzo alguno que pudiera redundar en la mejor comprension de las ideas, métodos y cálculos, etc., aquí consignados. Una sola mira ha existido, única, *invariante absoluta : exhibir la verdad, libre de fases !*

Para que el trabajo resultase completo, se ha compendiado en forma especialmente clara la geometría infinitesimal de H. Weyl, esto es: el cálculo tensorial infinitesimal, y se ha añadido un resumen de la teoría de determinantes, indispensable para abordar ese cálculo. Un lector, con preparación matemática adecuada, que comprenda Analítica, Cálculo infinitesimal y Mecánica racional, descubrirá fácil el camino después de vencer ciertas «modalidades mentales», inculcadas en el aula. Para quien desea profundizar el Método tensorial hay que recomendar una obra — magistral : — la titulada *Espacio, Tiempo y Materia* del profesor H. Weyl, de Zurich; esta obra es al mismo tiempo el «completo Einstein», pues contiene la Teoría general del relativismo.

Vivimos ahogándonos en un *maremagnum* de fases, un verdadero infinito fásico.

IDEAS FUNDAMENTALES

La construcción del edificio perceptible del Universo está regida por una ley abstracta, *única, simple e invariante,* a saber : la *Repetición,* cuyo símbolo es el *Número !*

La Repetición *excluye la posibilidad de la Coincidencia,* y, por lo tanto, obliga, *dura lex,* la *Propagación !*

Un astro nace por efecto de *una focalización* de la *Repetición* en *un punto* de nuestro *continuum* mayor, y como una resultante, integral, de *un apilamiento !*

Focalizadas, varias *Propagaciones,* en un punto del *continuum* mayor, sobreviene « el apilamiento » : la *génesis del astro !*

El *procedimiento natural* es : *infinitesimal.*

Resultado : Composiciones recíprocas y la *Densificación infinitesimal !*

Ser humano. — El cerebro humano es un *continuum menor !*

La *Repetición penetra* a este *continuum* por conductos determinados que sólo difieren *fásicamente. Aferencia.*

Resultado : *Focalizaciones* en el cerebro ! — Esto es : *Apilamientos infinitesimales y eferencia.*

De aquí : *Densificación progresiva.*

Fin : *¡ El cuerpo humano !*

Prueba. — La figura de nuestro cuerpo humano responde con exactitud matemática *a nuestras constantes planetarias,* y se funda sobre la invariante universal : la *Repetición.* La simetría lateral, por inversión meridiana, por ejemplo, es *una repetición* que corresponde a la *harmonización diurna* de la acción estática solar, etc., etc. La simetría radial a una propagación difundida « térmica », etc.

A título de simples curiosidades se consignan las siguientes consecuencias lógicas que emanan de las « matemáticas » :

Medicinales. — Tratamiento posible de enfermedades por medio de la obscuridad absoluta ;

Fortificación del sistema general por medio de períodos de descanso en la obscuridad, silencio y temperatura constante;

Y una porción, indefinida, de otros que se podrán deducir directamente, por simple lógica o por intuición.

Pringles, Río Negro, octubre de 1922.

DIGRESIÓN 0

Generalidades

« *Utile dulce.* »

Al abordar este estudio se han tenido varios fines en vista, entre éstos, el principal, ha sido el de allanar el camino para quien desee dedicarse a la observación de la naturaleza, que se presenta bajo la forma de materia y penetrar los secretos que gobiernan a su fenome-

nalidad. Alberto Einstein ha abierto los ojos de la humanidad. No tenemos más que « mirar » y avanzar por el camino indicado, que él nos ha señalado. Gracias al relativismo generalizado, este magno problema de la materia, su constitución y su evolución, se asoma planteado geométricamente. Es posible que algún lector se atreva *a dominar la parte matemática necesaria* y una vez posesionado del método avance solo. ¡ Ojalá !

Para poder consolidar las cosas en el punto en que Einstein y Weyl *las han dejado* se ha tenido que vencer una dificultad *grande,* a saber : *librarse de « fases »*. Es extraordinario cómo vivimos envueltos por « las apariencias » y cómo nos dejamos engañar por las mismas. Resulta que, en el caso que tratamos, *el engaño existió oculto en la misma base del edificio geométrico levantado con el nombre de cálculo tensorial infinitesimal;* allí estaba : *en los cimientos.*

Descubierto el enemigo se ha procedido a eliminarlo mediante *una reconstrucción* y a este proceso se ha designado : « Harmonización del cálculo tensorial. » La reconstrucción coloca a este método geométrico, magistral, sobre una nueva plataforma sólida *invariante* y de perfecto e *íntimo acuerdo con la naturaleza.*

Las digresiones filosóficas tienen por objeto « variar », y así disminuir toda posible « aridez », muy natural acompañante de cualquier estudio matemático. Por otra parte, el método matemático no es « extraordinariamente difícil », es « nuevo » y exige un cambio de « hábito mental » nada más. Se pierde poco tiempo *en fases,* como sería, por ejemplo, un detalle de las propiedades geométricas de las cónicas, o las posibles consecuencias de variar el número de constantantes en una ecuación general, etc. Sólo se buscan « invariantes » — esas leyes *inmutables* que dirigen toda la fenomenalidad. Para comprender este punto de vista hay que considerar un ejemplo práctico, sea : *un punto,* que se mueve en un espacio continuo cualquiera. Podemos muy naturalmente dirigir el movimiento del punto por medio de un parámetro, *ad hoc,* como quien dijera : desde afuera. Efectivamente, y por medio del *cambio de valor de las coordenadas del punto* conoceremos su trayectoria en el espacio continuo. Pero también podemos proceder de otra manera. Podemos *provocar* ese cambio de valores de las coordenadas del punto mediante *transformaciones continuas de coordenadas* y hacer conformar estas *transformaciones* a ese *movimiento descrito.* La situación ahora es la siguiente : un observador posado en el punto no se moverá, *pero existirá como en un maelström,* pues será el espacio el que *se deformará continuamente produ-*

ciendo el efecto de movimiento. El observador existe en un sistema « geodésico ». Una analogía : lo que sucedería a uno, en *un ascensor* que se desploma, sin fricción, desde una inmensa altura, hacia el suelo, por haberse cortado « la cuerda » — para aquél *no habría gravitación,* estaría en *un espacio libre* dentro del ascensor. Aquí, pues, *está evidenciado el segundo punto de vista, que es el que se adopta siempre.* Divisamos *el estado estacionario,* y el magistral concepto de Hamilton. Matemáticamente el ascensor es un sistema geodésico estacionario.

Pasemos ahora a hacer algunas consideraciones de carácter general, que son pertinentes, aunque muy superficiales.

Corriente es el refrán : *la historia se repite.* ¡ Y qué monumental verdad encierra ! Una verdad geométrica y física a la vez : *la periòdicidad.* Esta verdad enhebra todos los fenómenos de *la naturaleza* perceptibles para nosotros ; esto es : *de nuestro mundo perceptible.* Cuando Newton indicó la forma de estudiar matemáticamente el comportamiento de los « sistemas materiales » se produjo un momento de asombro, se creyó que la naturaleza había entregado la llave. Rápida fué la desilusión y la comprensión de la nueva situación creada — se veía más lejos y, por lo tanto, se veían nuevas y más formidables cuestiones a resolver. Pero se había conquistado una altura, y *se veía más lejos.* Hoy pasa otro tanto.

Einstein nos ha conducido de la mano hasta una altura formidable, colosal. El panorama es tan grandioso que aun no hemos recobrado la calma necesaria para poder analizar friamente lo que se ve. Estamos aún gritando uno al otro : *¡ mira esto ! ¡ mira aquello !*

Todos los fenómenos de nuestro mundo perceptible son *variaciones de valores en el campo métrico de un continuum a cuatro dimensiones.* Intuitivamente está resuelto el problema mundial — pero solamente *intuitivamente,* — falta formular esta intuición. Gauss decía a sus amigos que, *intuitivamente,* tenía resueltos muchos problemas, no obstante tropezaba con las mayores dificultades para poder dar expresión concisa a esos triunfos mentales. No cabe duda que muchísimos quedaron en su cerebro sin ver la luz. Pero hay que decirlo siempre, sin cansar en repetirlo : Gauss nos dió sus *Disquisitiones circa superficies curvas* y con esto basta. De ahí salió Riemann !!! y hoy tenemos a Einstein !!!

Riemann creó al *continuum ie ;* el espacio continuo puntual de n dimensiones, y se apercibió que las matemáticas abstractas no fijaban el valor dimensional n de la multiplicidad puntual : se halló

frente a frente con una multiplicidad continua. Einstein nos ha revelado que una acción limita al número n : la gravitación. Quedamos asombrados.

Ahora, en vista del relativismo, es posible arrancar desde este punto einsteiniano y concentrar la atención sobre la historia de la gravitación percibida por la conciencia humana bajo la forma de *una realidad absoluta* en la densificación infinitesimal. Siendo imposible percibir « el presente » no hay para qué mencionar el futuro.

En breves palabras: todos sabemos que en un espacio libre newtoniano no se puede distinguir un sistema cartesiano de referencia de otro sistema cartesiano igual. Ahora bien, si se figura un plano, por ejemplo, de puntos, dotado de continuidad puntual, se descubrirá que en ese plano será imposible distinguir una asociación de puntos del resto de la puntuada plana. La razón está a la vista y consiste en «la igualdad» que prevalece e impide diferenciaciones. Por el momento se puede dejar el problema de « la continuidad puntual» en el plano cuya explicación matemática se reserva para más adelante.

Resulta, en consecuencia, que si nosotros pudiéramos *alterar tan sólo la posición de un punto relativamente al vecino* ya habríamos introducido en el plano una *diferenciación dimensional* que sería suficiente para que *distinguiésemos ese par de puntos entre los infinitos restantes del plano.* Así habríamos logrado diferenciar *una dimensión* en *un continuum a dos dimensiones.* Fácil es generalizar esto y aplicar el principio al *continuum n dimensional.* Einstein dice que *ésta es la acción de gravitación* y aquí se dirá que es más: es *una densificación,* o historia de una acción de gravitación, ya que no podemos percibir el exacto presente. Einstein derribó la noción de velocidad infinita en la forma conocida y ahora hay que tener en cuenta la transmisión de percepciones y el ajuste que involucran.

Resulta, pues, que la *realidad de un fenómeno* estriba en el simple hecho de *dejar una historia densificada perceptible.* Si *no deja historia densificada, perceptible,* será para nosotros « una *verdad relativa* », como cuando vemos *moverse un cuerpo en el continuum espacial mayor.* Pero, *si deja historia en forma de traza densificada, todos la percibiremos y todos la percibiremos de la misma manera,* — no habrán discusiones, y esto lo llamaremos *realidad absoluta.* El celebre doctor S. Johnson (biografía Boswell) golpeaba una piedra con el pie — ya no tenía dudas acerca de la realidad de su existencia, i. e., *una historia densificada.*

La densificación, pues, es una *dimensionalización en el continuum* y

¡ mirabile dictu ! es *para nosotros la historia perceptible de una acción realizada.*

Pero fácil es comprender que *la esencia* de una *densificación* estriba en *un movimiento puntual;* diremos, en consecuencia, que *la acción* que obra sobre los puntos de un continuum *introduce un parámetro temporal determinado* en el mismo, *dentro del cual no existía antes.* Este parámetro temporal *es parte de la acción en evolución.* — A diferentes «acciones» corresponden *diferentes tiempos, diferentes densificaciones,* y todas éstas están sujetas al principio newtoniano del *Lex II,* Principia, etc.

Teniendo presente esto, se verá *inmediatamente* lo que se quiere decir cuando se establece que: *una densificación periódica es una reproducción de especie* y es *una historia que se repite !!!* A esto se quería llegar *acá* para dejar constancia de la gran profundidad de la verdad que encierra el refrán con el cual se iniciaron estas líneas.

Nuestra existencia, desde este punto de vista, aparece como una historia que se desarrolla guiada por un parámetro temporal complejo, en un *continuum* mayor : universo.

La conciencia humana es un *continuum* menor — muy de acuerdo con una observación extraordinariamente acertada del astrónomo A. S. Eddington, — dentro del cual penetran las acciones exteriores por un proceso de «repetición», y allí *densifican infinitesimalmente* sus historias. Estas densificaciones corresponden a las acciones repetidas que las producen en una forma parcial, como se ha de ver oportunamente. El proceso es muy simple: cuando la acción es efímera, la densificación también lo es, como es evidente cuando se tiene presente el carácter infinitesimal de la misma. Veo un libro y en mi conciencia se densifica una réplica parcial; desaparece el libro y con éste la impresión o acción, quedando una «densificación fluida» como efecto remanente. La prueba de la densificación producida reside en «la memoria» como fenómeno inmediato. A esta categoría pertenecen las *densificaciones fonéticas* producidas por el idioma, aunque éstas, siendo más repetidas y continuadas en su acción, dejan rasgos físicos integrales y perceptibles como «realidades absolutas». Cualquiera puede por inducción deducir consecuencias.

Nuestra Tierra provee al *continuum* de nuestra conciencia los *puntos densificables* por un método de «harmonización descendente» especial denominado nutrición y *las acciones exteriores* que penetran a nuestro cerebro son *las responsables* de las densificaciones subsiguientes. Esta operación admirable se logra en virtud del *principio funda-*

mental básico de ser toda densificación el resultado de un processus infinitesimal. Quiere decir, que la edificación de nuestro cuerpo es una *verdadera integración,* y que *progresa infinitesimalmente.* Así es que se explica *cómo nuestro cerebro dirigiendo, bajo la tutela del mundo exterior,* consume la obra, a saber: *el cuerpo humano.*

Esta tremenda realidad nos rodea en forma infinita de todos lados.

Por último, nuestra propia *simetría lateral* y la disposición de los órganos que sirven de conductos a las acciones que penetran a nuestro *continuum cerebral* demuestrau palpablemente la verdad de la *dimensionalización* que venimos explicando. Esto es: *la rotación axial* de *nuestro planeta* en el *campo estático solar, a simetría radial esférica, convierte a la acción solar en una acción diurna harmónica.* Sí, pues, la acción solar produce *densificación,* o sea: *densifica su historia, en nuestro continuum cerebral* nos figuraríamos que *la historia densificada de una acción representada por Oriente-Mediodía sería igual y simétrica, por inversión, a una acción representada por Mediodía-Poniente.* Y esto corresponde a la realidad de los hechos !!!

Esperaríamos encontrar *los conductos históricos* por intermedio de los cuales *penetran las* acciones a nuestro *continuum cerebral,* densificados *adecuadamente* según la procedencia *de estas acciones.* Así es que no nos sorprende observar que aquellos órganos que admiten acciones *exteriores a nuestro planeta* ocupen posiciones *simétricas laterales, por inversión, respecto a un plano meridiano que corresponde al mediodía de la acción exterior. Mucho nos sorprendería* hallar una simetría *Zenit-Nadir !!!*

Comprendemos así el efecto de *nuestras constantes planetarias* y *su importancia,* y muchísimos otros detalles. Repetimos pues: no se esperaría hallar simetría en la dirección de Zenit-Nadir, excepto por efecto de acciones difusas, etc.

Una semilla constituye un *continuum* especial densificado, del cual aparentemente ha desaparecido una acción. En realidad es «una focalización» aislada en virtud de *una discontinuidad* de acción, como se verá en otro lugar. Aquí se dirá que es *una historia completada de una acción grupal harmónica que ha cerrado su ciclo de cero a cero,* con un paso por el infinito (1).

Hoy día, cuando contemplamos un árbol decimos: una figura de equi-

(1) Más adelante apareecrá el significado de ésto. El Sol pasando por el meridiano mediodía cambia de signo pasando por cero y pasando por media noche cambia de signo pasando por infinito. Esto se repite orbitalmente en perihelio y afelio, etc.

librio. Pero hay algo más que la frase pintoresca de «relación estacionaria entre campo y materia». El árbol es «una propagación» dirigida por acciones exteriores que a su vez son «propagaciones». Es *un grupo de repeticiones,* de gran complexidad, dotado de «continuidad», *que se repite* en una forma especial *regida en absoluto* por *constantes planetarias terrestres.* Se debe, pues, ver en un árbol algo más que la figura matemática abstracta de equilibrio, lo mismo que en el cuerpo humano y sus caracteres físicos perceptibles. Se ha de conocer oportunamente que un estudio de los movimientos de un árbol en el sentido de la observación de *irregularidades* en sus *repeticiones,* aparte de *las regularidades* en las mismas, puede revelar leyes astronómicas, meteorológicas, etc., etc. Puede decirse que la existencia arbórea es dirigida por un parámetro de aspecto compuesto, que contiene una serie de términos harmónicos, agrupados linealmente, y que cada término registra una historia de densificaciones repetidas. A cada término de la serie corresponde una acción exterior. Todo es muy visible en las fases que recorre un árbol anualmente y que repite. Se volverá sobre el punto para buscar leyes invariantes fundamentales y universales del *processus.*

Busquemos ahora algunas dificultades. No hay que ir muy lejos, pues *las fases* se multiplican *ad infinitum* a cada paso. Tomemos otro ejemplo de «intuición». Estamos palpando que *el color* de una materia proclama *el orden de la densificación.* Es un plano detallado de la materia visto, por iluminación en el campo solar, a *una desesperante distancia* — como cuando vemos un monte de árboles desde lejos, comprendemos por *lo verde* que *son árboles,* pero no podemos distinguir *los árboles* — sabemos lo que es y nos formamos *imagen detallada del monte por el color,* porque hemos podido verlo de cerca anteriormente, porque hemos andado en el monte. Esto es lo que sucede con la materia y *su color.*

Cualquier alteración en la densificación se revela en un *cambio de color* y donde esto está admirablemente evidenciado es en el curso del desarrollo del arbol que ya citamos. Cuanto más homogéneo un monte más uniforme será su color. Pero nunca hay que perder de vista que el color es un fenómeno indirecto y «fásico» que depende de *la iluminación.* Esta observación nos hace detener el paso y reflexionar; y. como ejemplo de la complicación que introduce aquí el relativismo, y la verdad que nos hace descubrir, añadiremos lo siguiente: supongamos dos sistemas en un espacio plano Euclideano afín, i. e., un espacio libre Newtoniano, uno R_e y otro R_p, los cuales se mueven

uniformemente, uno relativamente al otro con velocidad constante v. Para mayor sencillez imaginaremos que nosotros nos hallamos en R_p, y que, por lo tanto, estamos en reposo; decimos que R_e se mueve y diremos que v es la velocidad *normal* a la dirección en que vemos a R_e. Si m es una masa en R_e y μ_0, V_0 su densidad y volumen, respectivamente, en R_e, en reposo, tendremos por relativismo el siguiente fenómeno :

En R_e

$$m = \mu_0 V_0,$$

y en R_p

$$m = \mu V,$$

por *invariación* de m

$$m = \mu_0 V_0 = \mu V,$$

pero sabemos que

$$\begin{cases} \mu_0 = \mu\sqrt{1 - v^2} \\ V = V_0\sqrt{1 - v^2} \end{cases} \qquad c = 1 = \text{vel. luz}$$

por donde deducimos una alteración de la densidad por efecto del movimiento, concomitante con una alteración del volumen. Si buscamos ahora de harmonizar resultados con «conceptos intuitivos» interpretando la geometría, físicamente, tendríamos que admitir que «si el color es característica de densidad o de una densificación» abarcamos o englobamos *un grupo de fases debidas puramente al movimiento o relativismo.*

Mutatis mutandis, y aquí descubrimos una verdad : *sobrada razón tiene* aquel que asevera (por intuición) que *el color encierra una característica de movimiento atómico,* y esto nos hace recordar los clásicos experimentos de Maxwell y de Newton. Tenemos que hacer la salvedad que se ha empleado la palabra *átomo,* porque es muy familiar y conocida, pero que *en realidad deberíamos decir movimiento puntual.*

El lector que discurre sobre estos resultados, tan superficialmente tocados arriba, difícilmente podrá rehuir un fenómeno mental que hace presentir la proximidad de una *colosal solución* del problema material. Estamos al borde mismo — intuitivamente está resuelto, pero ... hay que formular esa intuición. Hay que formular esa misteriosa *conexión métrica* y la «determinación métrica» sin ambigüedades. Esos *coeficientes asombrosos* de Einstein : los g_{ik} de

$$ds^2 = \sum_{ik}^{a} g_{ik} dx_i dx_k.$$

Después aparecerá el verdadero significado de estos coeficientes $g_{ik} = g_{ki}$, se verá que se trata de *dos propagaciones paralelas,* cuya consonancia tensorial toma la forma de una proyección escalar. Esta expresión es para nosotros la que encierra el misterio de la «densificación *ie*» la forma generalizada de distancia entre dos puntos, corregida «por sentido» (1). (Ver *Digresión sobre espacio métrico Pitagoreo).*

A Hermann Weyl corresponde el honor de haber sistematizado los conocimientos matemáticos que, partiendo de un pequeñísimo número de axiomas, rematan en la teoría de gravitación de Einstein. La obra de este autor titulada *Tiempo, Espacio, Materia,* es, podríamos decir, el *Einstein completo. Correspondería ser adoptada como texto en facultades de ciencia.*

Ricci y Levi-Civita son autores oficiales del cálculo tensorial y el último nombrado es creador del concepto magno : del *desplazamiento paralelo infinitesimal,* que ha tenido la virtud de solidificar la base de la obra de Riemann, modificada por Weyl y titulada *Geometría infinitesimal.*

Lie Engel continuó la obra del malogrado Galois, y gracias a su teoría de grupos continuos se ha podido *explorar al continuum* de Riemann (e Einstein hoy).

Minkowsky dividió el universo en «espacio y tiempo», es el padre de la geometría relativista, podríamos decir; pero *nunca tenemos que olvidar* a J. J. Sylvester, autor del *teoremita de los índices de inercia de las formas cuádricas!!!*

Boole, en 1841, descubrió las «invariantes» y Cayley con Sylvester desarrollaron su teoría. Contemporáneamente Gauss distinguía entre «medidas internas» y «medidas externas» sobre superficies y preparaba su *obra* sobre *curvatura!!!*

Siguió a Gauss el talento de Riemann cuya obra fué comprendida por un solo hombre anterior a A. Einstein, ése fué W. K. Clifford, en 1875.

Clifford *sólo comprendió* a Riemann — nada más. Falleció a los 34 años de edad.

(1) Lo que se ha dicho acerca de «color» ofrece un excelente ejemplo de «engaños fásicos», pues se ha de ver que color es la resultante de un «apilamiento» sobre el exterior de un *continuum* arbitrario de coeficiente cohesivo determinado — una parte componente de una composición que se propaga por «eferencia», mientras que *la otra componente recíproca,* penetra la materia y se propaga como *luz térmica.*

Einstein partió desde el punto alcanzado por Riemann (1) y... siguió adelante!!!

Repetimos que el lector general, que no domine las matemáticas, después de hojear las digresiones sobre repetición como base de la propagación, puede pasar al capítulo XIII y digresiones finales. Es posible que decida volver sobre sus pasos y decisiones y transite por la «dura calle» de Euclides.

CAPÍTULO PRIMERO

Determinantes

Invariantes. — Covariantes. — Contravariantes. — Concomitantes

Recordaremos, como de utilidad para el fin que perseguimos, los siguientes resultados conocidos, obtenidos por medio de las determinantes.

Multiplicación de determinantes. — Este teorema fundamental es, sin duda, el más importante de todos. Lo enunciaremos así : dada la determinante de un sistema de ecuaciones homogéneas lineales, si transformamos linealmente las variables, la determinante del sistema transformado es igual *a la determinante original multiplicada por la determinante de la transformación,* o *módulo de transformación.* Este módulo que es, claro está, una constante, puede en muchos casos ser tomado convencionalmente igual a la unidad. Recordemos fácilmente la demostración de este teorema como sigue :

$$\begin{array}{c}
a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \ \ldots \ + a_n^1 x_n = 0 \\
a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \ \ldots \ + a_n^2 x_n = 0 \\
\cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \\
\cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \\
\cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \\
a_1^n x_1 + a_2^n x_2 + \ \ldots \ + a_n^n x_n = 0
\end{array}$$

(1) Obras matemáticas sobre relativismo y cálculo tensorial : Herman Weyl; doctor August Kopff, profesor de la universidad de Heidelberg; A. S. Eddington, astrónomo; Alberto Einstein, varias obras; Levi-Civita; etc.

son n ecuaciones lineales de n variables que contienen n^2 coeficientes, que son los elementos de la determinante. Escribamos abreviadamente :

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_k^i x_k = 0$$

$$\Delta = |a_k^i| = \begin{vmatrix} a_1^1, a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & \dots & a_n^2 \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Pongamos :

$$x_1 = e_1^1 X_1 + e_2^1 X_2 + \dots + e_n' X_n$$

o abreviadamente :

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} e_k^i X_k \qquad i = 1, 2, \dots n$$

y sea

$$\Delta^1 = |e_k^i| \qquad \text{el módulo.}$$

La determinante del sistema transformado, es pues,

$$\Delta_T = |a_k^i| \,.\, |e_k^i| = \Delta \,.\, \Delta^1.$$

Si recordamos de la analítica la condición que deben llenar las coordenadas de cuatro puntos para que representen un plano, justamente :

$$\Delta = 0,$$

y generalizamos esta interpretación debidamente podemos decir que cuando

$$\Delta \neq 0$$

la determinante mide *la divergencia de la condición plana*; en tres dimensiones, esto significa *una magnitud de volumen.* Podemos admitir una magnitud volumétrica de n dimensiones y así dar carácter general al resultado. Hemos de hallar especial conveniencia en interpretar este resultado de esta manera. Sigue, pues, que la transformación lineal representa un cambio de unidades.

Una *invariante* es una función de los coeficientes de una ecuación homogenea que posee la propiedad recién señalada para producto de determinantes, a saber : una función de los coeficientes tal que cuan-

do se transforman linealmente las variables, *la nueva función es igual a la antigua multiplicada por una constante,* i. e., *el módulo de transformación.* Por ejemplo, la discriminante de la bilineal cuadrática

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2$$

una transformación de (x, y) da :

$$AC - B^2 = M\,(ac - b^2)$$

y

$$M = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 \qquad \text{si} \qquad x = \alpha_1 X + \beta_1 Y, \text{ etc.}$$

En realidad la *invariante* es un caso particular de la *covariante.*

Diremos que las coordenadas de un punto son *cogredientes* con las coordenadas de otro punto si ambas se transforman por *el mismo* sistema de ecuaciones lineales de transformación. Serán *contragredientes* si se transforman por *lineales recíprocas.* El significado de *reciprocidad* aparece inmediatamente como sigue, si :

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1{}^1 X_1 + a_2{}^1 X_2 + \ldots + a_n{}^1 X_n \\ x_2 &= a_1{}^2 X_1 + a_2{}^2 X_2 + \ldots + a_n{}^2 X_n \\ &\vdots \\ x_n &= a_1{}^n X_1 + a_2{}^n X_2 + \ldots + a_n{}^n X_n \end{aligned}$$

son las ecuaciones de transformación y resolviéndolos, tendremos :

$$\begin{aligned} \Delta X_1 &= A_1{}^1 x_1 + A_1{}^2 x_2 + \ldots + A_1{}^n x_n \\ \Delta X_2 &= A_2{}^1 x_1 + A_2{}^2 x_2 + \ldots + A_2{}^n x_n \\ &\vdots \\ \Delta X_n &= A_n{}^1 x_1 + A_n{}^2 x_2 + \ldots + A_n{}^n x_n \end{aligned}$$

en que Δ es la determinante de la transformación y $A_1{}^1, A_2{}^1, \ldots, A_n{}^n$ son «las menores» primeras obtenidas de Δ suprimiendo sucesivamente una línea y columna con intersección en $a_1{}^1, a_2{}^1, \ldots, a_n{}^n$ respectivamente. Estos sistemas de ecuaciones de transformación son *recíprocos,* o lo que es lo mismo : producen *transformaciones lineales que son recíprocas.*

Las coordenadas de dos puntos son *cogredientes* si ambas se transforman por *las mismas* ecuaciones lineales de transformación y son *contragredientes* si las de un punto se transforman por ecuaciones lineales que son las recíprocas de las ecuaciones lineales que transforman las coordenadas del otro punto.

Si tenemos en cuenta la regla elemental de ser *cero* el valor de una determinante con dos filas de elementos — o dos columnas — idénticos, i. e. :

$$a_2{}^1 A_1{}^1 + a_2{}^2 A_2{}^1 + \ldots + a_2{}^n A_n{}^1 = 0$$

$$a_1{}^1 A_1{}^1 + a_2{}^1 A_2{}^1 + \ldots + a_n{}^1 A_n{}^1 = \Delta$$

etc. etc.

vemos que una forma bilineal :

$$x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 + \ldots + x_n \xi_n$$

en que los (ξ) se transforman por ecuaciones que son las recíprocas de las que transforman a los (x), resulta *inalterada por una transformación total de* x_i y ξ_i. Llámase *concomitante* a una ecuación homogénea de esta clase.

Si llamamos Δ^1 a la determinante cuyos elementos son *las menores primeras* $A_1{}^1$, $A_2{}^1$, ..., de Δ, tendremos la siguiente relación fácil de comprobar :

$$\Delta \,.\, \Delta^1 = \Delta^n; \qquad \Delta^1 = \Delta^{n-1}$$

puesto que

$$\Delta \,.\, \Delta^1 = \begin{vmatrix} a_1{}^1 & \ldots & a_n{}^1 \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ a_1{}^n & \ldots & a_n{}^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1{}^1 & \ldots & A_n{}^1 \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ A_1{}^n & \ldots & A_n{}^n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1{}^1 A_1{}^1 + \ldots & \ldots & a_1{}^1 A_1{}^n + a_2{}^1 A_2{}^n + \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1{}^n A_1{}^1 + \ldots & \ldots & a_1{}^n A_1{}^n + a_2{}^n A_2{}^n + \ldots \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \Delta & o & o & o & \ldots \\ o & \Delta & o & o & \ldots \\ o & o & \Delta & o & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^n.$$

Además nos apercibimos que podemos escribir

$$A_1^1 = \frac{d\Delta}{da_1^1} \quad \ldots$$

$$a_1^1 \frac{d\Delta}{da_1^1} + a_2^1 \frac{d\Delta}{da_2^1} + \ldots + a_n^1 \frac{d\Delta}{da_n^1} = \Delta$$

etc., etc.

En realidad los coeficientes de la forma recíproca son $\frac{A_1^1}{\Delta}; \frac{A_2^1}{\Delta} \ldots$ en los que $\frac{1}{\Delta}$ es factor común : el valor inverso del módulo.

Covariante es el nombre dado a una función derivada de otra, según una ley cualquiera, que *conserva su relación* después de una transformación lineal de coordenadas, lo cual implica *cogrediencia de variables.* Quiere decir que las variables se transforman por medio de *las mismas* ecuaciones de transformación.

Contravariante, es una función derivada de otra, según una ley cualquiera determinada, que *conserva su relación* después de ser transformadas las variables por *lineales recíprocas,* esto es : la original por un sistema de ecuaciones de transformación y la derivada especial por *un sistema recíproco.* Esto entraña la *contragrediencia* de las variables en una y otra función. Fácil es ver esto en los siguientes ejemplos.

Si $V(xy)$ es una binaria cualquiera — siempre se sobreentiende homogénea, — formemos la hessiana, tendremos :

$$\frac{d^2V}{dx^2} \cdot \frac{d^2V}{dy^2} - \left[\frac{d^2V}{dx \,.\, dy}\right]^2$$

y si V se transforma en U cuando transformamos linealmente a (x, y), tendremos :

$$\frac{d^2U}{dx^2} \cdot \frac{d^2U}{dy^2} - \left[\frac{d^2U}{dxdy}\right]^2 = M \left\{ \frac{d^2V}{dx^2} \cdot \frac{d^2V}{dy^2} - \left[\frac{d^2V}{dxdy}\right]^2 \right\}$$

que revela una «ley invariante». La hessiana es *una covariante.*

Antes de seguir vamos a considerar la relación que existe entre las transformaciones líneales de funciones y las diferenciales : a saber entre $x, y, z, \ldots$ y $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \cdots \frac{d}{dz}, \cdots$ Por ejemplo, supongamos las siguientes lineales de transformación :

$$x = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z$$

$$y = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z$$

$$z = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z$$

que resueltas reciprocamente dan :

$$\Delta X = A_1 x + A_2 y + A_3 z \qquad A_1 = \frac{d\Delta}{da_1}$$

$$\Delta Y = B_1 x + B_2 y + B_3 z$$

$$\Delta Z = C_1 x + C_2 y + C_3 z \qquad C_3 = \frac{d\Delta}{dc_3}$$

tenemos en seguida :

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dX} \cdot \frac{dX}{dx} + \frac{d}{dY} \cdot \frac{dY}{dx} + \frac{d}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dx}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \left\{ A_1 \frac{d}{dX} + B_1 \frac{d}{dY} + C_1 \frac{d}{dZ} \right\}$$

y análogamente

$$\frac{d}{dy} = \frac{1}{\Delta} \left\{ A_2 \frac{d}{dX} + B_2 \frac{d}{dY} + C_2 \frac{d}{dZ} \right\}$$

etc., etc.,

que nos dice que

$$(x, y, z) \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right)$$

son *contragredientes* y se transforman por medio de *formas lineales recíprocas.*

Quiere decir, pues, que una lineal de la forma

$$x \frac{d}{dx} + y \frac{d}{dy} + z \frac{d}{dz},$$

que es la forma general de una «tangente» o «polar», es una *concomitante universal* y, como vimos ya, no se altera por una transformación total.

Si formamos la condición necesaria para que una recta sea tangente a una curva, expresada en la forma siguiente :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy$$

y damos *un punto* de la recta, esta tendrá la forma de la polar cuya intersección con la cónica nos da los puntos de contacto. Como se sabe, la solución es la cónica recíproca que se obtiene muy sencillamente bordando *la discriminante* con las coordenadas (ξ, η, ζ) contragredientes a (x, y, z) viz :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{vmatrix}$$

es la discriminante; la recíproca es, pues :

$$\begin{vmatrix} a & f & e & \xi \\ f & b & d & \eta \\ e & d & c & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & o \end{vmatrix} = (bc - d^2)\,\xi^2 + (ca - e^2)\,\eta^2 + (ab - f^2)\,\zeta^2 + \\ + 2\,(ef - ad)\,\eta\xi + \ldots$$

Esta cónica «recíproca es *una contravariante,* como es evidente, por definición, a saber : la condición que la recta

$$x\xi + y\eta + z\zeta$$

toque la cónica dada. y *esta condición siendo concomitante universal es inalterada por transformación total.*

Quiere decir que obtenemos *el mismo resultado formando la condición que la recta toque la cónica y en seguida transformando o transformando primeramente y después formando la condición que* $x\xi + \ldots$ *toque la cónica.* Y como (x, y, z) y (ξ, η, ζ) son *contragredientes* se transforman por lineales recíproeas. Así, pues :

$$\begin{vmatrix} a & f & e & \xi \\ f & b & d & \eta \\ e & d & c & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & o \end{vmatrix}$$

es una contravariante de la cónica

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2 \ldots$$

Recordemos ahora lo que es una *emanante.* Si $x, y, z, \ldots$, y $x', y', z', \ldots$, son variables *cogredientes* y substituimos en una función homogénea $x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z', \ldots$, en vez de $x, y, z, \ldots$, respectivamente, obtendremos por desarrollo (Taylor) los coeficientes siguientes de indeterminada λ :

$$\left(x' \frac{d}{dx} + y' \frac{d}{dy} + \ldots\right)^p \mathrm{V}$$

en general, que se denomina la «emanante» de grado p de la función V. Que es *una covariante, es evidente,* puesto que la emanante se compone de términos concomitantes y, por lo tanto, inalterables por transformación total, i. e. : x', y', ..., que son cogredientes con x, y, z, ..., y $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, ..., que son *contragredientes* (haciendo recordar el vector Nabla), etc. Esto es :

$$\left(x'\frac{d}{dx}+\ldots\right)^p = \mathrm{M}^{-p}\left\{\mathrm{X}'\frac{d}{d\mathrm{X}}+\ldots\right\}^p$$

en que

$$\mathrm{M}^{-p}=\frac{1}{\mathrm{M}^p},$$

es el valor inverso del módulo de transformación elevado a una potencia p, etc. Repetimos que, cuando decimos que una función no es alterada por transformación lineal de sus variables, siempre se sobreentiende un factor constante : una potencia del módulo.

De las innumerables propiedades que existen y que se refieren a la relación entre variables cogredientes, contragredientes y funciones covariantes y contravariantes, citaremos las siguientes :

Emanantes, que ligan en cada término los x^1 con $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$, x'^p con $\frac{d^p\mathrm{V}}{dx^p}$, etc., y son *funciones covariantes.* Podemos considerar en éstas a las x^1, y^1, z^1, ..., *constantes* y después formar una *invariante del resultado.* Si en esta invariante volvemos a considerar variables a los x^1, y^1, ..., obtendremos una *covariante de la función* V *original.*

Esto es lo mismo que decir : si tenemos

$$ax^2+cy^2+2bxy$$

que nos da la invariante

$$ac-b^2$$

podemos escribir *la covariante hessiana,*

$$\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^2\left(\frac{d}{dy}\right)^2-\left(\frac{d^2}{dx\,.\,dy}\right)^2\right\}\mathrm{V}$$

para lo cual no hay más que asimilar

$$ax^2+cy^2+2bxy$$

a la emanante

$$\left(x'\frac{d}{dx}+y'\frac{d}{dy}\right)^2\mathrm{V}$$

que nos da

$$\left(x'^2 \frac{d^2}{dx^2} + y'^2 \frac{d^2}{dy^2} + 2x'y' \frac{d^2}{dx \,.\, dy}\right) \mathrm{V}$$

en que tomamos

$$a = \frac{d^2}{dx^2}, \qquad b = \frac{d^2}{dx \,.\, dy}, \qquad c = \frac{d^2}{dy^2}, \qquad \text{etc.}$$

En general, pues, si substituimos los símbolos $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \ldots$, teniendo en cuenta el exponente que corresponde a la homogeneidad, en *cualquier invariante* de emanante, obtendremos una covariante de la función matriz, y si formamos una nueva *invariante* de la última, etc., obtendremos, por lo tanto, *nuevas covariantes formando invariantes* y *después substituyendo símbolos Nabla* $\left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \ldots,\right)$ etc.

Fácil es ver, en virtud de esto, que la relación entre coeficientes y variables en los términos de una función covariante es de *contragrediencia*. También toda Hessiana es una Jacobiana *de las derivadas de la función matriz,* etc.; así, pues, la Jacobiana es *una covariante.* Se puede demostrar esto directamente, si se tiene en cuenta el carácter *contragrediente* de los elementos de la J, y el teorema fundamental de multiplicación de determinantes. A saber si $\mathrm{U} = 0$, $\mathrm{V} = 0$, ..., será :

$$\mathrm{J} = \begin{vmatrix} \frac{d\mathrm{U}}{dx}, & \frac{d\mathrm{U}}{dy} & \ldots \\ \frac{d\mathrm{V}}{dx}, & \frac{d\mathrm{V}}{dy} & \ldots \\ . & . & . \end{vmatrix}$$

Cuando $x, y, z, \ldots$, se transforman linealmente, las $\frac{d\mathrm{U}}{dx}, \frac{d\mathrm{U}}{dy}, \ldots$, se transforman por recíprocas y manifiestamente por el teorema de multiplicación de determinantes :

$$\begin{vmatrix} \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{X}}, & \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{Y}} & \ldots \\ \frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{X}}, & \frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{Y}} & \ldots \\ . & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d\mathrm{U}}{dx}, & \frac{d\mathrm{V}}{dy} & \ldots \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathrm{A}_1, & \mathrm{A}_2 & \ldots \\ \mathrm{B}_1, & \mathrm{B}_2 & \ldots \\ . & . & . \end{vmatrix}$$

en que $\mathrm{A}_1 =$ menor de Δ relativamente a a_1, etc.; llamando Δ' esta determinante recíproca tenemos, como se sabe :

$$\Delta' = \Delta^{n-1},$$

así, pues :

$$J_T = J_0 \Delta' = J_0 \Delta^{n-1} = M^{n-1} J_0$$

o sea *covariante.*

Podemos substituir, pues, en general, en una *función covariante* o *contravariante,* nuevas variables que son *cogredientes* con las que se cambian *sin alterar el carácter de la función.*

Terminaremos este rápido repaso con una reseña del teorema de Sylvester conocido por el de los «índices de inercia».

La *discriminante* de una cuádrica de n dimensiones es una *determinante simétrica,* cuya diagonal contiene, como *elementos, a los coeficientes de los términos cuadrados de la función dada.*

Si escribimos abreviadamente la cuádrica siguiente :

$$\sum_{ik}^{n} g_{ik} x_i x_k \qquad \text{en que} \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

entonces la diagonal de la discriminante contiene a los g_{ii} o g_{kk}.

Refresquemos nuestra analítica de tres dimensiones. Dada una ecuación de segundo grado en las variables (x, y, z), de cualquier forma, si la sometemos a una simple transformación lineal por *traslación,* obtenemos como coeficientes nuevos : los mismos antiguos en los términos de segundo grado y los derivados de la función relativamente a (x', y', z') respectivamente para los demás. La *eliminante de estos últimos coeficientes* es *precisamente la discriminante;* encierra, pues, la condición de homogeneidad, i. e. : la condición *de representar la cuádrica un cono.*

Si referimos una cuádrica a sus planos diametrales normales, desaparecen los términos bilineales y sólo quedan los cuadrados. Por otra parte, sabemos que podemos canonizar una cuádrica, convirtiendola en una suma de cuadrados de una infinidad de maneras, pues disponemos de mayor número de constantes que las necesarias para que *no haya degeneración.* Si una cuádrica ternaria $x^2 + y^2 + z^2$ se transforma linealmente, aparecen las *nueve constantes* que contiene implicitamente; mientras tanto la forma general sólo contiene seis, de suerte que disponemos de tres para imponer condiciones arbitrarias, etc. Hay una limitación : y es cuando intervienen términos *cuadrados negativos.* No es posible que podamos transformar una cuádrica en dos formas canónicas como las siguientes :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = u^2 + v^2 \\ x^2 + y^2 = u^2 - v^2 \end{cases}$$

ni necesita esto comentario. Descubrimos, desde luego, que *interviniendo términos negativos en la canónica Pitagórica se fija la naturaleza de la función;* sabemos que fluye de esto un método de clasificación elemental de cuádricas.

Si deseamos conocer la clase de normalización de una función multidimensional cuádrica, debemos *canonizarla* y contar los términos positivos y negativos, que supondremos sean r y s respectivamente. Conocidos éstos diremos que la cuádrica posee r dimensiones positivas y s negativas, *correspondiendo las dimensiones a direcciones normales.*

Hemos de ver que esto nos permite tomar como *sistema vectorial* coordenado un sistema de vectores normales $= r + s$, que llamaremos $p_1, p_2, ..., p_r$ y $q_1, q_2, ..., q_s$ tales que

$$(p_i p_k) = 0; \qquad i, k = 1, 2, ..., r;$$

y

$$(q_i q_k) = 0; \qquad i, k = 1, 2, ..., s;$$

pero que

$$(p_1 \cdot p_{r+1}) \neq 0 \qquad \text{y} \qquad (q_1 \cdot q_{s+1}) \neq 0,$$

entendiéndose «productos escalares» en los paréntesis.

Llamase $r + s$ los índices de inercia y J. J. Sylvester fué quien, a mediados del siglo pasado, dió el método de calcularlos. Nada puede ser más sencillo. Si :

$$V = a_1^1 x_1^2 + a_2^1 x_1 x_2 + a_3^1 x_1 x_3 + \ \ldots \ + a_k^i x_i x_k, \ldots$$

$$V = \sum_{ik=1}^{n} a_k^i x_i x_k$$

la discriminante será la determinante simétrica conocida :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & . & \ldots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \ldots & a_n^3 \\ . & . & & a_4^4 \ . & \\ . & . & & . & \\ . & . & & . & \\ a_1^n & & & & a_n^n \end{vmatrix}$$

en que

$$a_2^1 = a_1^2 \qquad \text{o sea} \qquad a_k^i = a_i^k$$

y la diagonal se compone de elementos a_k^i en que

$$i = k; \qquad \text{i. e.,} \qquad a_i^i \qquad \text{o} \qquad a_k^k, \text{ etc.}$$

Si canonizamos obtendremos una *determinante discriminante reducida a su diagonal,* puesto que todos los demás elementos se anulan. Esta nueva determinante, claro está, es igual al, o tiene el mismo valor del antiguo, salvo un factor constante. Hagamos ahora la siguiente descomposición de V en dos funciones :

$$V = M + \lambda N$$

en que

$$N = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

$$M = \alpha_1^1 x_1^2 + \alpha_2^1 x_1 x_2 + \ldots + \alpha_k^i x_i x_k + \ldots$$

es evidente que V representará una cuádrica con soluciones comunes simultáneas de M y N. Hagamos una transformación *ortogonal* de coordenadas tal que la nueva

$$N = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \qquad \text{(invariante)}$$

y la nueva M supondremos sea :

$$M = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_n x_n^2,$$

veamos ahora el efecto de este procedimiento sobre la discriminante de V. Por lo pronto vemos que esta discriminante se altera, en forma, por efecto de la descomposición en funciones M y N, de la siguiente manera, a saber :

$$V = M + \lambda N = 0$$

da una

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & & a_n^2 \\ a_1^3 & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_1^n & a_2^n & & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 + \lambda & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 + \lambda & & & . \\ . & . & \alpha_3^3 + \lambda & & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_1^n & . & . & & \alpha_n^n + \lambda \end{vmatrix}$$

y si llamamos Δ' esta nueva forma se tendrá después de *canonizar :*

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 + \lambda & & \ldots \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 + \lambda & \ldots \\ . & . & \ldots \\ . & . & \ldots \\ . & . & \ldots \\ . & . & \ldots \\ . & . & \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 + \lambda & o & o & o & \ldots \\ o & A_2 + \lambda & & & \\ o & & A_3 + \lambda & & \\ o & & & . & \\ o & & & & . \\ o & & & & . \\ o & & \ldots & & A_n + \lambda \end{vmatrix}$$

como es evidente por *invariación.*

Esto es :

$$\Delta' = (A_1 + \lambda)(A_2 + \lambda)(A_3 + \lambda) \ldots (A_n + \lambda),$$

lo cual, debidamente interpretado, nos da la solución. Los A_1, A_2, ..., A_n aparecen como raíces con signos contrarios de una ecuación de *n grado* en λ, i. e. :

$$\Delta' = 0.$$

Esta ecuación tiene todas sus raíces reales y aplicando uno cualquiera de los métodos usuales (Descartes, Sturm, Sylvester, etc.), descubriremos el número de raíces positivas y el número de raíces negativas, etc.

Este teorema es de una importancia trascendental y gracias al mismo pudo Minkowsky dividir al universo cuadridimensional en «espacio y tiempo» adoptando una forma cuadrática Pitagórica a tres dimensiones positivas (o negativas) y una dimensión negativa (o positiva) respectivamente; forma que representa en un espacio Newtoniano la ley invariante de la propagación de la luz.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2t^2 \qquad c = \text{velocidad luz},$$

si $c = 1$ y $t = x_0$ tendremos

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

que representa un cono cuadridimensional; con suprimir una dimensión espacial obtenemos un cono tridimensional con vértice en el origen. Este cono tiene dos napas, una dirigida hacia el futuro y otra hacia el pasado.

El cono degenera en plano en la mecánica de Newton, que considera $c = \infty$. El plano del presente : $t = 0$. Se ve, pues, que según la mecánica de Newton no hay «espacio muerto», pero según la de Einstein si lo hay : es el espacio excluído por las dos napas.

DIGRESIÓN 0.4

Una advertencia oportuna. Órdenes de magnitudes

Leibnitz ya explicó el significado de los diferentes órdenes de magnitudes, y fundó su cálculo infinitesimal sobre un concepto relativo a los mismos. Hay que insistir sobre este punto, de importancia transcendental..

Cuando no vemos una magnitud sobreviene una cierta incredulidad acerca de su existencia. Esto es natural, pero es fásico y erróneo. Lo que no existe es *el orden perceptible consciente de magnitud.* Miramos una casa de cerca y discernimos todos los detalles de su construcción; a medida que nos alejamos de la misma se van borrando estos detalles. ¿Cuándo no se ven, será porque ya no existen? Queda manifiesto el principio de Leibnitz, citado: *de órdenes diferentes de magnitudes.* En realidad esto no exigiría mayor explicación, pero sí ilustraciones. Veamos esto.

Nuestro universo es un *continuum* mayor puntual de cierta naturaleza determinada. Nosotros *no vemos los puntos* por aquello de «la casa», pero sabemos que *existen* o «allí están». No vemos el aire, y es muy posible que un pescado no vea el agua, pero «ahí está». Estos diferentes *continuums* se distinguen por «índices de cohesión» y diremos siempre que nuestro *continuum* mayor existe dentro de otro, cuyo orden es superior en una unidad al que corresponde *al finito nuestro.*

Comprendiendo bien esto, el lector se dará inmediata cuenta del hecho que nuestra invariante *c* de Einstein, o *velocidad de propagación de la luz,* que es nuestra velocidad límite, puede ser, en unidades planetarias, una magnitud insignificante para otro sér que existiere en el gran *continuum,* que contiene al *continuum* mayor, y que *viese las cosas en ese espacio mayor,* tal como *las vemos nosotros en el nuestro menor.*

Se comprende así cómo una velocidad que es *finita* en *un orden de magnitudes puede parecer infinita en otro orden de magnitud menor.* Esto es muy importante, y ha sido mal comprendido hasta *hoy día* mismo, debido a los «fenómenos fásicos» que todo ocultan.

Así se comprende que: un tiempo que es finito en un orden de existencia puede ser «una eternidad» o infinito en otro orden inferior. Más adelante se volverá matemáticamente sobre este punto, pero es necesario advertir que las matemáticas sólo sirven cuando «se ve», o cuando se domina filosóficamente la materia, y no sirven cuando *no se ve* o no se comprende (1).

(1) No es necesario reflexionar mucho para percibir el significado de esta diversidad de órdenes de magnitudes. Por ejemplo, el clásico tren en marcha y los postes de telégrafo al lado de la vía ofrecen una explicación — podemos fácilmente contar el número de postes telegráficos que pasan, pero no así los postes del alambrado que encierra la vía, menos aun las varillas del alambrado; por fin si miramos al suelo y pensamos en los «granos de arena», etc. se ve cómo

Tomemos ahora el caso de una linealización infinitesimal, que es un método de análisis de admirable potencia. Tratemos de ilustrar el significado de este principio puramente analítico. Por ejemplo, se puede elegir un fenómeno muy conocido de luminosidad: la difracción y considerar ese efecto de «proyección circular ó elíptica», etc., que se observa en un monte como efecto de la penetración del sol por los intersticios que dejan las hojas de los árboles entre sí. Esto es: la luz dibuja sobre el suelo una infinidad de círculos, elipses, etc. Este mismo efecto podrá observarse en una cámara obscura cuando prevalecen condiciones iguales y el fondo está fuera de foco. En ambos casos se *borran dimensionalidades, por simple cambio de orden de magnitudes.* Los intersticios entre las hojas carecen, en general, de formas circulares y si proyectamos sobre un plano *próximo a los mismos* esto *se revelará;* pero cuando el plano se aleja más allá de un determinado límite sobrevendrá el fenómeno arriba anotado. Ahora bien, si un *continuum* mayor se deformase de una manera continua y absolutamente arbitraria, *sin alterar su estructura, o densidad,* pasando de una configuración a otra totalmente distinta, un observador que contemplase el fenómeno desde el exterior se podrá figurar que está mirando «una nube». *No admitirá duda* sobre *las diferentes formas* que toman las nubes, quizás recuerde a Polonio y Hamleto. Supongamos ahora al observador en un punto interno del *continuum* mayor o nube, *y fijo al punto.* Añadiremos otra condición: que sólo concentra su atención sobre lo que pasa en su más inmediata vecindad, esto es: *lo infinitamente próximo.* ¿Qué será lo que observa cuando la nube se deforma *arbitraria* y *continuamente* pasando por todas las formas caprichosas imaginables? Solamente observará *una sola* y *única cosa invariante*: *rotación al rededor del punto fijo que ocupa.* A todas esas «diferentes formas» *corresponderá un sólo y único fenómeno de rotación.* Aquí tenemos, pues, una *linealización infinitesimal.* Matemáticamente se dice: a transformaciones lineales infinitesimales corresponden transformaciones generales arbitrarias de coordenadas en un *continuum* puntual. No hay más que comparar este caso con el luminoso para comprender el significado de «diferentes órdenes de magnitudes».

«los órdenes de magnitudes se agrupan naturalmente» diferenciándose por «indeterminaciones, que en uno corresponden a determinaciones en el orden inmediato». Este es el principio básico fundamental en toda la *fenomenología perceptible* de la naturaleza. Este principio es básico, y consecuencia directa del proceso de repetición, como se verá.

Se ve, pues, que cuando se relacionan dos órdenes diferentes de magnitudes: *a una determinación fásica en un orden corresponde una indeterminación en el otro orden superior.* Esto tiene una trascendental importancia, como se ha dicho, y señalaremos una aplicación, solamente en forma superficial. Una percepción consciente se produce en virtud de un fenómeno de «rotaciones focalizadas» en un punto de nuestro cerebro; estas rotaciones afectan elementos infinitesimales y se propagan por medio de una cierta «eferencia» a determinadas zonas de nuestro *continuum* corpóreo humano. Pues bien, a estas rotaciones corresponden deformaciones continuas arbitrarias que son contracciones y dilataciones musculares integrales, etc. Decimos que *la voluntad* reside precisamente en la *indeterminación* que liga *un orden de magnitud con el otro orden inmediato de magnitud,* y decimos que ejercemos un *acto de voluntad* cuando *destruímos* la *indeterminación.* Pero hay que observar con cuidado que este «acto de voluntad» es *infinitesimal* y, por lo tanto, *no es conscientemente perceptible.* En esto reside *el error* de la *libertad* atribuída a *la voluntad;* no existe en realidad la tal libertad. Cuando se discurre sobre esto se ve que la *teoría de Freud* tiene visos de «fundamento científico» y cobra mayor importancia. Esta teoría se impone.

Sintéticamente escribiremos ahora cuatro fenómenos que pertenecen a cuatro órdenes diferentes de magnitudes, siendo los cuatro de una misma, única, naturaleza: *repetición pura*:

1° Gravitación obscura;

2° Gravitación luminosa;

3° Gravitación térmica;

4° Gravitación cohesiva material.

Aquí tenemos cuatro fenómenos conscientes o cerebrales en cuatro órdenes de magnitudes. Oportunamente se demostrará cómo se pasa de una a otra por medio de «apilamientos» y composiciones «recíprocas». Cuando se focaliza la gravitación obscura sobreviene la luminosa y cuando se resiste ésta sobreviene la conducción calorífica, etc., por medio de composiciones tensoriales; sigue a ésta la gravitación cohesiva como límite inverso de la luminosa, que percibimos con el tacto y por discontinuidad.

Por si todavía quedara alguna duda acerca de este punto trascendental podemos citar un ejemplo práctico más en pos de la claridad. Cuando un viajero cruza el mar, en ningún momento deja de experimentar «la condición plana» de la superficie sobre la cual navega el barco. Para obtener una idea de esfericidad tiene que trascender el

orden de magnitud del barco y su inmediata vecindad y poner atención en el horizonte, etc. Pues bien, no hay más que figurarse mentalmente que «la tierra podría variar de radio *ad infinitum* sin que esto produjera alteración en esa «condición plana» elemental señalada. Hay un límite inferior a esta variación de radio impuesta por *el orden de magnitud del casco,* y cuando se ha llegado a éste se puede aun recurrir a *un bote* para obtener una condición elemental plana, quedando la tierra reducida al tamaño de una gran pelota. Pero no es necesario que la tierra *conserve su esfericidad, la condición elemental plana* subsistirá con *cualquier forma* si la *deformación es continua* y no hay *contorsión,* como se sabe. Se descubre, pues, que a una determinación «plana» en un orden de magnitud corresponde una indeterminación en el orden inmediato superior.

Nuestro Universo es un *continuum* de Repetición. Nuestras percepciones arrancan desde «el punto límite», o cero, y sólo es el *orden consciente* de éstas que es limitado. ¡Percepción continua!

No existe, pues, *geometría abstracta.*

CAPÍTULO SEGUNDO

Espacio euclideano

Adoptamos el método del profesor H. Weyl. Nos concierne el espacio plano euclideano y supondremos al lector familiarizado con los elementos del cálculo tensorial corriente.

La característica del espacio euclideano es su generación paramétrica plana. Quiere decir, que en este espacio es posible obtener dos posiciones congruentes de un sistema o cuerpo mediante una *traslación rectilínea arbitraria.* Matemáticamente esto se expresa diciendo que un espacio euclideano plano es aquel que comprende *en el grupo de transformaciones congruentes posibles al grupo de traslaciones rectilíneas.*

Una traslación rectilínea es un movimiento que afecta *de la misma manera a todos los puntos de un sistema* y se expresa geométricamente por medio de *un vector.*

Cuando decimos que las traslaciones rectilíneas forman un «grupo», queremos dar a entender que poseen la propiedad matemática de grupo y que, por lo tanto, a toda traslación corresponde una inver-

sa que la anula y a dos traslaciones consecutivas corresponde una « contracta » directa i. e. :

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = 0; \qquad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}, \text{ etc.},$$

Si n es un número cualquiera tendremos para dos vectores (traslaciones) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}; \qquad n(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = n\mathbf{a} + n\mathbf{b}$$

y si $\mathbf{c}$ es otra traslación :

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}, \text{ etc.},$$

y si m y n son dos números cualesquiera :

$$(m + n)\,\mathbf{a} = (m\mathbf{a}) + (n\mathbf{a}) \qquad \text{y} \qquad m\,(n\mathbf{a}) = n\,(m\mathbf{a}) = mn\mathbf{a}.$$

Concibiendo a un vector determinado por dos puntos A y B, i. e. :

$$\overline{AB} = \mathbf{a}, \text{ etc.},$$

podemos extender lo dicho a este caso.

Adoptando el método seguido por Grassmann (1844) con las variantes introducidas por H. Weyl se desarrolla fácilmente la geometría afín en el espacio euclideano, que descansa completamente sobre *el principio de ser la traslación una transformación congruente que distingue a este espacio de una manera única y exclusiva entre todos los espacios paramétricos posibles.*

Résulta, pues, que un espacio *plano* euclideano es un concepto que guarda, relativamente a un espacio *curvo,* la misma relación que una línea recta a una línea curva gaussa, o que un plano a una superficie curva gaussa. Así como en general no es posible trazar sobre una superficie curva una línea recta, tampoco es posible en un espacio curvo trazar un plano. Hemos de ver más adelante, cuando tratemos la geometría riemeniana, cómo se puede relacionar un espacio amorfo con uno plano euclideano afín. Repetimos que la característica especial de un espacio plano euclideano es : *la traslación rectilínea* como *trasformación congruente. Dinámicamente* este espacio posee la propiedad newtoniana conocida bajo el nombre de « espacio libre ». *En este espacio plano no obran fuerzas y los cuerpos materiales se comportan libremente,* ligados al *campo* por la conocida ley magistral newtoniana de *inercia.*

La *traslación rectilínea* es, pues, *característica de un espacio libre newtoniano,* siéndolo a la vez del *espacio plano euclideano.* Vamos,

pues, entreviendo que existe en «la mecánica» una correspondencia exacta de propiedades, vg., geométricas y físicas. Esto nos hace pensar que así como el espacio euclideano aparece geométricamente como un caso especialísimo de espacios amorfos o curvos, habrá también de aparecer la dinámica de dicho espacio como caso especialísimo de la dinámica de un espacio general. Efectivamente, esto es exacto. El lector, progresivamente, lo palpará. Kinemáticamente *una traslación rectilínea* caracteriza un movimiento uniforme, i. e., constante. En forma concisa : *una traslación* es un movimiento constante, por ejemplo : constancia de velocidad y constancia de dirección. *Es un vector.*

Todos los puntos de un cuerpo *son iguales* relativamente a los efectos de una traslación. Nada distingue un punto de otro.

Si por medio de una traslación el punto P del cuerpo pasa a la posición P′ diremos que P y P′ son puntos correspondientes. Si ahora por medio de una segunda traslación P y P′ pasan a ser P_1, P_1' y luego a otra posición P_2, P_2', etc., podemos pasar de la posición inicial P a la posición final P_n' por una traslación directa *conservando la congruencia* y podemos substituir cualquier traslación intermedia *sin afectar la congruencia.* Es de esta manera kinemática que más claramente aparece el carácter «grupal» de *la traslación rectilínea* como trasformación congruente del espacio euclideano.

La geometría afín del espacio euclideano se funda sobre *la traslación como forma de transformación.* Esto es lo mismo que decir : el espacio afín euclideano es *el espacio de las transformaciones lineales.*

Kinemáticamente podríamos haber llegado a este mismo resultado puesto que sabemos, por la mecánica clásica, que en un espacio newtoniano libre los cuerpos guardan reposo o *se trasladan uniformemente unos relativamente a otros ;* lo cual implica *un cuerpo de referencia desde* el cual el observador nota el movimiento uniforme o reposo de los demás. Si cambiáramos el cuerpo de referencia, el espacio conserva su carácter libre; como es evidente, quiere decir, que relativamente al nuevo cuerpo los demás se moverán uniformemente : sólo habrán cambiado de *velocidad constante y de dirección de movimiento.* Este cambio se logra por una trasformación lineal de coordenadas, como sabemos. Digamos, pues : el espacio afín euclideano o el libre newtoniano es el *espacio de las transformaciones lineales.* Esta es otra correspondencia entre geometría y física.

Falta ahora distinguir entre el concepto de *congruencia afín* y congruencia en el sentido de la geometría general. Esta última siendo caso particular de la anterior, i. e., lo que vulgarmente comprendemos

por igualdad o identidad. Dos figuras son afines si a cada punto P corresponde un punto P′, a cada vector **a** un vector **a**′ y a un **a** + **b** un **a**′ + **b**′ : a un λ**a** un λ**a**′ : si direcciones paralelas tienen correspondientes direcciones paralelas, etc. En geometría afín, dos figuras así relacionadas *son idénticas,* puesto que no hay cómo distinguir entre los puntos de uno y otro, i. e., no hay propiedad que posea una figura que no posea la otra afín. Vemos, pues, que la identidad o congruencia geométrica general es un simple caso particular de la congruencia afín.

Podemos desarrollar una geometría afín basándonos sobre « traslaciones rectilíneas », lo vamos a demostrar brevemente.

Si X representa una traslación y si ξ es un número real y e un vector arbitrario determinado :

$$X = \xi_1 e_1$$

representa exactamente, y sin ambigüedad, a la traslación X en términos del vector coordenado e_1 mediante la abscisa, u componente ξ_1.

Si a ξ damos todos los valores reales posibles, el extremo P de X engendrará una línea recta con dirección e_1, o sea, un espacio de una dimensión.

Podemos, pues, expresar la magnitud de un vector X = una traslación por medio de una componente ξ y un vector básico e_1. Al mismo tiempo podemos fijar la posición de un punto P por medio de una abscisa ξ_1, que escribiremos x_1 para diferenciar, y un vector e_1. *Sobreentendido que nuestro espacio es unidimensional y representado por la recta* e_1. Que una traslación X en este espacio de una dimensión es igual a cualquier otra traslación de igual magnitud X quiere decir que es lo mismo elegir un punto O como otro O′ de la recta como origen : todos son idénticos, i. e., la recta, respectivamente espacio, es homogénea. Vemos, en consecuencia, que si cambiamos *ad libitum* el origen y hacemos variar a ξ_1 como queda dicho, siempre tendremos el mismo resultado : la multiplicidad vectorial o puntual unidimensional caracterizada por e_1.

Supongamos ahora que e_1 y e_2 representan dos vectores básicos con diferentes direcciones. Será imposible de efectuar medidas sobre uno de éstos que comprenda medidas sobre el otro. Así, pues, si X = una traslación y

$$X = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$$

y damos a ξ_1 y ξ_2 todos los valores reales posibles resulta : que la recta dirigida e_1 se trasladará a lo largo de la recta dirigida e_2, recorriendo

uno por uno, todos sus infinitos puntos, i. e., un espacio de dos dimensiones o un plano.

Si

$$X = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \ \ldots \ + \xi_n e_n$$

y damos a los (ξ_i) todos los valores reales posibles obtendremos un espacio de *n dimensiones,* i. e., *una multiplicidad vectorial, o puntual, de n dimensiones.*

Esto es:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \qquad \text{vectorial}$$

$$\overline{OP} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad \text{puntual.}$$

¿ Cómo podrá escapar la atención del lector que se trata de formas lineales ?

La característica especial de estas formas es que: para que $X = 0$ tiene que ser cada

$$\xi_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

por separado.

Los e_i son vectores básicos determinados y, por lo tanto, de magnitud : *constantes.*

Si X e Y son dos traslaciones y si L indica una forma lineal arbitraria :

$$L(X + Y) = L(X) + L(Y)$$

$$L(X) = \xi_1 L(e_1) + \xi_2 L(e_2) + \ \ldots \ + \xi_n L(e_n)$$

y si ponemos :

$$L(e_1) = \alpha_1$$

tendremos

$$L(X) = \xi_1 \alpha_1 + \xi_2 \alpha_2 + \ \ldots \ + \xi_n \alpha_n$$

en que la condición de linealización es que para $L(X) = 0$ tendrá que ser

$$\xi_1 = \xi_2 = \ \ldots \ = \xi_n = 0$$

separadamente.

Inversamente $L_1, L_2, \ldots, L_u$ serán formas lineales independientes si *no es posible* hallar un factor λ_i para el cual

$$\lambda_1 L_1(X) + \lambda_2 L_2(X) + \ \ldots \ + \lambda_n L_n(X) = 0$$

excepto :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ \ldots \ = \lambda_n = 0.$$

Esto es para

$$\lambda_i = 0 \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Está a la vista, pues, que podemos representar una traslación cualquiera X por medio de sus componentes ξ_i en un sistema vectorial coordenado e_i; podemos representar un punto P, extremo del vector $\overline{OP} = X$ por medio de sus coordenadas x_i en un sistema vectorial coordenado e_i situado en un punto *origen* O, i. e., punto de emergencia de los vectores básicos e_i.

La representación se efectúa mediante una forma lineal de términos lineales independientes, y es única, exclusiva y no admite ambigüedad. A toda traslación X de componentes ξ_i corresponde en el sistema coordenado (e_i):

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i.$$

Todo punto P se representa en el sistema $(0e_1, e_2, ..., e_n)$:

$$\overline{OP} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Si suponemos que los ξ_i varían entre $\xi_i = 0$ y $\xi_i = 1$, tomando todos los valores intermedios, obtendremos *un paralelepípedo vectorial de n dimensiones,* etc.

Siendo homogéneas las formas lineales se aplican todas las propiedades conocidas de las mismas.

Además, es preciso observar que en una multiplicidad vectorial de *n dimensiones* existen *n vectores que son linealmente independientes* y que todo $(n + 1)$ vector ya no lo es; la ecuación lineal misma lo está diciendo. Si multiplicamos una forma por un factor numérico, o si sumamos vectores entre sí *no alteramos la naturaleza de la multiplicidad,* i. e., el resultado de estas operaciones será siempre *un vector de la multiplicidad,* o un punto de la misma.

CAPÍTULO TERCERO

Transformaciones lineales

Siendo homogéneo el espacio plano euclideano será imposible distinguir un punto de otro, en el mismo, por una propiedad especial.

Todos los puntos son iguales. Es exactamente lo mismo elegir uno que otro como origen del sistema vectorial coordenado (e_i).

Obtendremos exactamente el mismo resultado engendrando la multiplicidad vectorial o puntual con punto de emergencia en O como en otro O′ : *se repetirá la multiplicidad* cuando han sido producidos todos los vectores o puntos.

Expresando matemáticamente esto tendremos :

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

en un sistema O, y, si elegimos un nuevo sistema $\bar{e}_i$ de vectores básicos tal que :

$$\bar{e}_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^k e_k \qquad i = 1, 2, ..., n$$

en que los α_i^k son constantes : coeficientes numerados con índices para indicar su posición en la forma lineal, manifiestamente; la traslación X tiene un valor que es *independiente del sistema especial de representación* y en virtud de esta *invariación* será :

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}_i \bar{e}_i$$

de aquí por simple mecanismo de cálculo :

$$X = \sum_{i}^{n} \xi_i e_i = \sum_{i}^{n} \bar{\xi}_i \bar{e}_i = \sum_{i}^{n} \bar{\xi}_i \sum_{k}^{n} \alpha_i^k e_k = \sum_{i}^{n} e_i \sum_{k}^{n} \bar{\xi}_k \cdot \alpha_i^k$$

y por lo tanto :

$$\xi_i = \sum_{k}^{n} \alpha_i^k \bar{\xi}_k.$$

Tenemos pues:

$$X = \sum_{i}^{n} \xi_i e_i = \sum_{i}^{n} \bar{\xi}_i \bar{e}_i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{e}_i = \sum_{k}^{n} \alpha_i^k e_k \\ \xi_i = \sum_{k}^{n} \alpha_i^k \bar{\xi}_k \end{array} \right. \qquad \text{(A)}$$

desde ya percibimos que $\bar{\xi}_i$ y $\bar{e}_i$ se transforman *por lineales recíprocas*, lo cual acusa una *contragrediencia* entre *componentes* y *vectores básicos*, que explica inmediatamente *la invariación de la traslación* X.

La condición necesaria de forma lineal independiente es, manifiestamente, que el determinante

$$|\alpha_k{}^i| \neq 0.$$

Puesto que si

$$|\alpha_k{}^i| = 0,$$

existiría una solución simultánea para las *n ecuaciones* lineales

$$\bar{e}_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i{}^k e_k, \qquad \text{etc.}$$

Si $\overline{OP} = X$ fija la posición de un punto P y

$$\overline{OP} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

cambiando al origen O′ y sistema $(\bar{e}_i)$, siendo:

$$\overline{OO'} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ \ldots \ + a_n e_n$$

y

$$\bar{e}_i = \sum_{k}^{n} \alpha_k{}^i e_k$$

$$|\alpha_k{}^i| \neq 0$$

será:

$$\overline{O'P} + \overline{OO'} = \overline{OP}$$

$$\overline{OP} - \overline{OO'} = \overline{O'P}$$

La transformación es idéntica a la vectorial de traslación X añadiendo los términos debidos al cambio OO′, así pues:

$$x_i = \sum_{k}^{n} \alpha_k{}^i \bar{x}_k + a_i \tag{1}$$

$$x_i - a_i = \sum_{k}^{n} \alpha_k{}^i \bar{x}_k. \tag{2}$$

La forma (2) devuelve la homogeneidad a la ecuación gracias a la solución a_i, que corresponde al nuevo origen.

Subsiste, como es natural, la misma contragrediencia entre los (x_i) y los (e_i), etc.

Estos resultados tienen una interpretación especial de gran importancia, en el sentido de correspondencias afines. De la misma manera que podemos concebir un cambio de sistema coordenado vectorial po-

demos suponer una correspondencia afín dentro de un sistema coordenado determinado. Esto es, si dentro de un sistema $(Oe, e_2, ..., e_i)$ hacemos corresponder a un punto P otro P′, a un vector **a** otro **a**′ tal que a $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ corresponde $\mathbf{a}'+\mathbf{b}'$ y a $\lambda\mathbf{a}$ corresponde $\lambda\mathbf{a}'$, etc., y al sistema $(Oe_1, e_2, ..., e_n)$ corresponde el sistema $(O'e', e'_2, ..., e_n')$, entonces manifiestamente a

$$X = \sum_i^n \xi_i e_i$$

corresponderá

$$X' = \sum_i^n \xi_i e_i'.$$

y si ξ_i' son las componentes *transformadas* que corresponden a *las* ξ^i, tendremos, si

$$e_i' = \sum_k^n \alpha_k{}^i e_k$$

$$\xi_i' = \sum_k^n \alpha_k{}^i \xi_k$$

y

$$x_i' = \sum_k^n \alpha_k{}^i x_k + a_i.$$

Vectores linealmente independientes se transforman por afinidad en vectores linealmente independientes, una multiplicidad de h dimensiones en otra de h dimensiones, paralelas en paralelas, etc.

Brevemente, observamos en los $(\alpha^i{}_k)$ las componentes de una matriz A de transformación, que hace corresponder un vector X a otro arbitrario X′ en el sistema.

En general, el sistema vectorial básico de los vectores (e_i) se elige de manera que $e_i = 1$, en magnitud, i. e., vectores de magnitud unitaria.

El lector bien sabe que dos ecuaciones lineales homogéneas se suman con simplemente *sumar coeficientes correspondientes.*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ \ldots \ + a_nx_n = 0$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \ \ldots \ + b_nx_n = 0$$

$$\sum_{i=1}^n a_ix_i + \sum b_ix_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)\, x_i = 0.$$

Además:

$$L(x+y) = L(x) + L(y)$$

$$mL(x) + nL(y) = L(mx) + L(ny).$$

Si tenemos :

$$(1) \ldots a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \alpha$$

no homogénea — si x_1' x_2', ..., es un sistema de soluciones de (1) tendremos :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \alpha$$

$$a_1x_1' + a_2x_2' + \ldots + a_nx_n' = \alpha$$

$$a_1(x_1 - x_1') + a_2(x_2 - x_2') + \ldots + a_n(x_n - x_n') = 0$$

en que podemos concebir que $(x_1 - x_1')$ son *componentes de un vector determinado* por los dos puntos $(x_1'$ x_2', ..., $x'_n)$ y $(x_1$ x_2, ..., $\alpha_n)$, lo cual explica perfectamente la diferencia entre formas puntuales vectoriales y formas vectoriales.

Todas las correspondencias afines lineales son posibles y así podemos hacer corresponder a un vector de componentes (ξ_i) cualquier forma lineal independiente en un sistema arbitrario de vectores básicos. Los (ξ_i) siendo formas lineales a su vez.

Pero no basta la geometría afín para la determinación completa de magnitudes en el espacio plano euclideano. Es insuficiente la propiedad de poderse comparar distancias en una misma dirección por medio de traslaciones o transformaciones afines. Falta dotar a este espacio de la posibilidad matemática de comparación de distancias arbitrarias con direcciones arbitrarias. Falta el « campo métrico » o « espacio métrico ».

Con una eficiencia que es admirable, desde todo punto de vista, se logra esto mediante el principio de la « proyección ». Simplemente con el concepto del « producto escalar ».

Entramos forzosamente a la consideración de las formas bilineales como resultado del « producto escalar » de *dos vectores* o dos traslaciones. Si :

$$X = \sum_i^n \xi_i e_i$$

$$Y = \sum_i^n \eta_i e_i$$

$$(XY) = Q(XY) = \sum_{ik}^n \alpha_k{}^i \xi_i \eta_k$$

empleamos la notación alemana como la más práctica, sencilla y conveniente.

$$Q(XY) = (XY) = |X|\,|Y| \cos \sphericalangle XY,$$

en que $|X|$ e $|Y|$, respectivamente, son *magnitudes escalares.*

Las formas bilineales presentan las particularidades siguientes : ser o no ser simétricas.

$$\sum_{ik}^{n} \alpha^{ki} \xi_i \eta_k$$

en que

$$\alpha_k{}^i = \alpha_i{}^k$$

o

$$\alpha_k{}^i \neq \alpha_i{}^k,$$

siendo naturalmente

$$|\alpha_k{}^i| \neq 0$$

ser levo simétricas o :

$$a_k{}^i = - a_i{}^k.$$

Una forma asimétrica puede fácilmente convertirse en simétrica con aplicar el álgebra elemental a la forma. Por ejemplo :

Q (XY) siendo asimétrica, será

$$\frac{1}{2}\left\{ Q(XY) + Q(YX) \right\}$$

simétrica, etc.

Si X = Y tenemos una forma cuadrática

$$(XX) = Q(X) = \sum_{ik}^{n} \alpha_k{}^i \xi_i \xi_k.$$

A toda forma bilineal simétrica corresponde una, y una sola, forma cuadrática. Una misma forma cuadrática no puede derivar de dos formas bilineales simétricas diferentes. Esto es evidente y se ve con simplemente inspeccionar una forma pitagórica cualquiera.

Cuando

$$Q(x) = (xx) = \sum_{ik}^{n} \alpha_k{}^i \xi_i \xi_k > 0$$

para toda traslación $x \neq 0$ se dice que Q (x) es una forma cuadrática *definida* positiva Si Q $(x) < 0$ se dice que es *indefinida.*

Q (X) = X^2 = *cuadrado del vector* X . (XY) = Q (XY) = producto escalar de X por Y es manifiestamente una forma bilineal simétrica, i. e. :

$$(XY) = (YX); \qquad m(X \,.\, Y) = (mX \,.\, Y) = (X \,.\, mY)$$

$$m(X \,.\, Y) = (mY \,.\, X), \text{ etc.}$$

Si e es un vector de magnitud unitaria tendremos evidentemente :

$$Q(e) = (e \,.\, e) = 1.$$

Ligamos el campo métrico con el espacio plano afín euclideano de la manera más sencilla y completa, con simplemente especificar que: una trasformación afín, que convierte al vector X en el vector X′, será *una transformación congruente* si se realiza:

$$Q(X) = Q(X').$$

Nada más.

Quiere decir que si X e Y corresponden á X′ e Y′ tendrá que ser:

$$Q(X) = Q(X')$$

$$Q(Y) = Q(Y')$$

$$Q(XY) = Q(X'Y')$$

Fácilmente: si **a** y **b** son dos vectores unitarios cualesquiera, y θ es el ángulo entre sus direcciones:

$$Q(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \cos\theta$$

si **a** y **b** son arbitrarios tendremos, como se sabe, del cálculo vectorial elemental:

$$\cos\theta = \frac{Q(\mathbf{ab})}{\sqrt{Q(\mathbf{aa})\,Q(\mathbf{bb})}}$$

si **a** es perpendicular a **b** será, pues,

$$Q(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 0.$$

Fácil es ver que un vector X será igual a otro Y si se tiene

$$Q(X) = Q(Y).$$

Como magnitud de un vector se elige la raíz cuadrada de Q (X).

Si e_1, e_2 y e_3 son tres vectores básicos unitarios y

$$X = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$$

proyectando sobre cada vector básico sucesivamente

$$(Xe_1) = \xi_1 (e_1 e_1) + \xi_2 (e_2 e_1) + \xi_3 (e_3 e_1)$$

si e_2 es perpendicular a e_1, y e_3 perpendicular a e_1, tendremos un sistema normal cartesiano así:

$$(Xe_1) = \xi_1; \qquad (e_2 e_1) = (e_3 e_1) = 0$$

$$(Xe_2) = \xi_2; \qquad (Xe_3) = \xi_3,$$

lo cual nos da el significado de las componentes (ξ_1, ξ_2, ξ_3) de la traslación X *en el campo o espacio métrico.*

En general un sistema cartesiano de coordenadas es un sistema vectorial normal y se distingue facilmente. Si

$$X = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$$

$$(X \,.\, X) = \xi_1^2 (e_1 e_1) + \xi_1 \xi_2 (e_1 e_2) + \ \ldots \ + \xi_2^2 (e_2 e_2) + \ \ldots \ + \xi_3^2 (e_3 e_3),$$

y si $e_1 \perp$ a $e_2 \perp$ a e_3, será :

$$(XX) = \xi_1^2 (e_1 e_1) + \xi_2^2 (e_2 e_2) + \xi_3^2 (e_3 e_3),$$

si llamamos

$$\varepsilon_i = (e_i e_i) = \pm 1$$

tendremos en general :

$$(XX) = \sum_i^n \varepsilon_i \xi_i^2 \qquad \text{si} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

en el caso cartesiano que nos ocupa tenemos :

$$Q(X) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots \xi_n^2$$

en que deducimos fácilmente la condición de la expresión :

$$X = \sum_i^n \xi^i e^i$$

$$Q(XX) = \sum_{ik}^n (e_i e_k) \xi_i \xi_k$$

tendrá pues que tenerse :

$$Q(e^i e^k) = \begin{Bmatrix} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{Bmatrix}.$$

El lector recordará ahora el teorema de Sylvester sobre índices de inercia y aplicará el mismo al caso que nos ocupa. Deducimos en consecuencia que la forma cuadrática

$$Q(X) = \sum_{ik}^n g_{ik} \xi^i \xi^k$$

$$Q(e_i e_k) = g_{ik}$$

y en el caso de sistema cartesiano :

$$Q(e^i e^k) = \begin{Bmatrix} 0 & i \neq k \\ \pm 1 & i = k \end{Bmatrix}$$

de donde inferimos la naturaleza del espacio métrico, sin ambigüedades, etc.

Si $Q(X) > 0$ fácilmente hallamos para

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 = \xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \ldots \xi_n'^2$$

que si

$$\xi_i' = \sum_k^n \alpha_{ik}\xi_k$$

y

$$\xi_r' = \sum_k^n \alpha_{rk}\xi_k$$

forzosamente será

$$\xi_i'\xi_r' = \sum_k \alpha_{ik} \cdot \alpha_{rk}\xi_k \cdot \xi_k.$$

Y, por lo tanto, la condición de ortogonalidad es:

$$\sum_k \alpha_{ik} \cdot \alpha_{rk} = \begin{Bmatrix} 0 & i \neq r \\ 1 & i = r \end{Bmatrix}.$$

La simetría exige que:

$$\xi_i' = \sum_k^n \alpha_{ik}\xi_k \qquad \xi_i = \sum_k^n \alpha_{ki}\xi_k'$$

o sea que α_{ik} y α_{ki} sean *términos recíprocos.* Ya sabemos de determinantes que si:

$$|a_{ik}| = \Delta$$

el módulo es

$$a_{ki} = \frac{\dfrac{d\Delta}{da_{ik}}}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{da_{ik}}$$

de aquí, sumando:

$$a_{ki} \cdot a_{ik} = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{d\Delta}{da_{ik}} a_{ik} = 1,$$

pues la suma (pág. 20)

$$\frac{d\Delta}{da_{ik}} a_{ik} = \Delta.$$

Si llamamos

$$\Delta' = |a_{ki}|$$

determinante recíproco de Δ tendremos:

$$\Delta = \Delta'$$

por efecto de ortogonalidad y también

$$\Delta \,.\, \Delta' = 1$$

lo cual implica que

$$\Delta = \pm 1.$$

Seguramente el lector no necesitará que se diga que los elementos de $\Delta \,.\, \Delta'$ son precisamente los que constituyen la condición de la ortogonalidad escritos, etc.

La transformación ortogonal, siendo congruente, admite en Δ un doble signo; la explicación está en la simetría directa o invertida por reflexiones.

Deducimos en consecuencia que por suma:

$$a_{ik} \,.\, a_{ki} = 1 = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{d\Delta}{da_{ik}} a_{ik}$$

esto es:

$$a_{ki} = \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{da_{ik}} = \frac{d\Delta}{da_{ik}}$$

pues $\Delta = 1$, si escribimos como es usual a^{ik} en vez de $\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{d\Delta}{da_{ik}}$ para indicar un término de la *forma lineal recíproca correspondiente* a a_{ik}, vemos que la suma es:

$$a_{ik} a^{ik} = 1.$$

Esta notación es la que hemos de usar de acuerdo con la convención del profesor H. Weyl, para distinguir elementos recíprocos: elementos cogredientes de elementos contragredientes, y covariación de contravariación, sobreentendido el signo $\sum$.

DIGRESIÓN O.5

Definiciones y filosofía

Entramos de lleno a la parte matemática, esto es, la geometría en un *continuum* euclideano plano, afín. Supondremos al lector familiarizado con la teoría de linealizaciones. o de colinealizaciones.

Número. — Base de la geometría, es *un símbolo de repetición.*

Cuando decimos *uno,* nos figuramos algo, *una* cosa cualquiera. Cuando decimos *dos* nos figuramos *una repetición de la cosa.*

Fluye de esto que el origen del concepto *número* estriba en la *re-*

petición observada o percibida en la naturaleza, muy de acuerdo con el precepto del filósofo Locke. Pero no nos ataremos a filosofía alguna, vamos a descubrir la cosa nosotros mismos. Decimos que la *desigualdad* jamás podría originar el concepto de número. La cosa es así: cuando nosotros tenemos *dos percepciones absolutamente* iguales e imposibles de ser «distinguidas» una de otra, por concepto alguno, decimos el mágico DOS.

Es la *dura necesidad* que ha engendrado el *número* como concepto intelectual. *Este libro* y *esa casa son dos cosas diferentes.* ¿Qué aplicación tiene el *dos* acá? Simplemente afecta al hecho de ser «cosas»; digo, pues, que «cosas» es lo que tienen de común e «indistinguible» una casa y un libro.

Sobre este punto no puede haber discusión. Se trata de: *una verdad absoluta o invariante.* Es, pues, una ley natural, de acuerdo con los preceptos del cálculo tensorial y Einstein. El lector debe «sentir» esta «realidad absoluta» y dentrilarla mentalmente, si tiene alguna duda, hasta asimilar su importe *con la convicción de su veracidad* teniendolo después, siempre de frente intelectualmente. Decimos esto e insistimos tanto porque estamos fundando *la base única, absoluta, del edificio geométrico* que pensamos erigir y que se llamará: *Harmonización tensorial.*

Este edificio surge, pues, del cálculo tensorial, reconstruído sobre la base mencionada del *número como símbolo de repetición.*

En virtud de esto es que se numeran puntos de un *continuum,* llamándolos coordenados. Naturalmente el *continuum* puede ser de *una dimensión* y puede ser de *n* dimensiones, i. e., una multiplicidad riemeniana discreta o continua.

Dimensión. — La noción de *dimensión,* entraña la existencia de *una cosa dentro de otra mayor.* Esto lo sabemos todos: un punto en una línea, plano o espacio; una línea en un plano; un plano o superficie en un espacio, etc.

Axioma fundamental. — *Dos puntos jamás pueden coincidir* y, a lo más, *en el límite* podrán llegar a *yuxtaponerse.*

¿Por qué no pueden coincidir dos puntos?

Simplemente porque *son dos puntos* y no *un punto.* Vemos, pues, una ley natural invariante expresable como sigue en forma *abstracta* y *que abarca absolutamente todo,* i. e., la *repetición* excluye la *posibilidad* de *coincidencia.*

DIGRESIÓN 0.55

Definiciones

Se ha definido el concepto *número* y el concepto de *repetición,* que excluye la posibilidad de *coincidencia.*

Ahora se dice que: *un punto* que se repite es una *propagación* lo cual entraña, *a fortiori,* los dos nuevos conceptos siguientes: *tiempo* y *espacio.*

La *propagación* se verifica de *dos maneras únicas,* siguientes:

1ª Un *movimiento,* y en este caso *el punto repite su posición en el continuum;*

2ª Una *densificación,* y en este caso es *una reproducción* del punto por efecto de *una acción* que se *repite.*

Se dejará para más adelante el estudio a fondo de cómo se «realiza» una *densificación puntual* que da por resultado una *dimensionalización* en un *continuum mayor.* Pero si decimos que cuando se *dimensionaliza* en un *continuum* y se produce una densificación puntual, los espacios *interpuntuales* se llenan de *puntos originales del continuum mayor* — y no nos preocuparemos mayormente de analizar las condiciones físicas de estos puntos, — *los llamaremos puntos;* si es que tienen otro nombre queda cambiado éste aquí. Más aún, supondremos que en virtud del *teorema de Gauss* y de la *ecuación conocida de continuidad,* el *continuum mayor,* nuestro, no cambia de *tensión* cuando aumentan *las densificaciones* en su interior.

No nos atrevemos a trascender al *continuum* mayor por temor de incurrir en la pena del hijo de Eolo, tan harmónicamente descrita por el ciego de Mileto.

ἀλλ᾽ ὅτε μὲλλοι
ἄκρον ὑπερβαλλεέιν τότ᾽ ἀποστρέψασκε κρατταιίς·
αὖτις ἔπειτα πέδονδε χυλίνδετο λᾶας ἀναιδής·

Quedemos, pues, en el llano y dediquemos nuestra atención al material a la mano que es infinito.

Cuando, pues, la gravitación densifica puntos en el *continuum* mayor en virtud de una *repetición de acción* o una *propagación de densificaciones,* supondremos que se produce una especie de *inducción normal* a través de la superficie *suprauniversal.*

Notar bien ahora que el fundamento de toda esta geometrización reside en :

La *repetición,* cuyo símbolo es el número y que excluye toda posibilidad de *coincidencia.*

La *densificación* que resulta de *la acción infinitesimal de la gravitación* sobre los puntos del *continuum* mayor. Si esta acción infinitesimal se *repite,* tendremos la:

Dimensionalización por propagación, que es exactamente : *la repetición de la densificación infinitesimal puntual.*

Como no es posible la coincidencia por efecto de la « repetición », *a fortiori,* la acción periódica de la gravitación tiene que *dimensionalizar,* densificando su traza.

Un punto para repetirse tiene que *propagarse,* ya sea por una *reproducción,* efecto de una densificación periódica, o por *un movimiento* del mismo, único punto ; *ie : una repetición de la posición espacial.* Son estas las dos únicas fases posibles de este fenómeno.

Cuando un punto guarda « reposo » lo apreciamos por *una repetición de la posición temporal,* y esto lo analizaremos oportunamente.

De esto resulta que : *una línea es una propagación puntual en una dimensión. Una superficie es una propagación puntual en dos dimensiones* y *un espacio de tres dimensiones es una propagación puntual de tres dimenciones,* etc. — κτλ.

Las correspondientes *densificaciones* son fáciles de deducir e interpretar.

Esta es la base del estudio que se ha iniciado y como el lector ve descansa sobre un principio de *cálculo harmónico :* « natural ».

Cuando la acción gravitante que densifica *es variable,* y, por lo tanto, la *densificación* lo es como consecuencia, la traza integral revela el fenómeno. Pero en el reino infinitesimal esta acción será siempre uniforme, tal como los elementos de un movimiento variado cualquiera. Nótese que la *continuidad* exige en este caso *de acción variable : una harmonía en la variación* — tan conocida en la « mecánica de composición de movimientos periódicos ». Este es el terreno, y a este terreno incumbe traer el cálculo tensorial.

CAPÍTULO CUARTO

Tensores

Resumiendo, hemos visto cómo una traslación en el espacio euclideano plano se representa por medio de sus componentes en un sistema vectorial coordenado $(Oe_1, e_2, ..., e_n)$ y cómo se pasa de un sistema a otro de representación por medio de transformaciones lineales que no afectan al vector X.

Formulamos la transformación afín y en seguida las relaciones métricas basadas sobre el producto escalar o proyección. De ésto salió la forma cuadrática fundamental como expresión de la distancia entre dos puntos.

Definimos un sistema normal cartesiano coordenado y hallamos las condiciones de ortogonalidad para transformaciones lineales.

Indicamos que toda forma cuadrática puede reducirse a la expresión:

$$Q(x) = \sum_{i}^{n} \varepsilon_i x_i^2 \qquad \varepsilon_i = \pm 1$$

y así caracterizamos al espacio por medio de los índices de inercia, esto es: el número de vectores normales positivos y el número de negativos. Fué basándose en este teorema que Minkowsky dividió al universo en espacio y tiempo.

La condición de forma lineal independiente encierra, naturalmente, la imposibilidad de hallar un sistema de valores que anule las n ecuaciones:

$$\xi_i' = \sum_{k}^{n} \alpha_i^k \xi_k$$

lo cual exige que

$$|\alpha_i^k| \neq 0.$$

También vemos que una forma bilineal es: lineal en X y lineal en Y. Es homogenea, o sea si $X = 0$ será $Y = 0$. Pero será $X = 0$ si se tiene

$$\xi_i = 0 \qquad i = 1, 2, ..., n$$

o será $Y = 0$ si

$$\eta_i = 0 \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Consideremos ahora la forma bilineal concomitante :

$$\sum_{i=1}^{n} \xi^i \eta_i$$

en un sistema vectorial coordenado $(Oe_1, e_2, ..., e_n)$ y sometamos a la misma a dos transformaciones recíprocas, como sigue :

$$\xi^i = \sum_k^n \alpha_k{}^i \bar{\xi}^k; \qquad \eta_i = \sum_k^n \bar{\alpha}_i{}^k \bar{\eta}_k$$

$$|\alpha_k{}^i| \neq 0 \qquad \text{y} \qquad |\bar{\alpha}_i{}^k| \neq 0$$

sabemos de las determinantes que estas transformaciones dejan inalterada a la ecuación, quiere decir que

$$\sum_i^n \xi^i \eta_i = \sum_i^n \bar{\xi}^i \bar{\eta}_i = \sum_i^n \bar{\bar{\xi}}^i \bar{\bar{\eta}}_i = \text{etc.}$$

en que los (ξ^i) se transforman por lineales que son recíprocas de las que transforman a (η_i), y en particular, las últimas son idénticas a las que transforman a los vectores básicos (e_i). Diremos, pues, que los (ξ^i) son, relativamente a los (e_i), contragredientes y los (η_i) cogredientes; y diremos que la traslación, cuyas componentes son los (ξ^i), es un vector contravariante, mientras que la de componentes (η_i) es covariante.

La condición de invariación de la bilineal unitaria

$$\sum_i^n \xi^i \eta_i$$

se halla en seguida, pues substituyendo tendremos

$$\sum_{i,k}^n \alpha_k{}^i \cdot \bar{\alpha}_i{}^k \bar{\xi}^k \bar{\eta}_k,$$

eligiendo el término r tendremos

$$\sum_r \alpha_r{}^i \bar{\alpha}_k{}^r \bar{\xi}^r \bar{\eta}_r$$

y la invariación exige :

$$\sum_r \alpha_r{}^i \bar{\alpha}_k{}^r = \delta_k{}^i = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k. \end{cases}$$

Fácilmente se deduce que si :

$$\sum_i^n \xi^i \eta_i = \sum_i^n \bar{\xi}^i \bar{\eta}_i, \qquad \xi^i = \sum_k^n \alpha_k{}^i \bar{\xi}^k, \qquad \eta_i = \sum_k^n \bar{\alpha}_i{}^k \bar{\eta}_k,$$

se tiene:

$$\sum_i^n \eta_i \sum_k^n \alpha_k{}^i \bar{\xi}^k = \sum_i^n \bar{\xi}^i \bar{\eta}_i,$$

o por simetría:

$$\sum_k^n \eta_k \sum_i^n \alpha_i{}^k \bar{\xi}^i = \sum_i^n \bar{\xi}^i \bar{\eta}_i,$$

de donde:

$$\left(\sum_k^n \alpha_i{}^k \eta_k\right) \bar{\xi}^i = \bar{\xi}^i \bar{\eta}_i$$

$$\bar{\eta}_i = \sum_k^n \alpha_i{}^k \eta_k,$$

y análogamente

$$\bar{\xi}^i = \sum_k^n \alpha_k{}^i \xi^k$$

que nos dan como condición de invariación

$$\sum_r \bar{\alpha}_i{}^r \alpha_r{}^k = \delta_i{}^k = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k. \end{cases}$$

Deducimos, pues, que *sólo existe una transformación contragrediente* que deja inalterada a la forma bilineal y que sólo existe una transformación contragrediente para una forma lineal, etc., todo lo cual sabíamos del estudio de determinantes en general.

Vemos que una transformación ortogonal es a la vez su propia contragrediente, o recíproca.

Ya hemos hecho notar que la invariación del vector X, o traslación, estriba precisamente en la contragrediencia que existe entre *componentes* y *vectores coordenados*, por ejemplo:

$$X = \sum_i^n \xi^i e_i, \qquad \bar{e}_i = \sum_k^n \alpha_i{}^k e_k, \qquad \xi^i = \sum_k^n \alpha_k{}^i \bar{\xi}^k,$$

$$X = \sum_i^n \xi^i e_i = \sum_i^n \bar{\xi}^i \bar{e}_i = \text{etc.},$$

en que $\bar{e}_i$ y ξ^i se transforman de igual manera, etc. Decimos, pues, que las componentes (ξ^i) de X *son de un vector* contravariante, etc., como ya hemos mencionado. También diremos que *una traslación,* en virtud de este hecho, es *un vector contravariante en el espacio afín* plano euclideano, y esta es una característica del espacio afín, en el cual

toda traslación es *un vector contravariante* cuyos componentes se transforman en forma contragrediente relativamente a los vectores básicos coordenados.

Espacio métrico. — En este espacio las componentes de una traslación X *son las proyecciones de la misma sobre los vectores coordenados unitarios,* i. e. :

$$\xi_i = (X \,.\, e_i)$$

desde ya vemos que los ξ_i se transforman como los e_i; diremos en consecuencia que los $(\bar{\xi}_i)$ son componentes covariantes de un vector X, o traslación, y que se transforman en forma cogrediente a los (e_i). De ahí que si :

$$\bar{e}_i = \sum_k^n \alpha_i{}^k e_k, \qquad X = \sum_i^n \xi^i e_i = \sum_k^n \xi^k e_k,$$

fácilmente :

$$\bar{\xi}_i = \sum_k^n \alpha_i{}^k \xi_k$$

$$\bar{\xi}_i = \left(\sum_k^n \xi^k e_i \,.\, e_k\right) = \sum_k^n (e_i e_k)\, \xi^k = \sum_k^n g_{ik} \xi^k$$

$$g_{ik} = (e_i e_k) = Q\,(e_i e_k),$$

y si

$$g^{ik} = \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dg_{ik}}, \qquad \Delta = |\, g_{ik} \,|,$$

tenemos

$$\xi^i = \sum_k^n g^{ik} \bar{\xi}_k$$

en un sistema normal

$$g_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

$$\xi^i = \xi_i.$$

De donde inferimos que en un sistema normal no existe diferencia entre « componentes contravariantes y componentes covariantes » de un vector. Evidentemente, en *un espacio afín,* como sólo son posibles las componentes contravariantes de una traslación, no tiene sentido hablar de componentes covariantes, etc. Es que *en un espacio afín los vectores mismos son : covariantes o contravariantes,* y de esto depende la forma en que se transforman sus componentes relativamen-

te a los vectores básicos, mientras que en *un espacio métrico son las componentes de un mismo vector las que pueden ser covariantes o contravariantes,* según se transforman directa o recíprocamente, respectivamente, etc. En virtud de estas distinciones es siempre posible saber si una forma lineal se refiere a un espacio afín o a un campo métrico.

Hemos hecho notar que una traslación tiene un valor independiente del sistema vectorial coordenado en que se expresa. Así como tenemos formas que involucran una traslación podemos tenerlas de dos o más traslaciones, i. e., multilineales. Cada traslación siendo invariante relativamente a transformaciones lineales y cada traslación pudiendo ser expresada por medio de componentes covariantes o contravariantes, relativamente a los vectores básicos, en un espacio métrico.

Sea la homogénea

$$A(XYZ) = \sum_{i,k,l=1}^{n} \alpha_l^{ik} \xi_i \eta_k \zeta_l$$

en que A (XYZ) es una función lineal de tres traslaciones que, en el sistema coordenado adoptado, dos son representadas por sus componentes covariantes y la otra por sus componentes contravariantes. Si transformamos coordenadas tendremos

$$A(XYZ) = \sum_{i,k,l=1}^{n} \alpha_l^{ik} \xi_i \eta_k \zeta_l = \sum_{i,k,l=1}^{n} \bar{\alpha}_l^{ik} \bar{\xi}_i \bar{\eta}_k \bar{\zeta}_l ;$$

los α_l^{ik} son los coeficientes de la forma trilineal y, como se ve, se han escrito los índices en una forma convencional: opuesta a la posición que ocupan los de las variables correspondientes, para significar contragrediencia. Esta forma trilineal invariante se llama *un tensor,* siendo los coeficientes (α_l^{ik}): los componentes del tensor, son contravariantes en i, k y covariantes en l. Es un tensor en un espacio métrico, por las razones ya enunciadas.

Hemos llegado de esta manera al concepto de « tensor ». Nos apercibimos que se trata de una forma *multilineal invariante* que llena todas las condiciones ya enumeradas, que caracterizan a las formas lineales no degeneradas. Deducimos que un tensor es una forma multilineal que posee un valor *independiente del sistema de representación* y que se compone de tal manera que si se tiene:

$$\sum_{mnp} a_p^{mn} \xi_p \eta_m \zeta_n \qquad \text{y} \qquad \sum_{mnp} \bar{a}_p^{mn} \bar{\xi}_p \bar{\eta}_m \bar{\zeta}_n$$

en dos sistemas coordenados vectoriales, éstas se transforman una en

otra, cuando a (η, ξ) aplicamos transformaciones cogredientemente y a (ξ) contragredientemente a los vectores básicos.

Generalmente se atribuye el descubrimiento de las funciones « invariantes » al matemático inglés Boole, quien las dió a conocer en un artículo publicado en la *Cambridge Mathematical Journal*, de noviembre de 1841. Cayley y Sylvester en seguida, contemporáneamente, desarrollaron la teoría de las mismas, etc. Pero es preciso recordar que Gauss, en ese mismo tiempo, distinguía entre *medidas interiores* y *exteriores,* relativas a la geometría de superficies curvas, revelando posesión del principio de invariación y llegó a establecer el principio de invariación de curvatura relativamente a deformaciones continuas, etc.

Para comprender exactamente el significado de este principio no hay más que reflexionar sobre la siguiente observación: *un libro,* constituye para nosotros una realidad — desde el momento que es libro para todo sér humano que lo percibe — que tiene un significado (valor) completamente *sui generis* e *invariante.* Si lo representamos por la palabra *book* o βιβλος, etc, *en nada cambiará.* Conociendo yo su representación en *un idioma* y poseyendo un diccionario (ecuaciones de transformación) fácilmente hallaré su representación en otro idioma determinado. Es así que *una traslación* es invariante, y es así que *un tensor* es invariante. En el caso del libro nos valemos de un sistema coordenado « fonético » y las palabras *livre, book,* βιβλος, etc., son simples representaciones en diferentes sistemas coordenados. Si vamos a mayor profundidad, nos apercibimos que todo descansa sobre un número determinado de « sonidos simples » desprovistos de significado, en el sentido absoluto, que resultan de *una deformación continua* pulmonar vocal, efecto de *una percepción visual,* y que tiene la virtud de producir *una percepción auricular,* que establece *la reversibilidad del proceso cerebral,* por densificación de traza entre dos aferencias y una eferencia común. Es desde esta base fundamental que debemos partir para el estudio de los fenómenos.

Muy pronto comprendemos el « dilema riemeniano » que está encerrado en la pregunta : ¿ en virtud de qué acción, o causa, es que nacen *las dimensiones determinadas* en un *continuum* de *d* dimensiones? Una multiplicidad continua es algo desprovisto de sentido, ¿ qué es, pues, lo que la convierte en « discreta » ? La causa es *una acción extraña* — lo comprendemos claramente en el caso del *libro,* que matemáticamente expresado no es más que *una densificación fonética ordenada de varios sonidos simples elementales.* La « densificación » que

produce «la dimensionalización» en el *continuum* einsteniano es *la traza de la gravitación :* materialización.

Analizando una «densificación estática» hasta el límite posible de sencillez, vemos que en último grado depende : *de la distancia entre dos puntos materiales o de energía.* Depende del campo métrico. Más adelante el lector comprenderá intuitivamente la maravillosa armonía que preside la teoría einsteniana que hace depender todos los fenómenos de nuestro mundo de las variaciones de un «tensor métrico de segundo orden fundamental».

Dejando esta digresión y volviendo al *tensor,* repetimos que : los coeficientes (a_l^{mn}) de la forma trilineal son *los componentes del tensor de tercer orden doblemente contravariante* y *simplemente covariante.* Los índices colocados en alto indicarán siempre contravariación y los subíndices covariación relativamente a los vectores básicos unitarios fundamentales (e_i). Seguimos el método de Weyl.

Supongamos una traslación X representada por :

$$X = a^1\xi_1 + a^2\xi_2 + \ldots + a^h\xi_h + \ldots$$

en un sistema cualquiera de coordenadas vectoriales (los a_i son en este caso componentes contravariantes de un tensor de primer orden). Diremos, pues, que *una traslación es un tensor de primer orden o un vector contravariante;* aquí damos un significado más lato a la palabra *vector.* Traslaciones son *vectores contravariantes* o *tensores de primer orden.* Esta definición se refiere exclusivamente, como se ve, a un espacio euclideano afín. En un espacio métrico las traslaciones pueden tener componentes $\left\{\begin{matrix}\text{covariantes}\\ \text{contravariantes}\end{matrix}\right\}$.

Siendo una velocidad el producto de un desplazamiento por un factor temporal $\left(\frac{1}{dt}\right)$, deducimos que *: una velocidad es un vector contravariante,* o sea un tensor de primer orden.

La mecánica moderna mide una fuerza por el trabajo que efectúa. Llamemos (p_i) los componentes según los vectores básicos (e_i) de una fuerza, i. e., los trabajos virtuales ejecutados por desplazamiento del punto de aplicación a lo largo de (e_i); el trabajo que corresponde a un desplazamiento arbitrario X será evidentemente :

$$P = \xi^1 p_1 + \xi^2 p_2 + \ldots + \xi^n p_n = \sum_i^n \xi^i p_i.$$

Si transformamos coordenadas se ve que :

$$P = \sum_i^n \xi^i p_i = \sum_i^n \bar{\xi}^i \bar{p}_i = \textit{invariante.}$$

de donde : *la fuerza es un vector covariante.* Evidentemente los (p_i) se transforman en forma cogrediente relativamente a los (e_i).

Dos tensores de componentes a^i, b_i respectivamente, que se transforman por recíprocas dan una

$$\sum_i^n a^i b_i$$

que *es invariante* como sabemos. Tenemos, así, un ejemplo de una operación invariante tensorial.

Un número o una magnitud escalar es un tensor de orden cero.

El tensor unitario de segundo orden es :

$$\sum_i^n \xi^i \eta_i,$$

podemos suponer a este tensor de segundo orden con componentes

$$\delta_i^k = \begin{Bmatrix} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{Bmatrix}$$

como vimos.

Cuando un tensor tiene componentes con índices elevados e índices bajos diremos que es *mixto.* En los demás casos será un tensor contravariante o covariante de n orden, etc.

La simetría de un tensor implica su inalterabilidad por intercambio de componentes variables : ξ por η, ξ por ζ, etc. Será levo-simétrico si este cambio produce cambio de signo y *esta propiedad, sabemos analíticamente, que no es alterada por transformaciones lineales de una misma clase,* quiere decir que la simetría y levo-simetría son propias de tensores *no mixtos* del segundo orden arriba.

En estos tenemos :

$$\alpha_{ik} = -\alpha_{ki}, \text{ etc.}$$

La estructura métrica del espacio euclideano se caracteriza por la invariación del número que representa el producto escalar de dos desplazamientos X, Y respectivamente ; así : suponiendo *siempre unitarios básicos* los (e_i)

$$\left.\begin{aligned} X &= \sum_i^n \xi^i e_i \\ Y &= \sum_k^n \eta^k e_k \end{aligned}\right\} (X \,.\, Y) = \sum_{ik}^n g_{ik} \xi^i \eta^k$$

en que

$$g_{ik} = Q(e_i e_k) = (e^i e_k)$$

$$(XY) = \sum_{ik}^{n} g_{ik}\xi^i \eta^k \qquad g_{ik} = g_{ki}$$

es el tensor métrico fundamental que caracteriza al espacio plano. Es *de segundo orden y simétrico.*

Como en un espacio métrico tenemos

$$\xi^i = \sum_k^n g^{ik}\xi_k \qquad\qquad g_{ik}g^{ik} = 1$$

$$\xi_i = \sum_k^n g_{ik}\xi^k$$

vemos inmediatamente que:

$$g_{ik}\xi^i\eta^k = g_{ik}\xi^i \cdot g^{ik}\eta_i = \xi^i\eta_i$$

fácilmente, pues en *un espacio métrico*

$$\sum_{ik}^{n} g_{ik}\xi^i\eta^k = \sum_{ik}^{n} g^{ik}\xi_i\eta_k = \sum_i^n \xi^i\eta_i = \sum_k^n \xi^k\eta_k.$$

El lector recordará que toda transformación lineal puede interpretarse como una correspondencia afín. La correspondencia se establece por medio de una matriz A, por ejemplo, de componentes (a_i^k). En este orden de ideas vimos que a:

x corresponde un vector x';
$x + y$ corresponde un vector $x' + y'$;
mx corresponde un vector mx'.

Si

$$X = \sum_i^n \xi^i e_i, \qquad X' = \sum_i^n \xi^i e_i', \qquad e_i' = \sum_k^n \alpha_i^k e_k,$$

esto es si e_i y e_i' definen la correspondencia, deducimos:

$$X' = \sum_i^n \xi^i e_i' = \sum_i^n \xi^i \sum_k^n \alpha_i^k e_k = \sum_{ik}^n \alpha_i^k \xi^i e_k$$

pero como sabemos que:

$$\sum \xi^i e_i = \sum \xi'^i e_i' = X$$

será:

$$\sum_{ik}^n \alpha_i^k \xi^i e_k = \sum_{ik}^n \bar{\alpha}_i^k \bar{\xi}^i \bar{e}_k$$

si substituímos por (e_k) un vector de componentes cogredientes con (e_i), i. e., un vector covariante de componentes (η_i), tendremos manifiestamente:

$$\sum_{ik}^{n} \alpha_i{}^k \xi^i \eta_k = \sum_{ik}^{n} \bar{\alpha}_i{}^k \bar{\xi}^i \bar{\eta}_k,$$

que es un tensor mixto de segundo orden, contravariante en X y covariante en Y. El lector ya está familiarizado con el método de substituciones de magnitudes covariantes, etc., en el estudio de determinantes.

Un tensor, pues, puede definirse diciendo que es *una función multilineal* que *toma valores independientes* del sistema de representación cuando substituímos las *variables cogredientes* por *componentes covariantes* de un vector y las *variables contragredientes* por *componentos contravariantes* de un vector arbitrario.

En un espacio métrico podemos elevar o bajar un índice por medio de las ecuaciones:

$$\xi_i = \sum_{k}^{n} g^{ik} \xi_k \qquad g_{ik} = (e_i e_k) = g_{ki}$$

$$\xi_i = \sum_{k}^{n} g_{ik} \xi^k \qquad g_{ik} g^{ik} = 1.$$

En virtud de esto vemos que

$$\sum \alpha_i{}^k \xi^i \eta_k = \sum \alpha^{ik} \xi_i \eta_k = \sum \alpha_{ik} \xi^i \eta^k = \sum \alpha_k{}^i \xi_i \eta^k, \text{ etc.},$$

que contiene la regla de alteración de índices correspondientes

$$a_i = \sum_{m}^{n} g_{im} a^m, \qquad g_{im} = g_{mi},$$

o también:

$$a_i{}^{kl} = \sum_{m}^{n} g_{im} a^{klm} \qquad g_{im} = g_{mi}.$$

Así pues:

$$\alpha^{ik} = \sum_{\gamma} g^{i\gamma} \alpha_\gamma{}^k \qquad g_{i\gamma} = g_{\gamma i}.$$

Sobreentiéndese el signo de suma $\sum$:

$$\alpha^{ik} \xi_i \eta_k = (g^{i\gamma} \alpha_\gamma{}^k) \xi_i \eta_k = \alpha_\gamma{}^k . g^{i\gamma} \xi_i \eta_k = \alpha_\gamma{}^k \xi^\gamma \eta_k, \text{ etc.}, \qquad g_{ik} = g_{ki},$$

esto es:

$$\alpha^{ik} \xi_i \eta_k = g^{i\gamma} \alpha_\gamma{}^k . g_{i\gamma} \xi^\gamma \eta_k$$

desde que $g^{i\gamma} g_{i\gamma} = 1$, se tiene:

$$g^{i\gamma} g_{i\gamma} \alpha_\gamma{}^k \xi^\gamma \eta_k = \alpha_\gamma{}^k \xi^\gamma \eta_k.$$

CAPÍTULO QUINTO

Tensores. Ejemplos

Resulta de la consideración de las formas lineales que dos tensores de una misma especie pueden sumarse o restarse y que cualquier tensor puede ser multiplicado por un factor escalar o una constante. Dos tensores podrán multiplicarse entre sí, dando por resultado un tensor de orden igual a la suma de los órdenes de los factores, tensores.

Por último, la suma de tensores da lugar a la contracción de índices iguales.

Un tensor cuyos componentes son todos respectivamente iguales a cero, es un tensor $T = 0$, o nulo. Este tensor es de importancia como hemos de ver más adelante. En cada orden de tensores existe un tensor cero y el significado de esto aparecerá claramente cuando se lea la digresión sobre *punto*.

Si sobreentendemos siempre el signo $\sum$ de suma y completada la forma con las variables componentes de desplazamientos o vectores, podemos abreviar mucho la escritura de las operaciones tensoriales sin incurrir en peligro alguno de confusión. Así, u^i serán componentes contravariantes de un tensor de primer orden, i. e., componentes de una traslación.

Así, pues

$$\sum a_i \xi^i, \qquad \sum b_k \eta^k,$$

o respectivamente a_i, b_k, dan por multiplicación

$$a_i b_k = \gamma_{ik}$$

un tensor de segundo orden. Fácilmente tenemos :

$$a_i b_k - a_k b_i = \gamma_{ik} - \gamma_{ki} = c_{ik}$$

o empleando componentes contravariantes :

$$\gamma^{ik} - \gamma^{ki} = a^i b^k - a^k b^i = c^{ik}$$

son componentes de un tensor levo-simétrico de segundo orden. No pasando de tres dimensiones podemos, de acuerdo con el cálculo vectorial, atribuir a este tensor levo-simétrico, contravariante o cova-

riante, un significado de producto vectorial que está a la vista y no requiere por el momento mayor atención.

Supongamos que en nuestro espacio euclideano plano cada punto es representado por coordenadas x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Un punto $P = (x_i)$ y el vecino $P' = (x_i + dx_i)$. Si hacemos variar la posición de este punto P mediante una acción extraña simbolizada por un parámetro t (el tiempo, por ejemplo) obtendremos un movimiento y P describirá una trayectoria en cada punto del cual tendremos:

$$\frac{dx_i}{dt} = u^i = \text{velocidad},$$

en que u^i son componentes contravariantes de la velocidad. Si ahora m es *una escalar* que representa la materialización de un punto P tendremos como expresión del *momentum*:

$$mu^i = m\frac{dx_i}{dt}$$

por multiplicación y si P es un punto de un sistema material y G^i es la componente total del *momentum*, o cantidad de movimiento:

$$G^i = \sum_m mu^i$$

o simplemente mu^i.

Recordando principios de la mecánica clásica:

$$G^i = mu^i, \qquad \frac{dG^i}{dt} = p^i;$$

p^i = componentes contravariantes de la fuerza y vemos que siendo la fuerza un vector covariante la ecuación anterior sólo podrá referirse al espacio métrico. Los componentes covariantes tendrían la forma

$$\frac{dG_i}{dt} = p_i$$

pero nótese que para esto será necesario que tengamos G_i, lo cual es posible en un espacio métrico únicamente, puesto que en *un espacio afín la velocidad es un vector contravariante* y:

$$u = \frac{dx}{dt}; \qquad G^i = mu^i$$

en *un espacio métrico* sería pues:

$$G_i = m \,.\, u_i = m \,.\, g_{ik}u^k$$

$$u_i = g_{ik}u^k, \text{ etc.}$$

Por multiplicación tenemos:

$$a_i \,.\, b_u{}^m = c_{iu}{}^m, \qquad a_i b_{um} = c_{ium},$$

lo cual indica un juego de índices correspondientes en dos miembros de una ecuación tensorial.

Ejemplos de tensores levo-simétricos son numerosos. El momento de la cantidad de movimiento relativamente a un punto O tiene como expresión:

$$\mathrm{OP} = (\xi^i) \qquad mu^i\xi^k - mu^k\xi^i$$

bien conocida. Si suponemos que esta ecuación se suma para todos los puntos materiales m de un cuerpo o sistema tendremos

$$\mathrm{L}^{ik} = \sum_m m\,(u^i\xi^k - u^k\xi^i) = m\,(u^i\xi^k - u^k\xi^i).$$

El momento de una fuerza relativamente a un punto O será análogamente:

$$\mathrm{OP} = (\xi^i) \qquad p^i\xi^k - p^k\xi^i$$

y si esto se extiende a todos los elementos de un sistema, será:

$$q^{ik} = \sum (p^i\xi^k - p^k\xi^i).$$

Bien sabemos de la mecánica que

$$\frac{d\mathrm{L}_{ik}}{dt} = q_{ik}$$

y si no obran fuerzas, esta última ecuación tiene un significado especial

$$\frac{d\mathrm{L}_{ik}}{dt} = 0.$$

Todavía tenemos otro ejemplo de tensor levo-simétrico en la *velocidad de rotación al rededor de un punto.*

Esta velocidad se puede calcular de una manera muy conveniente y sencilla valiéndonos de transformaciones lineales infinitesimales, esto es, por medio de matrices infinitesimales. En general, si una matriz A de componentes $(\alpha_i{}^k)$ produce una rotación definida por la correspondencia:

$$\bar{e}_i = \alpha_i{}^k e_k$$

suprimiendo el $\sum$; y si sometemos el sistema a transformaciones continuas, vemos que las matrices A constituyen un grupo. En un espacio

métrico pitagórico, i. e., en que postulamos como distancia entre dos puntos una forma cuadrática, las matrices infinitesimales que son admisibles son aquellas que dejan *invariante* a la forma métrica fundamental unitaria :

$$Q(xx) = 1 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 = Q_0,$$

estas matrices producen rotaciones infinitesimales como sabemos. Quiere decir que si (ξ_i) son las componentes de un vector $\overline{OP}$ que pasa a ser $\overline{OP'}$ por una rotación infinitesimal definida por la matriz U, la variación causada debe ser del mismo orden de pequeñez que U, así, pues, podemos escribir la lineal :

$$d\xi^i = u^{ik}\xi_k,$$

pero

$$dQ_0 = 0 = 2\xi^i d\xi^i$$

y de aquí:

$$2\xi^i \,.\, (u^{ik}\xi_k) = 2\xi^i u_i\ \xi_k = 2u_i^k \xi^i \xi_k = 0,$$

esto es :

$$u_i^k \xi^i \xi_k = 0,$$

y, por lo tanto, forzosamente

$$\sum u_i^k = 0,$$

quiere decir que

$$u_{ik} = -u_{ki} \qquad \text{o} \qquad u^{ik} + u^{ki} = 0,$$

o que (u_{ik}) es levo simétrico.

El lector se apercibirá que es la misma cosa someter un sistema o cuerpo a una rotación al rededor de un punto fijo, o dejar inmóvil al cuerpo y someter al sistema coordenado a un movimiento equivalente. El desplazamiento es medido en este caso por $(d\xi^i)$ y la clase de afinidad resultante está definida por los (u_k^i). Se ve, pues, que si multiplicamos a los (u_{ik}) por $\left(\frac{1}{dt}\right)$ obtendremos la rotación por unidad paramétrica temporal, etc. Podemos escribir

$$\frac{dU}{dt} = V$$

y así resultará, cambiando letras,

$$\frac{d\xi^i}{dt} = u^i = \sum v^{ik}\xi_k,$$

o en componentes covariantes

$$u_i = \sum v_{ik}\xi^k \qquad \text{o} \qquad u_i = v_{ik}\xi^k;$$

la velocidad angular es, pues, V de componentes :

$$v_{ik} = - v_{ki}.$$

Resulta, pues, que (u_i) son los componentes de velocidad lineal de *un tensor de tercer orden* $(v_{ik}\xi^k)$ en el cual se han *sumado los índices comunes* (k). Aquí tenemos un ejemplo de contracción tensorial, que es la operación más común del cálculo tensorial. Un eje de rotación, instantáneo, quedaría definido por el lugar de los puntos para los cuales

$$\sum v^{ik}\xi_k = 0.$$

También deberá observarse, de acuerdo con los elementos del cálculo vectorial, que en la rotación infinitesimal que desplaza el punto P a P′ y ocasiona la variación de componentes $(d\xi^i)$, estas variaciones son componentes, a la vez, del desplazamiento $\overline{PP'} = dX$, como es evidente. Así, pues, que podríamos decir que la rotación produce un desplazamiento $dX = \overline{PP'}$ y dá lugar a *la correspondencia lineal* entre $\overline{PP'}$ y $\overline{OP}$ siguientes :

$$dX = U \,.\, X$$

de componentes

$$d\xi^i = u^{ik}\xi_k = u_k{}^i\xi^k$$

en que los componentes (u^{ik}) son del mismo orden que $(d\xi^i)$.

La condición *postulada* de ser el espacio métrico de *naturaleza Pitagórica encierra la condición de invariación de la forma fundamental métrica unitaria* definida por la conocida cuadrática sylvestriana — bien corresponde este nombre en homenaje al hombre de ciencia — *relativamente a transformaciones lineales.*

Si

$$u^{ik}\xi_i\xi_k = 0$$

es porque en el desarrollo de la forma para todos los valores de $i, k, = 1, 2, ..., n,$ los términos u^{ik} y u^{ki} son de signos contrarios y se destruyen. Etc.

Como ejemplo de un tensor simétrico de segundo orden podemos elegir el *momento de inercia* de un cuerpo relativamente a un punto O fijo. Aquí también tenemos que recordar que estamos operando en un espacio de *n dimensiones* con una forma cuadrática *como distancia* y que estamos en un espacio plano euclideano con un sistema

vectorial coordenado cualquiera. Si m es una escalar de masa puntual y T_{ik} la componente de momento de inercia del sistema o cuerpo relativamente a un punto O:

$$T_{ik} = m\xi^i\xi^k,$$

o si se quiere:

$$T_{ik} = \sum_m m\xi^i\xi^k.$$

Observando, de acuerdo con la mecánica clásica:

$$\frac{1}{2}m \cdot v^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2}mr^2 \cdot \omega^2$$

en que

$$T = mr^2$$

podemos decir que, substituyendo r^2 *por la forma cuadrática fundamental* conocida, tenemos:

$$\frac{1}{2}m \cdot v^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2}T \cdot \omega^2,$$

o sea: que *cuando se trata de una rotación,* T desempeña el mismo rol que *m en el caso de una traslación,* i. e., en una traslación todos los puntos de un cuerpo se mueven de la misma manera. En una rotación ω es común para todos los puntos del cuerpo, etc.

Contracción tensorial. — Repetimos lo que ya hemos observado:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

es un ejemplo de contracción; $\overline{AC}$ es la suma contracta de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

Mejor aún: si una matriz A transforma X en X′ y otra B transforma X′ en X″, existe una tercera C que transforma X en X″ directamente. Este es un principio fundamental de la teoría de grupos. Llamando $(\alpha_k{}^i)$ las componentes de A, $(\beta_k{}^i)$ las de (B) y $(\gamma_k{}^i)$ las de C, tendremos:

$$\gamma_k{}^i = \sum_r \alpha_r{}^i \cdot \beta_k{}^r,$$

en que aparecen los $(\gamma_k{}^i)$ como componentes de la contracción de un tensor de cuarto orden. Para demostrar esto, basta probar que

$$\sum c_i{}^i = \sum \bar{c}_i{}^i$$

es *una invariante.*

Sea la forma o tensor de segundo orden

$$\sum_{ik} c_k{}^i \xi^k \eta_i$$

y transformemos coordenadas de suerte que

$$\begin{cases} \xi^i = \sum_k \alpha_k{}^i \bar{\xi}^k \\ \eta_i = \sum_k \bar{\alpha}_i{}^k \bar{\eta}_k . \end{cases}$$

Resultará:

$$\sum_{ik} c_k{}^i \xi^k \eta_i = \sum_{ik} \bar{c}_k{}^i \bar{\xi}^k \bar{\eta}_i .$$

Fácilmente, pues, el coeficiente $\bar{c}_r{}^r$ será:

$$\bar{c}_r{}^r = \sum_{ik} c_k{}^i \alpha_r{}^i \bar{\alpha}_k{}^r$$

sumando con relación a r

$$\sum_r \bar{c}_r{}^r = \sum_r \sum_{ik} c_k{}^i \alpha_r{}^i \bar{\alpha}_k{}^r = \sum_{ik} c_k{}^i \sum_r \alpha_r{}^i \bar{\alpha}_k{}^r .$$

Pero aquí tenemos el caso de la *invariación* por *concomitancia* de una bilineal, ya conocida, y por lo tanto:

$$\sum_r \alpha_r{}^i \bar{\alpha}_k{}^r = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

esto es:

$$\sum_r^n \bar{c}_r{}^r = \sum_{ik}^n c_k{}^i \quad \cdot \qquad i = k$$

$$\sum_r^n \bar{c}_r{}^r = \sum_i^n c_i{}^i .$$

El lector tendrá que familiarizarse con el «juego de índices» propio del cálculo tensorial, lo cual no ofrece dificultades si se pone atención en el significado de los mismos. Es lo mismo escribir a que b si a y b varían de 1 a n, etc.

Vemos, en consecuencia, que podemos contraer los índices opuestos (contragredientes) iguales de un tensor.

Ejemplos:

$$a_{rm}{}^{klm} = \alpha_r{}^{kl}; \qquad \alpha_m{}^m = a; \qquad v^{ik} \xi_k = u^i .$$

Volvemos a decir que la contracción es la operación más común del cálculo tensorial.

$a^i a_i$ es una invariante que en un sistema normal cartesiano se convierte en una suma de cuadrados (siempre $a^i a_i = \sum a_i a^i$, etc.); de aquí que la raíz cuadrada nos dará la magnitud absoluta del tensor. Lo mismo $a^{ik} a_{ik}$ o $\sum a^{ik} a_{ik}$, etc. Ya recordará el lector que en este sistema coordenado normal:

$$\xi^i = \xi_i \qquad \text{o} \qquad g_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k. \end{cases}$$

La *invariante* formada con los a_i^i, esto es, $\sum_i a_i^i$ toma el nombre de traza de la matriz A.

Hasta ahora se habrá notado que para nada hemos hablado de las coordenadas de un punto. Toda nuestra atención ha sido concentrada *sobre traslaciones,* como magnitudes dirigidas o vectores; el punto preciso del espacio en el cual tiene lugar la traslación pasa desapercibido en un espacio euclideano plano, puesto que este espacio es igual en todas partes y en todas direcciones. En general, asociamos una magnitud escalar, tensorial, o un vector a *un punto determinado de una zona o dominio espacial,* de manera, pues, que el valor de esta escalar, tensor o vector *varía de un punto* $P = (x_i)$ *a otro* $P' = (x_i')$. Este dominio así caracterizado toma el nombre de *campo,* y será un *campo escalar, tensorial o vectorial,* según se trate de una función escalar dada para cada punto del mismo, o un tensor o un vector respectivamente.

Deducimos, en consecuencia, que los puntos del campo quedan determinados por medio de coordenadas en un sistema vectorial y que escalares, tensores y vectores son magnitudes expresadas en función de estas coordenadas. Podremos decir que: escalares, tensores y vectores son, en realidad, *funciones del lugar o punto.* Un campo es conocido cuando conocemos el valor de la escalar, el tensor o el vector para cada punto del mismo.

Conviene decir aquí que en un espacio continuo puntual *arbitrario,* el sistema de coordenadas que precisa la posición de un punto, difiere del usual conocido. Ahora nos valemos de *coordenadas numéricas o símbolos de repetición,* simples números. Esto es, elegimos un punto P y le *atribuímos n números arbitrarios* y para la enumeración de los demás puntos del espacio nos valemos de la noción del *continuum,* o sea: los puntos deben estar numerados de manera que dos puntos infinitamente cercanos tengan coordenadas que difieren respectivamente entre sí en cantidades infinitamente pequeñas del mismo orden que su distancia. Este *continuum* espacial de *n* dimensiones

debe llenar ciertas condiciones para poseer la propiedad de espacio plano euclideano afín, las cuales dejaremos por el momento. Añadiremos únicamente que si consideramos engendrado a este espacio paramétricamente las superficies gaussianas degeneran en planos, y la distancia cuadrática generalizada de Riemann, que expresa el intervalo entre dos puntos vecinos, se presenta con coeficientes constantes. En una palabra, no hay curvatura espacial (1).

Veremos, oportunamente, que un punto del *continuum* espacial tiene existencia, como percepción cerebral, en virtud de ser *una focalización de repeticiones, o propagaciones, cuyas respectivas características de densidad son los n símbolos numéricos coordenados.* También veremos que debido al fenómeno cerebral de *órdenes de magnitudes,* corresponderá definir un punto de la siguiente manera : *un punto es la traza limítrofe, u horizonte divisorio entre dos órdenes consecutivos de magnitudes.*

Nuestro universo perceptible es un *continuum* de repetición, y nuestras percepciones, siendo continuas, se inician en el *cero de existencia,* creciendo en intensidad hasta asomarse *al orden consciente finito de magnitudes,* y creciendo en intensidad hasta salir de este orden finito y entrar en el orden inmediato superior de *indeterminación* también *inconsciente,* en el sentido de una limitación. No hay, pues, geometría abstracta. *Un punto desaparece de un orden consciente de magnitudes con todas sus dimensiones a la vez, y pasa al orden inmediato inferior de magnitudes con todas sus dimensiones a la vez; pero ahora es un continuum ilimitado para el orden* sui generis *de consciencia que caracteriza ese orden inferior de magnitudes...* y así sucesivamente hasta el *cero orden de consciencia.* Sólo es imperceptible lo que *no existe,* quiere decir que 0 e ∞ son símbolos de *no existencia.* Existencia exige una dimensión temporal en *toda magnitud,* pudiendo ser esta dimensión de orden inconsciente para nosotros humanos, esto lo hemos confundido con «geometría abstracta» y tres dimensiones.

(1) Por sus conocimientos de « cálculo harmónico » y teniendo presente lo dicho sobre la naturaleza de la geometría como « repetición », el lector podrá vislumbrar ya que la solución matemática de *nuestras percepciones* reside en « los tensores ». Se comprende ahora cómo nos *ahogamos en fases* cuando pretendemos por « simple observación de un fenómeno » deducir sus « fundamentos ». El hombre en un laboratorio está empeñado en una tarea verdaderamente hercúlea. No necesitamos ir más allá del fenómeno de « mareas » para comprender esto.

DIGRESIÓN 0.556

Repetición

La *repetición.* — Este concepto es la base sobre la cual descansa todo el edificio de la geometría. *Percibimos por repetición.*

Número. — Es *el símbolo* mediante el cual expresamos *una repetición.* Cuando se dice *dos,* se quiere decir *dos unidades* exactamente iguales, absolutamente imposible de ser diferenciadas una de otra, *son idénticas.* No pudiendo distinguirlas por concepto alguno se dice *dos.* Precisamente es en *la repetición de la unidad* que nace el *dos.* Cuando *numeramos,* pues, lo hacemos, fundamentalmente, por un concepto de igualdad, y no por un concepto de *desigualdad.* Dícese que *un libro y una casa* son *dos cosas* diferentes — el concepto *dos* se refiere a *su característica común* de « cosa ». Es realmente extraordinaria *la confusión* que ha existido sobre este concepto de *número,* y el error, etc.

La *repetición* excluye la posibilidad de *coincidencia.*

Forzosamente, pues, la *repetición obliga la existencia* de *espacio y tiempo.*

Una repetición de percepciones, por nuestra conciencia o cerebro, es tiempo, lisa y llanamente. Puesto que *no hay desplazamiento espacial* o cambio de posición. Ahora puede el lector meditar sobre este punto y esta solución : *la única manera posible de concebir una repetición de percepciones sin desplazamiento espacial es mediante un movimiento harmónico o periódico. Se repite la fase.*

Yo *miro fijamente* hacia un punto y observo *una repetición de fase* cualquiera : mi cerebro concibe al *tiempo* y se *densifica el concepto* de *repetición de fases,* que llamaremos *repetición de instantes,* etc. Basta que se *repitan los instantes ;* la repetición *excluye la posibilidad de coincidencia.* Así, pues, *la repetición entraña al tiempo.*

Ahora, si *la fase no cambia* pero cambia *la posición,* diremos que : *la fase se repite en el espacio.* ¿ Qué es esto ? Simplemente la *repetición de posición ;* la exclusión de coincidencia obliga : un *espacio al lado del tiempo.*

Repetición de fases : tiempo.

Repetición de *intervalo* entre las fases : reloj.

Repetición de posición: espacio; movimiento; reproducción de *la posición;* propagación de *la posición.*

Repetición de un punto: reproducción del punto; propagación del *punto;* movimiento del punto.

Se ve claramente cómo *la repetición* es *la base fundamental.*

Si se reflexiona, siguiendo por este camino se percibirá *que todas nuestras percepciones sin excepción, se fundan en la repetición.* La física entera: sonido, luz, electricidad, calor, etc. No hay excepción. *Una invariación universal. Nuestro universo es un continuum de repetición.*

Basándose en esta *invariante fundamental* es posible arrancar el concepto de la *densificación infinitesimal,* como resultado de la *repetición de una acción infinitesimal,* o sea: la *reproducción de especie* como efecto de la *repetición de la densificación,* lo cual exige una *propagación, posible únicamente* en la forma de *acción sylvestriana* que se explicará.

Insistimos y no cansamos en repetirlo: es absolutamente imprescindible — necesario — penetrarse a fondo de la *verdad, invariante, real, absoluta* que encierra la *repetición* y de comprender sus ramificaciones *ad infinitum* en todas direcciones; y que *la esencia* de una repetición es *la exclusión absoluta de la coincidencia.*

Entonces se comprenderá cómo es que *toda acción posible* que densifica infinitesimalmente su traza en el *continuum* mayor, *no es otra cosa sino una fase de una sola única acción universal,* la *gravitación.*

Esta es la *estupenda realidad* que descubrió Einstein cuando dijo: la acción que dimensionaliza en el *continuum* de Riemann es la gravitación.

Einstein sólo se ha ocupado de la parte *relativista* del problema, la fase de *repetición de posición.* Nosotros hemos entrado a la consideración de la otra fase más fundamentalmente importante para la conciencia humana, i. e., la *densificación infinitesimal, o historia real absoluta de la gravitación.* La « realidad absoluta » excluye al relativismo; *todos,* sin excepción, *la vemos de la misma manera.* Como dijimos del doctor S. Johnson: golpeamos la piedra con el pie para asegurarnos de su existencia, densificada.

La solución del problema está en el cálculo harmónico, especialmente en su aplicación tensorial, o sea lo que se ha llamado « harmonización tensorial ».

Intuitivamente, se ve que el problema material está resuelto. Falta formular esta intuición: se trata de composición de propagaciones en una focalización.

Einstein formuló su ecuación de « gravitación » especulando sobre *una analogía* entre *electricidad* y *materia*. Se ha de ver cómo la *repetición* conduce a la explicación amplia de esta « analogía » y cómo conduce a la misma ecuación de Einstein.

Es menester recordar siempre que *una repetición es una propagación.*

CAPÍTULO SEXTO

Simetría de tensores

Esta simetría no es otra sino la que caracteriza a las formas lineales o multilineales invariantes. Se presentan sólo dos casos : simetría o levo-simetría. En el primer caso podemos cambiar las variables entre sí sin alterar el valor del tensor, y en el segundo, hay cambio de signo para cada permutación impar. La analítica por un lado, y el cálculo vectorial por otro, nos permiten clasificar los tensores levo-simétricos, covariantes aparte, como tensores lineales de 1°, 2°, ..., n° orden. Los tensores que tienen la forma conocida :

$$a_{ik} = \alpha_i \beta_k - \alpha_k \beta_i ,$$

o si trabajamos con los componentes de los desplazamientos,

$$\xi^{ik} = \xi^i \eta^k - \xi^k \eta^i = \begin{vmatrix} \xi^i \eta^i \\ \xi^k \eta^k \end{vmatrix}$$

representan *un área, una rotación,* etc. Quiere decir que siendo

$$Q(\xi) = \xi_i \xi^i = g_{ik} \xi^i \xi^k = (X \,.\, X) = X^2,$$

o sea : el cuadrado de la magnitud lineal del desplazamiento, será

$$\frac{1}{2} \xi^{ik} \,.\, \xi_{ik}$$

en que

$$\xi^{ik} = - \xi^{ki},$$

o sea

$$g_{1i} g_{2k} \xi^{12} \xi^{ik} = (g) \,.\, | \xi^{12} |^2$$

$i, k = 1, 2.$

$$\sqrt{g} \,.\, | \xi^{12} |,$$

igual al área del paralelogramo construído con los ξ. Análogamente,

$$g_{1i} g_{2k} g_{3l} \xi^{123} \xi^{ikl} = (g) \, | \xi^{123} |^2$$

si $i, k, l = 1, 2, 3$ y de aquí que será, tomando valores positivos :

$$\sqrt{g}\,|\,\xi^{123}\,|$$

igual al volumen del paralelepípedo construído con los ξ. Se ve que la determinante de los (g) es la de los coeficientes $(e_i e_k)$ de la forma métrica fundamental y se percibe su significado volumétrico.

Podemos formar tensores lineales de órdenes superiores al segundo por medio de tensores lineales de primer y segundo orden valiéndonos de las simetrías cíclicas tan conocidas. Así :

$$a_i b_k - a_k b_i = c_{ik}$$

$$a_i\, b_{mn} + a_m b_{ni} + a_n b_{im} = c_{imn},$$

y así como en la teoría de determinantes obtenemos formas covariantes substituyendo *operadores diferenciales* por coeficientes en formas invariantes, etc., aquí también procedemos de idéntica manera, como hemos de ver ahora, al tratar la diferenciación de tensores.

Dado un campo escalar cualquiera $f(x_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots n$, si ponemos

$$\varphi = f(x_i) = f(x)$$

$$d\varphi = \frac{df}{dx_1}\,dx_1 + \frac{df}{dx_2}\,dx_2 + \ \ldots\ + \frac{df}{dx_n}\,dx_n$$

$$d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i}\,dx^i$$

y si transformamos coordenadas de manera que

$$\varphi = f(x) = \bar{f}(\bar{x})$$

$$d\varphi = \sum_{e}^{n} \frac{df}{dx_i}\,dx_i = \sum_{i}^{n} \frac{d\bar{f}}{d\bar{x}_i} \cdot d\bar{x}_i$$

se revela un campo tensorial de primer orden definido por

$$\sum_{i}^{n} \frac{df}{dx_i}\,dx_i.$$

Hemos obtenido por medio de la operación vectorial conocida por *grad f* los componentes de un vector, derivados de una escalar φ. Lla-

mando, pues, ξ^i los componentes en una correspondencia lineal tenemos el tensor

$$\sum_i^n \frac{df}{dx_i} \xi^i$$

de primer orden que define un campo tensorial *obtenido de otro escalar* en una forma invariante o independiente de transformaciones lineales. Sabemos bien que los dx_i se transforman en forma contragrediente a los vectores básicos, de suerte que los $\frac{df}{dx_i}$ son componentes covariantes, etc. El lector se percatará inmediatamente del significado de los dx_i como *coordenadas* relativas de un punto P′ vecino a P y, por lo tanto, como componentes de un desplazamiento infinitesimal $\overline{PP'}$.

Obtenemos así, por diferenciación, un campo tensorial de primer orden de un campo escalar (tensorial de orden cero). La diferenciación aumenta el orden tensorial en una unidad.

Fácil es extender el método a cualquier orden tensorial eligiendo para el efecto *vectores constantes,* cuyos componentes son independientes del lugar; el tensor queda así reducido a una invariante, cuyo valor invariante varía de un punto P a otro vecino P′

$$\left(\frac{df_m{}^l}{dx_r}\right) \xi^m \eta_l (\zeta^r)$$

correspondiendo (ζ^r) a dx_r, etc.,

$$\frac{df_m{}^l}{dx_r} = f_{mr}{}^l$$

o

$$\sum_{lmr} \frac{df_m{}^l}{dx_r} \xi_l \eta^m \zeta^r = \sum_{lmr} f_{mr}{}^l \xi_l \eta^m \zeta^r, \text{ etc.,}$$

todo lo cual no necesita mayor explicación.

La diferenciación nos permite obtener de *un campo tensorial dado, otro de un orden más elevado en una unidad y por un medio que deja relacionado los dos campos en forma invariante.*

Siendo:

$$\frac{du_i}{dx_k} = u_{ik}$$

fácilmente obtenemos:

tensor lineal de segundo orden

$$\frac{du_i}{dx_k} - \frac{du_k}{dx_i} (= \text{rot.});$$

tensor simétrico de segundo orden

$$\frac{du_i}{dx_k} + \frac{du_k}{dx_i};$$

invariante escalar

$$\frac{du^i}{dx_i} = \text{divergencia} = \text{U}.$$

Obtenemos de

$$\frac{d\text{S}_i{}^k}{dx_k} = \text{S}_i'$$

los componentes de un vector.

Si

$$a_i b_k - a_k b_i = c_{ik}$$

substituyendo $\frac{d}{dx_i}$ por b_i, etc.:

$$\frac{d}{dx_k} a_i - \frac{d}{dx_i} a_k = (\text{rot.}).$$

Análogamente en

$$a_i b_{kl} + a_k b_{li} + a_l b_{ik} = c_{ikl}$$

si $\frac{d}{dx_i} = a^i$, etc.:

$$\frac{db_{kl}}{dx_i} + \frac{db_{li}}{dx_k} + \frac{db_{ik}}{dx_l}$$

es un tensor lineal de tercer orden, etc.

Por medio de la diferenciación hemos formado tensores lineales de segundo y tercer orden; uno, el de segundo orden, corresponde a la operación *rot* del cálculo vectorial, y el otro es un tensor que se anula si el de segundo orden del cual deriva es una rotación.

No hay más: el cálculo tensorial en un espacio plano euclideano queda terminado con el análisis o diferenciación.

Imposible mayor sencillez. Las formas multilineales homogéneas han atraído siempre la atención de geómetras y pronto hemos de ver de qué manera completa y admirable se aplican a la física.

Weyl da como ejemplo de puro cálculo tensorial la deducción de

las ecuaciones de Euler referentes a un sistema en rotación al rededor de un punto (pivote) fijo y libre de acción de fuerzas exteriores, sistema rígido, se entiende. Usando una notación ya clásica recordaremos que las ecuaciones de Euler son:

$$I_z = \sum m\,(x^2 + y^2); \qquad I_y = \sum m\,(x^2 + z^2); \qquad I_z = \sum m\,(y^2 + z^2)$$

$$\left.\begin{aligned} I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\,\omega_y\omega_x &= F_y x - F_x y \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\,\omega_x\omega_z &= F_x z - F_z x \\ I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\,\omega_z\omega_y &= F_z y - F_y z \end{aligned}\right\} \text{Momentos de fuerza respecto a los tres ejes de coordenadas.}$$

Si llamamos T_i^* los momentos totales de inercia respecto a los ejes coordenados y T_i los momentos componentes se ve que

$$T_3^* = T_1 + T_2; \qquad T_2^* = T_1 + T_3; \qquad T_1^* = T_2 + T_3 \begin{cases} z = 3 \\ y = 2 \\ x = 1. \end{cases}$$

Como en el caso que tratamos no obran fuerzas exteriores tenemos:

$$\text{Momentos de fuerza} = 0$$

y, por lo tanto, los primeros miembros de las ecuaciones anteriores son respectivamente iguales a cero.

Pero conocemos el momento de fuerza relativamente a un punto fijo, tensorialmente, así pues:

$$q_{ik} = \sum (p_i\xi_k - p_k\xi_i) = 0$$

y siendo:

$$L_{ik} = \sum_m m\,(u_i\xi_k - u_k\xi_i)$$

$$\frac{dL_{ik}}{dt} = q_{ik} = 0$$

que encierra las ecuaciones de la mecánica clásica. Siendo (u^i) los componentes contravariantes del vector velocidad de un punto P distante del punto O: $\overline{OP}$ de componentes (ξ^i). Los L_{ik} expresan las componentes del momento de la cantidad de movimiento respecto a O, *sumado* para todos los elementos de masa escalar m, y que siendo a distribución continua vendría dada por una integral en vez de $\sum$.

Busquemos de establecer una invariante que comprenda todo el

movimiento. Recordando que si (v^{ri}) son las componentes de la velocidad angular :

$$u^i = \sum v_r^{\,i}\xi^r = \sum v^{ir}\xi_r, \text{ etc.}$$

$$\sum_m m u_i \xi_k = \mathrm{H}_{ik} = \sum_m m\xi_k \sum_r v_{ir}\,\xi^r = \sum_m m\xi_k \sum_r v_i^{\,r}\xi_r$$

y si sobreentendemos la suma de masas tenemos :

$$\mathrm{H}_{ik} = \sum_r m v_i^{\,r}\xi_k\xi_r \qquad \text{pero} \qquad \mathrm{T}_{rk} = \sum_m m\xi_k\xi_r$$

$$\mathrm{H}_{ik} = \sum_{mr} m v_i^{\,r}\xi_k\xi_r = \sum_r v_i^{\,r} m\xi_k\xi_r = \sum_r v_i^{\,r}\mathrm{T}_{kr},$$

o sea, brevemente, sumando m y r solamente :

$$\mathrm{H}_{ik} = v_{ir}\mathrm{T}_k^{\,r}.$$

Por otra parte conviene notar para más adelante que los

$$\mathrm{H}_{ik} = \sum_m m u_i \xi_k = \sum_m m \cdot \frac{d\xi_i}{dt} \cdot \xi_k,$$

o si suprimimos el signo sobreentendido de suma de masas para todo el sistema :

$$m\,\frac{d\xi_i}{dt} \cdot \xi_k = \mathrm{H}_{ik}.$$

Como tenemos

$$\mathrm{L}_{ik} = \sum_m m\,(u_i\xi_k - u_k\xi_i)$$

podemos evidentemente poner, contrayendo :

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{L}_{ik}w^{ik} = \mathrm{H}_{ik}w^{ik} = \mathrm{H} = \text{invariante}$$

si elegimos un tensor levo-simétrico de segundo orden, constante relativamente al tiempo t :

$$w^{ik} = -\,w^{ki},$$

de aquí :

$$\frac{d\mathrm{H}}{dt} = 0.$$

La ley del movimiento está resumida en esta ecuación inalterable o independiente del sistema de representación.

Hay que observar ahora que el sistema de referencia está en el espacio y no forma parte del cuerpo, de manera que los momentos de

inercia, dependiendo de la distribución de masas, variarán con toda variación de ésta, esto es: cambiando la distribución con el tiempo, los momentos variarán con el tiempo. Podemos muy fácilmente salvar este inconveniente eligiendo un sistema de referencia fijo en el cuerpo. De esta manera los (T_{ik}) son constantes.

Ahora bien, si sobrerayamos las letras para dar a entender que se refieren a las magnitudes apreciadas en el sistema espacial (viejo sistema de referencia) y usamos las correspondientes sin distintivo para el nuevo sistema de referencia en el cuerpo, podemos escribir:

$$\frac{d\bar{w}^{ik}}{dt} = 0$$

por definición; en cambio los (w^{ik}) son funciones del tiempo. La invariante o tensor cero, nos da:

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

$H = H_{ik}w^{ik}$ en el nuevo sistema, etc. Por consiguiente:

$$\frac{dH}{dt} = w^{ik}\frac{dH_{ik}}{dt} + H_{ik}\frac{dw^{ik}}{dt} = 0$$

procedemos a determinar a $\frac{dw^{ik}}{dt}$ y también a precisar el valor de nuevas magnitudes auxiliares. Elijamos dos traslaciones o vectores *arbitrarios,* constantes (X, Y) en el cuerpo; esto es, *independientes del tiempo.* Sean $(\xi_i\eta_i)$ sus componentes covariantes (manifiestamente que estos $(\bar{\xi}_i\bar{\eta}_i)$ en el viejo sistema serán variables con el tiempo), así pues, pongamos:

$$w^{ik}\xi_i\eta_k = \bar{w}^{ik}\bar{\xi}_i\bar{\eta}_k$$

siendo

$$\frac{d\bar{w}^{ik}}{dt} = 0$$

resulta:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{d\eta_i}{dt} = 0$$

y

$$\frac{dw^{ik}}{dt}\cdot\xi_i\eta_k = \bar{w}_{ik}\left(\bar{\eta}_k\frac{d\bar{\xi}_i}{dt} + \bar{\xi}_i\frac{d\bar{\eta}_k}{dt}\right)$$

pero

$$\frac{d\bar{\xi}_i}{dt} = \bar{u}_i; \qquad \frac{d\bar{\eta}_k}{dt} = \bar{u}_k$$

$$\bar{u}_i = \bar{v}_{ir}\bar{\xi}^r; \qquad \bar{u}_k = \bar{v}_{ks}\bar{\eta}^s;$$

eligiendo a r como índice común tenemos:

$$\frac{d\bar{\xi}_i}{dt} = \bar{u}_i = \bar{v}_{ir}\bar{\xi}^r; \qquad \frac{d\bar{\eta}_k}{dt} = \bar{u}_k = \bar{v}_{kr}\bar{\eta}^r$$

y, por lo tanto:

$$\frac{dw^{ik}}{dt}\xi_i\eta_k = \bar{w}^{ik}\left(\bar{\eta}_k\bar{v}_{ir}\bar{\xi}^r + \bar{\xi}_i\bar{v}_{kr}\bar{\eta}^r\right) = \bar{w}^{ik}\left(\bar{v}_{ir}\bar{\xi}^r\bar{\eta}_k + \bar{v}_{kr}\bar{\xi}_i\bar{\eta}^r\right),$$

y como esta forma es una invariante podemos suprimir rayas, i. e.:

$$\frac{dw^{ik}}{dt}\cdot\xi_i\eta_k = \bar{w}^{ik}\left(\bar{v}_{ir}\bar{\xi}^r\bar{\eta}_k + \bar{v}_{kr}\bar{\xi}_i\bar{\eta}^r\right) = w^{ik}\left(v_{ir}\xi^r\eta_k + v_{kr}\xi_i\eta^r\right);$$

si ahora se tiene en cuenta el carácter de los H_{ik} y la arbitrariedad de los (ξ_i, η_k) podemos escribir en forma general:

$$\frac{dw^{ik}}{dt}H_{ik} = w^{ik}\left(v_i{}^rH_{rk} + v_k{}^rH_{ir}\right)$$

quiere decir que podemos tomar los números H_{ik} correspondientes a los $(\xi_i \cdot \eta_k)$, lo cual es manifiesto, si remonta el lector al significado de estas magnitudes. Resulta, pues:

$$w^{ik}\frac{dH_{ik}}{dt} + H_{ik}\frac{dw^{ik}}{dt} = 0$$

$$w^{ik}\frac{dH_{ik}}{dt} + w^{ik}\left(v_i{}^rH_{rk} + v_k{}^rH_{ir}\right) = 0$$

$$w^{ik}\left\{\frac{dH_{ik}}{dt} + v_i{}^rH_{rk} + v_k{}^rH_{ir}\right\} = 0;$$

como esta ecuación se mantiene para cualquier vector levo-simétrico de componentes w^{ik}, forzosamente será:

$$w^{ik} = 0$$

y así por levo-simetría:

$$\frac{dH_{ik}}{dt} + v_i{}^rH_{rk} + v_k{}^rH_{ir} - \frac{dH_{ki}}{dt} - v_k{}^rH_{ri} - v_i{}^rH_{kr} = 0$$

esto es:

$$\frac{dH_{ik}}{dt} - \frac{dH_{ki}}{dt} + \left\{ \begin{array}{c} v_i^r H_{rk} + v_k^r H_{ir} \\ - v_k^r H_{ri} - v_i^r H_{kr} \end{array} \right\} = 0.$$

Recordando ahora que:

$$H_{ir} = v_{is} T_r^s = v_i^s T_{rs}$$

y

$$v_k^r H_{ir} = v_k^r v_i^s T_{rs}$$

como

$$T_{rs} = T_{sr}$$

forzosamente por simetría entre i, k, como está a la vista:

$$v_k^r v_i^s T_{rs} = v_k^s v_i^r T_{sr},$$

que es lo mismo que cambiar i por k, etc. Así:

$$v_k^r H_{ir} = v_i^r H_{kr}$$

$$v_k^r v_i^s T_{rs} = v_i^r v_k^s T_{sr}$$

lo cual hace desaparecer dos de los términos del paréntesis grande y queda:

$$\frac{d}{dt}(H_{ik} - H_{ki}) = v_i^r H_{rk} - v_k^r H_{ri}.$$

Sigue pues:

$$\frac{d}{dt}(v_{ir} T_k^r - v_{kr} T_i^r) = v_i^r H_{rk} - v_k^r H_{ri} = v_i^r v_{rs} T_k^s - v_k^r v_{rs} T_i^s,$$

pero como fácilmente:

$$v_i^r v_{rs} T_k^s = v_i^r v_r^s T_{ks} = v_i^r v_r^s g_{rs} T_k^r = g_{rs} v_i^r v_r^s T_k^r$$

poniendo

$$g_{rs}\, v_i^r v_r^s = (vv)_{ir}$$

resulta:

$$v_i^r v_{rs} T_k^s = (vv)_{ir} T_k^r;$$

análogamente:

$$v_k^r v_{rs} T_i^s = v_k^r v_r^s T_{is} = v_k^r v_r^s g_{rs} T_i^r = g_{rs} v_k^r v_r^s T_i^r$$

$$g_{rs} v_k^r v_r^s = (vv)_{kr}$$

resulta:

$$v_k{}^r v_{rs} T_i{}^s = (vv)_{kr} T_i{}^r;$$

reuniendo los términos tenemos finalmente:

$$\frac{d}{dt}(v_{ir} T_k{}^r - v_{kr} T_i{}^r) = (vv)_{ir} T_k{}^r - (vv)_{kr} T_i{}^r.$$

Eligiendo ahora un sistema *normal* cartesiano con direcciones coincidentes con los principales ejes de inercia, sabemos que se tendrá:

$$g_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

$$T_{ik} = 0 \qquad \text{si} \qquad i \neq k$$

así, pues

$$r = i, \qquad r = k$$

y escribiendo

$$T_k{}^k = T_k, \text{ etc.}$$

$$\frac{d}{dt}(v_{ik} T_k{}^k - v_{ki} T_i{}^i) = (vv)_{ik} T_k{}^k - (vv)_{ki} T_i{}^i$$

$$\frac{d}{dt}(T_k + T_i)(v_{ik}) = (vv)_{ik}(T_k - T_i)$$

$$(T_i + T_k)\frac{d(v_{ik})}{dt} = (T_k - T_i)(vv)_{ik},$$

que es la ecuación diferencial del movimiento y produce la conocida elíptica en t. La ecuación es independiente de la dimensionalidad o sea, es para n dimensiones; naturalmente sólo tiene significado para 3.

Este problema resuelto sirve como ejercicio de «juego de índices», que es tan necesario en el cálculo tensorial, pero fuera de esto carece de importancia. Ahora trataremos el caso de «tensiones» en un cuerpo elástico, que es de trascendental importancia por ser origen de «los tensores» y permitir formar un concepto claro del significado de estas magnitudes. Mediante el cálculo tensorial, partiendo de una invariante integral y basándose sobre el principio de acción estacionaria de Hamilton, se pueden deducir todas las ecuaciones de la mecánica, como también las del campo electromagnético sin dejar de mencionar las del campo de gravitación, que sintetizan el triunfo mayor de Einstein.

Los textos usuales de cálculo y de mecánica consignan dos teore-

mas que son de gran importancia y aplicación en lo que sigue. Uno de estos es el teorema de Gauss u Ostrogradsky, que relaciona «la carga» contenida dentro de una superficie cerrada y la inducción normal al través de la misma, ligando una integral de volumen expresada por medio de una divergencia (como si dijéramos una dilatación) y una integral de superficie. Si B es una magnitud vectorial, dV un elemento de volumen encerrado por una superficie S, dS el elemento de superficie en un punto P, y B_n la componente de B según la normal exterior a S en P tendremos:

$$\int_v \text{div. B} \,.\, dV = \int_s B_n dS;$$

si fuera la normal interior tendríamos:

$$\int_v \text{div. B} \,.\, dV = -\int_s B_n dS.$$

En el cálculo vectorial si F_x, F_y, F_z son los componentes de una F, según los ejes del sistema normal cartesiano será:

$$\int_v \left(\frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz}\right) dV =$$

$$= \pm \int_s \{ F_x \cos(nx) + F_y \cos(ny) + F_z \cos(nz) \} \, dS$$

$$F_x \cos(nx) + F_y \cos(ny) + F_z \cos(nz) = (F)_n = F_n, \text{ etc.}$$

El otro teorema es el de Stokes, que relaciona una integral de superficie con una de línea. Lo conocemos desde el estudio de las deformaciones homogéneas y quizá el enunciado más propio del mismo es que cuando la rotación de un vector es nula, éste deriva de un potencial escalar por medio de la operación *grad*. Físicamente se interpreta este teorema diciendo que podemos substituir la rotación de un vector tomada al rededor de una curva cerrada cualquiera por la rotación del mismo, tomada al rededor de todos los paralelogramos infinitesimales en que se puede dividir el área que encierra dicha curva cerrada, *aplicada a una superficie arbitraria*. Vectorialmente, si un subíndice n significa proyección sobre la normal exterior en un punto de una superficie S y si $d\sigma$ es un elemento de curva (la curva cerrada dada), entonces siendo F un vector tendremos:

$$\int_s (\text{rot. F})_n ds = \int_\sigma (F \,.\, d\sigma),$$

si F es una fuerza, la segunda integral es *un trabajo* que, según *sea o no una diferencial total exacta,* nos da la condición de anulación de rota-

ción F. La integrabilidad del segundo miembro implica, *a fortiori*, que F deriva de una potencial escalar por la operación *grad.* Cuando no se anula la rotación nos apercibimos que la integral del desplazamiento perimetral no se anula y entonces $(\text{rot. F})_n$ mide *una magnitud de intensidad* de gran importancia en el cálculo tensorial.

Si X, Y, Z son tres componentes de vector según los ejes de un sistema normal, se tiene la ecuación conocida:

$$\int_s \left\{ \left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right) \cos(nx) + \left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}\right) \cos(ny) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right) \cos(nz) \right\} ds = \int_\sigma X dx + Y dy + Z dz.$$

Cuando

$$\frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}; \qquad \frac{dZ}{dx} = \frac{dX}{dz}; \qquad \frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}$$

resultan las conocidas condiciones de integrabilidad, etc. En general si

$$\text{rot. A} = 0 \qquad \text{A} = \text{grad. } \varphi,$$

y podríamos añadir:

$$\text{div. A} = 0, \qquad \text{A} = \text{rot. B},$$

$$\text{div. A} = \text{div. rot. B} = 0, \qquad \text{div. rot.} = 0,$$

que se resuelve por la ecuación de Poisson. Pasemos a considerar las tensiones.

TENSIONES

Un cuerpo elástico bajo el efecto de fuerzas de superficie y de volumen toma una forma de equilibrio. Esta forma es la resultante del equilibrio entre dichas fuerzas y la de *cohesión*, o sea resistencia a la deformación. Para expresar matemáticamente este estado de cosas nos valemos del cálculo tensorial, procediendo como sigue: sea J un cuerpo elástico cualquiera en equilibrio, del cual hemos separado un casco de materia dejando en descubierto una superficie Ω. Separando un casco de materia se produce naturalmente una alteración en el estado de equilibrio primitivo, por razones que están a la vista; para evitar que se produzca esta alteración será preciso que substituyamos el casco separado por una fuerza de presión sobre la superficie Ω, y *ad-*

mitir que la acción cohesiva de la materia es una acción de contacto; esto es, se ejerce entre elementos contiguos.

Llamemos T el valor de esta presión por unidad de superficie, en general. Vemos desde ya que T varía de un punto a otro de Ω por efecto de la cantidad de materia que suple, y también varía según la dirección del elemento de superficie sobre el cual actúa. Quiere decir que el valor de T depende del lugar o coordenadas del punto sobre Ω, y de $n =$ dirección de la normal *interior* del elemento de superficie en ese punto; las coordenadas nos fijan el punto sobre Ω y n nos fija la orientación superficial. Designemos con T_n en vez de T esta presión *según la normal interior de un elemento* $d\omega$ *de* Ω. Si $-n$ es la dirección opuesta a n, se ve que un disco infinitesimal de superficie $d\omega$ estaría en equilibrio si se tiene : $T_n = -T_{-n}$. Nos falta repetir que T_n, T_{-n}, etc., *representan siempre presiones por unidad de superficie.*

$$T_n = -T_{-n}.$$

Esta ecuación nos servirá para generalizar resultados obtenidos en un octante determinado del sistema normal de coordenadas cartesianas empleado.

Visto esto, adoptemos un sistema normal cartesiano (Ox_1, x_2, x_3) y en un punto cualquiera P de Ω consideremos un triedro formado por tres segmentos εa_1, εa_2, εa_3 dirigidos paralelamente a OX_1, OX_2, OX_3 respectivamente y en que el factor ε tiende hacia 0. Sean P_1, P_2, P_3 los extremos de estos tres segmentos. Llamemos P_1, P_2, P_3 la base del tetraedro formado y f su área; además, sea n la dirección de la normal interior a esta base y α_1, α_2, α_3 los cosenos directores de la misma. Resulta, pues, que las áreas de las caras del tetraedro son :

$$f; \qquad f\alpha_1 = \frac{1}{2}\varepsilon^2 a_2 a_3; \qquad f\alpha_2 = \frac{1}{2}\varepsilon^2 a_1 a_3; \qquad f\alpha_3 = \frac{1}{2}\varepsilon_3 a_1 a_2;$$

por donde vemos que el elemento de área es del orden ε^2, y el elemento de volumen es, en consecuencia, del orden ε^3. Desde ya se ve que podemos despreciar el efecto de una fuerza de volumen para formular la condición de equilibrio del tetraedro.

Sean ahora T_n, T_1, T_2, T_3 *las presiones por unidad de superficie que obran en el punto* P *sobre elementos de superficie* $d\omega$ *cuyas normales interiores se dirigen según* n, y OX_1, OX_2, OX_3 respectivamente (paralelos a los ejes coordenados). Y distingamos claramente entre el significado de T_1, T_2, T_3 y el significado de T_{n1}, T_{n2}, T_{n3} : componentes de T_n según

X_1, X_2, X_3 respectivamente. Las presiones que obran sobre las caras y base del tetraedro elemental son, pues:

$$T_n f; \qquad T_1 f \alpha_1; \qquad T_2 f \alpha_2; \qquad T_3 f \alpha_3;$$

y si hay equilibrio, manifiestamente tendremos:

$$T_n f - (T_1 f \alpha_1 + T_2 f \alpha_2 + T_3 f \alpha_3) = 0$$

$$T_n = T_1 \alpha_1 + T_2 \alpha_2 + T_3 \alpha_3 \tag{1}$$

despreciando el efecto de fuerzas de volumen, como se dijo arriba, por ser de orden superior al segundo de inf. pequeño.

La ecuación (1), en virtud del principio fundamental de ser $T_n = - T_{-n}$, es aplicable a cualquiera de los octantes trirrectangulares del sistema cartesiano adoptado. El carácter tensorial de T está a la vista, pero antes de formular su expresión matemática vamos a deducir una consecuencia de (1) de importancia. Proyectemos a (1) sobre los ejes coordenados

$$(T_n)_1 = T_{n1}; \qquad (T_n)_2 = T_{n2}; \qquad (T_n)_3 = T_{n3};$$

de aquí si ponemos:

$$(T_n)_1 = (T_1')_n; \qquad (T_n)_2 = (T_2')_n; \qquad (T_n)_3 = (T_3')_n;$$

y ahora sumamos para hallar las expresiones de los componentes de *presión total sobre* Ω, etc., vemos que:

$$\int_\Omega (T_n)_1 d\omega = \int_\Omega (T_1')_n d\omega; \qquad \int_\Omega (T_n)_2 d\omega = \int_\Omega (T_2')_n d\omega, \text{ etc.},$$

pero según el teorema de Gauss o Ostrogradsky:

$$\int_\Omega (T_n)_1 d\omega = \int_\Omega (T_1')_n d\omega = - \int_v \text{div. } T_1' \,.\, dV, \text{ etc.}$$

Así, pues, vemos, en general, que se tiene:

$$\int_\Omega T_n d\omega = - \int_v \text{div. } T' \,.\, dV,$$

o sea que la presión superficial equivale a una *fuerza de volumen,* cuya *densidad* es div. T′ (por unidad de volumen). El signo (—) en segundo miembro responde al hecho que se trata de la dirección de la normal interior n al elemento $d\omega$.

Llamemos ahora T_{i1}, T_{i2}, T_{i3} *los componentes de* T_i según los ejes coordenados y tomemos dos *traslaciones unitarias* en P de componentes (ξ^i) (η^k) respectivamente. Manifiestamente

$$T_{xy} = T(X \,.\, Y) = \sum_{ik=1}^{3} T_{ik} \,.\, \xi^i \eta^k \tag{2}$$

representa *la componente según la dirección* (η) de la presión T, por unidad de superficie, que obra sobre *un elemento cuya normal interior se dirige según* (ξ). Aquí, pues, tenemos una forma lineal que nos da *la tensión* en un punto cualquiera de Ω, y que tiene un significado independiente del sistema de coordenadas: *un tensor,* que es *la tensión.* Es de segundo orden y demostraremos que es simétrico o que

$$T_{ik} = T_{ki}.$$

La ecuación (2) representa *un campo tensorial simétrico de segundo orden.* Si en vez de dos traslaciones unitarias, (ξ) (η), tomáramos una sola (ξ) *arbitraria,* el campo se expresaría en la forma (de acuerdo con lo explicado ya) siguiente:

$$\frac{\sum_{ik} T_{ik}\xi^i\xi^k}{\sum_{ik} g_{ik}\xi^i\xi^k}.$$

Simetría de T. — Formemos el vector T_1' con *las componentes* T_{1i}, T_{2i}, T_{3i}. Ahora bien, si T_n es la presión que obra por unidad de superficie sobre un elemento cuya normal interior es n, tendremos como ya se ha visto:

$$(T_n)_1 = (T_1')_n \qquad (T_n)_2 = (T_2')_n, \text{ etc.}$$

de aquí que

$$\int_\Omega (T_n)_1 d\omega = \int_\Omega (T_1')_n d\omega = -\int_v \text{div.. } T_1' \,.\, dV. \tag{3}$$

Formemos el vector

$$p_i = -\frac{dT_i^k}{dx_k} = -\text{div. } T_i' \qquad i = 1, 2, 3$$

tendremos:

$$\int_\Omega (T_n)_1 d\omega = \int_v p_1 \,.\, dV,$$

o, en general:

$$\int_\Omega T_n d\omega = \int_v p dV,$$

en que la integración se aplica a toda la superficie Ω en un caso y a todo el volumen del casco de materia principal, o cuerpo, en el otro; para evitar confusión llamaremos J al volumen de este cuerpo. Tenemos, pues:

$$\int_\Omega T_n d\omega = \int_J p dV.$$

Supongamos ahora que k es la fuerza de volumen en acción en J, la primera condición de equilibrio exigiría que

$$\int_J (p + k)\, dV = 0,$$

cualquiera que fuese J, lo cual da, pues:

$$p = -k,$$

y de aquí:

$$\int_\Omega T_n d\omega = \int_J p dV = -\int_J k dV.$$

Si llamamos r el radio vector $\overline{OP}$ de un elemento de Ω en P, la ecuación de momentos será vectorialmente:

$$\int_\Omega [r \,.\, T_n]\, d\omega + \int_J [r \,.\, k]\, dV = 0$$

$$\int_\Omega [rT_n]\, d\omega = \int_J [rp]\, dV;$$

de aquí, eligiendo una componente:

$$\int_\Omega [rT_n]_1 d\omega = \int_J [rp]_1 dV = \int_J (x_2 p_3 - x_3 p_2)\, dV,$$

pero según (3)

$$\int_\Omega [rT_n]_1\, d\omega = \int_\Omega (x_2 T_3' - x_3 T_2')_n d\omega = -\int_J \text{div.}\,(x_2 T_3' - x_3 T_2')\, dV$$

por el teorema de Gauss, y recordando que

$$(T_n)_1 = (T_1')_n$$

$$-\int_J \text{div.}\,(x_2 T_3' - x_3 T_2')\, dV = \int_J (x_2 p_3 - x_3 p_2)\, dV$$

$$-\text{div.}\,(x_2 T_3' - x_3 T_2') = x_2 p_3 - x_3 p_2$$

es, pues, la segunda condición de equilibrio, que da:

$$-\{ x_2 \text{div.}\, T_3' - x_3\, \text{div.}\, T_2' + (T_3' \,.\, \text{grad}\, x_2) - (T_2' \,.\, \text{grad}\, x_3) \} = [r \,.\, p]_1.$$

Como

$$-p^i = \text{div.}\, T_i'$$

se tiene fácilmente:

$$x_2 p_3 - x_3 p_2 + (T_3')_2 - (T_2')_3 = x_2 p_3 - x_3 p_2,$$

de aquí:

$$(T_3')_2 = (T_2')_3$$

y los demás componentes siguen, pero $(T_3')_2 =$ componente de T_3' según eje Ox_2 o sea:

$$(T_3')_2 = T_{32}, \text{ etc.}$$

$$T_{12} = T_{21}; \qquad T_{23} = T_{32}; \qquad T_{13} = T_{31},$$

lo cual demuestra la simetría del tensor QED.

Hemos hallado una expresión matemática *completa* y *exacta* para representar el estado de cosas en un cuerpo elástico bajo las condiciones descritas *ab initio*. Descubrimos que un estado *de tensión* en la superficie equivale a una fuerza de volumen cuya densidad P (por unidad de volumen) se expresa en términos de un tensor simétrico de segundo orden. Valiéndonos de *componentes mixtos :*

$$-p_i = \frac{dT_i^k}{dx_k}; \qquad \frac{\sum T_{ik}\xi^i\xi^k}{\sum g_{ik}\xi^i\xi^k}.$$

Supongamos que la *presión por unidad de volumen es constante en todas direcciones :* recordando el tensor unitario métrico :

$$T_i^k = \delta_i^k p; \qquad -p_i = \frac{dp}{dx_i}.$$

Esta aplicación del cálculo tensorial es precisamente la que ha dado origen al nombre de « tensor ».

Desarrollo. —

$$\begin{aligned}\sum_{ik} T_{ik}\xi^i\xi^k &= T_{11}\xi^1\xi^1 + T_{12}\xi^1\xi^2 + T_{13}\xi^1\xi^3 \\ &\quad + T_{21}\xi^2\xi^1 + T_{22}\xi^2\xi^2 + T_{23}\xi^2\xi^3 \\ &\quad + T_{31}\xi^3\xi^1 + T_{32}\xi^3\xi^2 + T_{33}\xi^3\xi^3 \\ &= T_{11}|\xi^1|^2 + 2T_{12}\xi^1\xi^2 + T_{22}|\xi^2|^2 + 2T_{13}\xi^1\xi^3 + 2T_{23}\xi^2\xi^3 + T_{33}|\xi^3|^2.\end{aligned}$$

en que reconocemos la forma cuadrática *Pitagórica de desarrollo.*

Para n dimensiones se procede de idéntica manera : $i, k = 1, 2, ..., n$ en cada caso tendremos la componente de la tensión según una determinada dirección (k), que obra según otra dirección (i) normal a un elemento.

Si la presión es igual en toda dirección y también igual en todo punto del campo, tendremos un campo a presión constante; esto es :

$$p\delta_i^k = T_i^k = \text{constante}$$

$$p_i = 0$$

o sea :

$$\frac{dS_i^k}{dx_k} = \frac{dp}{dx_k} = 0,$$

hemos escrito S por T — lo mismo.

Resulta que los

$$T_{ik} = \text{constante.}$$

Hemos de ver que este estado de cosas caracteriza un espacio *newtoniano* o *galileano,* i. e., *un espacio libre.*

Nos percatamos, pues, que el principio de inercia está involucrado de cierta manera en esta P = *constante,* o estos T_{ik} = *constantes.* En otras palabras, siendo la inercia de un cuerpo una propiedad de su masa, o *energía densificada,* y dependiendo la masa de la densidad y volumen, habrá una interacción entre campo y materia regulada por el parámetro p; como si dijéramos matemáticamente que p distingue la clase de la conexión afín en un sistema.

Como si un cuerpo que se traslada uniformemente en línea recta *llevara consigo una parte del campo* (la parte que alcanza a afectar por sus propias virtudes) y la magnitud de esta *parte de campo* dependiera del parámetro P = T.

Deducimos claramente qué « tensores » poseen una propiedad especial, en virtud de la cual podemos expresar estados físicos con admirable precisión y generalidad. El estado de tensión en *un cuerpo material* bajo el efecto de fuerzas de volumen puede ser representado por *un tensor simétrico de segundo orden.* Este tensor nos permite conocer *en un punto cualquiera del cuerpo* el estado de tensión, sea tractiva o compresiva, que existe en una dirección arbitraria dada ; esto es, el estado *tensorial* en cada punto del cuerpo. Quiere decir que si sólo nos ocupáramos de tensiones, el tensor simétrico de segundo orden puede substituir al cuerpo que se convierte en una fracción de campo tensorial.

Podríamos, en general, decir que un tensor simétrico de segundo orden tiene la magnitud de una intensidad, y que es la variación de esta intensidad entre un punto y otro vecino que da la expresión de « densidad de fuerza », esto es :

$$\frac{dT_i^k}{dx_k} = -p_i \qquad i, k \text{ variando de 1 a } n,$$

en que p_i son las componentes covariantes de la densidad de fuerza que obra en el sistema. Una densidad de fuerza, o sea « una fuerza

volumétrica», tiene así el aspecto de una divergencia tensorial en un campo de componentes mixtas. Esto es muy importante de observar puesto que percibimos que si un tensor simétrico de segundo orden representa un estado de tensión, la variación de este tensor de un punto a otro del campo representa un estado de fuerza. Einstein observó esta propiedad y aplicó sus efectos al tensor métrico del «espacio pitagórico» riemeniano adoptado *como expresión de la distancia entre dos puntos universales :*

$$ds^2 = \sum_{ik}^{n} g_{ik} dx_i dx_k,$$

en que tomamos dos puntos vecinos, o inf. cercanos. La *variación de los g_{ik} contiene la ley de fuerza o acción en el campo de gravitación* definido por ese tensor simétrico fundamental unitario. Lo más asombroso de todo esto es que la experiencia confirma la exactitud de los resultados teóricos obtenidos así por puro análisis, y *simultáneamente esta confirmación deja establecida de una vez para todas, la veracidad del postulado métrico pitagórico que tiene la forma cuadrática, entre las infinitas que son posibles, como expresión de distancia entre dos puntos !* En un sistema normal ésta sería sencillamente para el espacio euclideano :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (\xi^i)^2 \qquad \varepsilon_i = \pm 1,$$

como vimos al tratar el teorema de Sylvester. En otras palabras, la distancia entre dos puntos en nuestro mundo cuadridimensional es *una tensión,* o posee el aspecto de tensión. De suerte que, si nuestro espacio *fuese heterogéneo,* la distancia entre dos puntos exigiría como dato complementario *la dirección* en que se mide para que tuviera sentido preciso. Todos comprendemos intuitivamente y por la evidencia de nuestros sentidos, que la materia es una «densificación de energía». Quiere decir, que un fierro, por ejemplo, que tiene la característica de «solidez» puede convertirse en un fluido con las características de un gas con simplemente *alterar el estado del campo convenientemente.* Analizando una densificación nos apercibimos que, en último grado, depende de la asociación de *puntos de energía* y que estos puntos se relacionan entre sí por *la distancia* que los separa. Entendemos por *esta distancia algo diferente* de ese concepto que fluye de la ecuación *puramente espacial* conocida, tridimensional :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

en el espacio euclideano, puesto que en nuestro universo o dominio espacial-temporal ésta sería *supuesto plano :*

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2,$$

o, en general :

$$-dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = ds^2,$$

debiendo el lector meditar profundamente sobre el hecho que *la dimensión temporal de nuestro mundo varía constantemente.* Palpamos en consecuencia, después del triunfo einsteiniano, que la distancia cuadridimensional o *espacial-temporal entre dos puntos de energía* encierra algo más que « metros y centímetros », y que aquello que encierra está contenido en los coeficientes o componentes del tensor simétrico de segundo orden métrico, g_{ik}.

Nuestras percepciones cerebrales exigen *la existencia* como base fundamental de *una magnitud;* ya se ha observado esto, y es por esto que *toda magnitud tiene que contener una dimensión temporal.* Una magnitud es una repetición. Podemos suponer la dimensión temporal como *imperceptible conscientemente* y las demás dimensiones *perceptibles conscientemente,* etc.

Pronto hemos de ver cómo estos coeficientes aplicados al caso de tres dimensiones definen las diversas geometrías sobre superficies en general y, cómo Riemann, generalizando el concepto de Gauss, descubrió que definen las diversas geometrías de los dominios espaciales curvos o amorfos, de n dimensiones. Cuando estos coeficientes son constantes tenemos un espacio plano euclideano multidimensional y cuando son variables tenemos los espacios curvos. El espacio plano de g_{ik} constantes tiene un aspecto de *campo de tensión constante en todo punto y en toda dirección : un espacio galileo-newtoniano libre* o, si se quiere, *un espacio euclideano afín.* Este campo es perfectamente homogéneo y de curvatura cero, es el espacio límite de los espacios esféricos (a curvatura constante) y es caracterizado por « traslaciones rectilíneas » como transformaciones congruentes.

Curvatura espacial y *fuerza volumétrica* son « dos maneras diferentes de expresar una misma cosa » ; uno es lenguaje geométrico y el otro lenguaje « físico ».

Es de la mayor importancia fijarse que *un tensor simétrico de segundo orden* de componentes $T_{ik} = T_{ki}$, tiene los siguientes aspectos como magnitud :

1° Contorsión material o deformación (ver textos de elasticidad) ;

2° Inercia giroscópica mecánica ;

3° Tensiones;

4° Cuadrado de una magnitud lineal o *proyección* de una magnitud lineal sobre otra: un vector sobre otro.

Mientras que los

$$H_{ik} = \gamma_{ik} - \gamma_{ki}$$

significan: *rotación, área* y *dirección.*

Un sistema material determinado por los

$$T_{ik} \quad \text{y} \quad H_{ik}$$

puede ser un sistema dotado de *rotación contorsional* si tiene partes flúidas.

DIGRESIÓN 0.56

Repetición « ad nauseam »

La *repetición* tiene en las matemáticas como símbolo, el *número.* Se ha explicado esto. Pero este importante concepto, producto mental de una acción del *continuum* mayor, contiene una invariante fundaviz: *la imposibilidad de coincidencia.*

Los dos puntos clásicos que « coinciden » destruyen el concepto básico del *dos.*

Aquí, pues, es donde se descubre el origen por *dura necesidad* de esas dos cosas: *tiempo* y *espacio.* No hay necesidad de demorar en en esto, pues está a la vista.

Cuando pretendemos remontar al más allá de *la repetición* es cuando se tropieza con el « muro chino ». Aquí recordaremos palabras de Locke: se trata de un problema que trasciende al poder intelectual humano. La verdad es que se trata de fenómenos en un *continuum mayor* que contiene al nuestro como *continuum* menor. No nos atrevemos a penetrar allí, por lo de Sófocles (aparte del castigo de Sísifo ya mencionado):

φεῦ, φεῦ· φρονεῖν ὡς δεινὸν, ἔνδα
μὴ τέλη λύει φρονοῦντι·

Es, pues, en estas *profundidades* que tiene su raíz *la geometría,* por medio del concepto *número.*

Ahora, otra invariante fundamental aparece cuando se analiza el concepto de *reproducción* al lado del de *repetición.* Vemos que no pode-

mos *reproducir un punto* de nuestro *continuum* puntual-matemático. Podemos únicamente valernos de los *puntos existentes* y, mediante «una acción», *densificarlos.* Pero *podemos reproducir una densificación ya realizada!* Entonces decimos : *reproducción* = densificación repetida = *número por densificación.*

Pero cuando el *número* pasa de dos necesariamente la *reproducción* toma el aspecto de *propagación por reproducción.* Nuestro cerebro ahora revela *un vicio,* sugiriendo la idea del número *negativo.*

Es evidente la inadmisibilidad del número negativo como símbolo de repetición y esto lo dejó establecido Riemann en otros términos, cuando procedió a formular la métrica del *continuum* espacial. Las geodésicas que arrancan de un origen deben aumentar en todas direcciones a partir desde el mismo, de suerte que aparecen con un valor mínimo en este punto. El origen del concepto *negativo* es motivo de estudio en otra digresión.

Deducimos, por lo tanto, que si una reproducción exige como fundamento, una distancia espacial-temporal, ésta debe ser independiente de sentido. Se impone, pues, la cuádrica, o la cuadrática, pitagórea, por este concepto. Ya se verá que se impone también por el concepto sylvestriano de «dimensionalización normal». Pero aplazaremos esto momentáneamente.

Ahora compararemos las siguientes expresiones, *sin atribuirles significados físicos :*

$$\begin{cases} c_x = v^1\lambda_1 + v^2\lambda_2 + v^3\lambda_3 + \ldots + v^h\lambda_h + \ldots + \ldots \\ X = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \xi^3 e_3 + \ldots + \xi^h e_h + \ldots + \ldots \end{cases}$$

¿Qué es lo que se descubre? Sigamos. Adóptese a c como *unidad básica* einsteiniana de «propagación» en nuestro *continuum* mayor, que supondremos de condiciones planas euclideanas. Así, pues, si escribimos

$$c = v\lambda$$

$$X_c = X = \sum_i^n \xi^i \lambda_i$$

tenemos convertido al vector X en un *tensor de primer orden* representante de una *propagación* X.

DIGRESIÓN 0.565

La densificación

Incumbe explicar este inmenso proceso de la naturaleza entera y del universo. La densificación es un proceso *infinitesimal,* rigurosamente, y relativamente a nuestro orden humano finito de magnitudes. Es la obra de una *acción de contacto,* i. e., *una repetición.*

Todos conocemos las tentativas de lord Kelvin y de otros eminentes físicos para poder explicar la propagación longitudinal de la luz sin molestar las teorías corrientes de Fresnel, etc., y todos recordamos la sentencia de Schuster acerca de la deficiencia de una teoría que no explica los detalles fásicos de una propagación. La repetición en la naturaleza, como principio básico invariante de todas las percepciones conscientes humanas, permite formular una teoría de propagación general que abarca « la luminosa » como caso particular.

Ya se ha notado cómo una velocidad finita en un orden de magnitud puede convertirse en infinita con sólo alterar la unidad lineal. Se aplicó esto a un ejemplo práctico de un tren en marcha. Precisamente es en este principio de « indeterminación » por discrepancia de órdenes de magnitudes que se halla encerrado el misterio de la propación longitudinal que buscaba lord Kelvin. Pronto se verá que carece de importancia, por una razón análoga a la de que, el cálculo infinitesimal puede desarrollarse sobre una base « fluxional », de la misma manera que sobre una base « diferencial ». Cuando una acción se repite, sea cualquiera la forma « material » que asume en el espacio continuo, se puede suponer que parte del foco emisor en una forma « fluxional continua » o a « golpes instantáneos », i. e., « pulsaciones diferenciales ». De ambas maneras se llega a un mismo resultado.

Se ha explicado ya lo que significa la repetición y cómo excluye *la posibilidad de coincidencia.* Esta ley es axiomática y fundamental : es la base del presente estudio. Simbolizamos a *la repetición* por medio del *número.* Este concepto ha originado en nuestros cerebros, porque la naturaleza proveyó « la materia prima », de acuerdo con el principio de Locke. *Es la repetición en la naturaleza* que produjo el *número* « humano ».

Decimos uno y nace un efecto, decimos dos y aparece otro. Pero

dos tiene que desalojar a uno pues no puede haber coincidencia y aquí aparece el fenómeno de *propagación.*

Resulta claramente que *una densificación* es *una propagación perceptible para nuestros sentidos.* Será *real absoluta* cuando es dinámica o perceptible conscientemente por nuestros órganos de tacto : percepción métrica ; y será *relativa* cuando es kinética o perceptible conscientemente por nuestros órganos visuales : percepción proyectiva. Se dice que es *real* cuando *la traza densificada de la acción en evolución tiene existencia finita* para nosotros y « relativa » en todos los demás casos. *Una piedra* como *traza densificada* es una *realidad absoluta* pero *el movimiento* de la piedra es una *realidad relativa.* Aquí se distingue el espíritu de lo anterior; manifiesto, por otra parte, intuitivamente.

Einstein ha postulado con un acierto colosal que la acción que dimensionaliza en un *continuum* mayor es la gravitación. Esta acción es de contacto y, por lo tanto, es « una propagación », *una repetición de una cosa.*

A fortiori se tiene que admitir que esta acción *penetra en el continuum desde un exterior* y que emana de un foco o, en lenguaje vulgar, de « una fábrica ». Si no se hace esto habrá que admitir « acciones espontáneas », etc., y siendo esto así, no habría razón en « los escrúpulos acerca de acción a distancia o de contacto ». Así, pues, la acción de gravitación *penetra* en un *continuum* mayor *desde el exterior* y *procede de una focalización.*

El *continuum* mayor existe diferenciado de otro superior por algún concepto. Este concepto es *uno de densificación.* Se puede concebir al *continuum mayor* como una traza densificada (más densa solamente) dentro de otra superior. Su cohesión, que es su densificación, es la característica de *la gravitación* que ha obrado; esta característica es « aquel concepto que distingue al *continuum* ».

Ahora, supóngase que *el foco* que origina la acción entra en actividad y que no hace más que *repetir una cosa de existencia tangible,* i. e., *que ocupa espacio* o lugar. Hace una, en seguida hace *dos,* etc. Dos desaloja a uno, tres obra sobre dos y éste sobre uno, cuatro sobre tres, tres sobre dos, dos sobre uno, etc.; así, uno avanza por *dura necesidad* venciendo una propiedad que es « la cohesión del *continuum* mayor », nada más. Avanza uno, impulsado por dos, y dos impulsado por tres, tres por cuatro, etc. El *processus* es uno de *realidad* y *de contacto* (o de golpe si se desea adoptar la hipótesis de la velocidad infinita en el infinito pequeño). Por acción de contacto, dentro de un or-

den de magnitud avanza *uno* hacia el *continuum* espacial. Al llegar a la superficie limítrofe de otro *continuum* se experimenta una resistencia que es « la característica cohesiva del mismo ». La acción entonces toma contacto con esta resistencia y empieza a *apilarse en su exterior,* puesto que la fábrica sigue *produciendo* o *repitiendo.*

A impulsos, « uno » se encuentra cada vez más presionado contra ese nuevo *continuum. El apilamiento crece infinitesimalmente* y aquí se tiene un fenómeno de *densificación* progresiva. Llega un momento en que *uno* penetra en el nuevo *continuum, pero no penetra el uno de la focalización, sino un uno deformado por el apilamiento de un lado y la característica del nuevo continuum del otro lado;* penetran « unos » compuestos y se inicia *la propagación* dentro del *continuum* menor, i. e., nuestro *continuum* mayor o universo.

Ahora postulamos que sólo penetran a nuestro *continuum* mayor *un cierto y determinado orden de uno* comprendiendo *un número infinito de fases dentro de este orden uno.* Así, pues, *uno* es un orden que distingue la propagación en nuestro *continuum* mayor. No hay para qué preocuparse de lo que sucede con los compuestos recíprocos, o *unos* que quedan fuera del *continuum,* y que constituye la parte *reflejada* de la acción *por apilamiento en el sentido de la propagación original;* puede sostenerse que si existe algún sér consciente *ad hoc,* en ese gran *continuum,* diría que *es el color de nuestro continuum mayor.*

En breves palabras, la acción de repetición que emana del foco generador llega a nuestro *continuum* mayor con *una velocidad* y *penetra con otra velocidad,* lo cual implica *alteración en la forma de propagación. Esto es lo fundamental.* Y esta alteración se manifiesta en una deformación por composiciones recíprocas. Pero es necesario observar que *la velocidad* a que se ha referido depende de *la acción de repetición,* esto es, lo que ya se dijo, *la repetición engendra, ipso facto, tiempo* y *espacio.* Nada podemos saber de esa velocidad en el gran *continuum* porque trasciende *nuestro orden de magnitudes, o de finito,* sólo sabemos que la acción penetra y se propaga dentro de nuestro *continuum* mayor con *otra velocidad; tampoco podemos apreciar a ésta,* puesto que *no vemos esa repetición* y es lo que hemos llamado *gravitación obscura.* Recién *nos damos cuenta de los fenómenos cuando una focalización en nuestro continuum mayor los revela,* como resultado de un apilamiento integral y *una nueva propagación compuesta eferente desde la focalización* que produce en nuestro *continuum* cerebral el fenómeno luminoso. *Esta es la propagación que podemos medir y expresar matemáticamente, como haremos con la letra c, invariante de Einstein.*

Fácil sería explicar cómo nuestro *continuum* mayor resiste la « presión de unos » que se apilan en su exterior, y no toma movimiento « con la corriente ». Con simplemente suponer al *continuum* mayor *focalizado* por entero entre una serie de focos luminosos en el gran *continuum* ya está. Las probabilidades son infinitas pues son fases.

Dígase, pues, que : *se focalizan en un punto* de nuestro *continuum* mayor *las repeticiones* de varios focos generadores del gran *continuum*. Se produce allí *un apilamiento* y *nace un astro*. La evolución de este astro está dividida en fases múltiples ; las principales invariantes son : 1ª Focalización ; 2ª Apilamiento infinitesimal progresivo ; 3ª *Repetición eferente* o gravitación luminosa creciente al *continuum* mayor con velocidad de propagación c; 4ª Máximum de apilamiento por compensaciones recíprocas entre aferencia y eferencia; 5ª Evolución descendente « estática » al compás de los focos progenitores.

Los fenómenos de temperatura son los que suceden dentro de la focalización, donde tienen lugar las composiciones tensoriales de « unos » de 1°, 2°, 3°, ..., n° orden. La materia resulta como efecto de estas composiciones. Pero la materia siempre es *repetición* y, por lo tanto, *propagación*. Quiere decirse sencillamente que la materia es un *límite recíproco* de la gravitación luminosa; es una propagación de lentitud tal que la percibimos conscientemente en forma dinámica, o sea por tacto. No percibimos visualmente, en forma consciente, a la materia por ser la propagación de un orden de magnitudes inferior al límite que corresponde a ese conducto cerebral. Distinguimos así entre percepciones proyectivas y percepciones métricas ; oportunamente se volverá sobre este punto trascendental.

Este fenómeno de focalización es uno de los más generales que se ofrece a la observación. Nuestro universo es un *continuum* de repetición, y los fenómenos se repiten en todos los órdenes de magnitudes, variando fásicamente, para nuestra conciencia, en virtud de la indeterminación que existe entre dos órdenes sucesivos de percepciones. Nuestra capital como ciudad, ofrece un espléndido ejemplo de una focalización. La aferencia se compone de todo lo que se propaga y converge hacia la misma, como foco. Sobreviene la composición, en todas las formas imaginables, en el foco, del material aferente, sigue la eferencia del producto compuesto como una exportación, esto es : la eferencia se establece en virtud de otra propagación divergente, etc., etc. El cerebro humano desempeña el mismo papel que la ciudad, como ya lo hemos señalado, y así sucesivamente hasta el *quan-*

tum atómico material. No se trata sino de una repetición *ad infinitum* del proceso: *aferencia, focalización, eferencia.*

Fácil es ver que la densificación no es más que la diferencia entre aferencia total y eferencia total, apreciada convenientemente. Esto es lo que entraña ese conocidísimo principio encerrado en la ecuación de continuidad. Pero el lector fácilmente podrá llevar adelante estas ideas por sí con simplemente aplicar su observación y razonamiento industrioso.

DIGRESIÓN 0.5655

La repetición

El momento en que se comprende *la invariación* universal del proceso de *repetición* desaparece la dificultad de *la continuidad* en el concepto matemático de dimensiones. Este concepto de continuidad que liga un punto con otro vecino ha sido siempre discutible y de difícil manejo analítico. La repetición suprime esto, por el simple hecho de ser «una propagación». Se trata, pues, de la traza densificada infinitesimalmente de un «movimiento de propagación». Pero esta propagación es más que aquel movimiento particular que asociamos con una Dalembertiana de ondas. Aquí se trata de una *emisión general o radiación* de puntos desde un foco, y esto queda bien definido en los términos del cálculo tensorial bajo la forma de

$$X = \sum_{i}^{n} \xi^i e_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

donde reconocemos el esquema invariante de *velocidad de propagación = frecuencia por longitud de onda; propagación = frecuencia por punto; propagación = frecuencia por cosa, objeto,* etc.; *propagación = velocidad de repetición por cosa producida.* Todas estas expresiones equivalen a una sola que se resume en un concepto de *densidad* de algo.

El desplazamiento X *es una repetición de puntos* y expresamos su magnitud en términos de una serie determinada de *propagaciones básicas* o *repeticiones coordenadas* de una manera convencional. Este es el fundamento.

El cálculo tensorial queda, pues, en pie sobre esta nueva base sólida y natural. Sólo hay que interpretar adecuadamente los símbolos.

¿Qué es un metro? Una repetición de decímetros, una repetición de centímetros, de milímetros, de puntos. Esto es, una propagación de elementos básicos determinados convencionalmente. Poco importa el detalle de la cosa repetida; lo que vale es la ley invariante del proceso.

Tomemos el caso de movimiento: una velocidad de un metro por segundo es *una forma* si consideramos *los decímetros* que se mueven en ese segundo; *otra forma* si consideramos *los centímetros; otra* los *milímetros,* y *¿si consideramos los puntos?* Diremos que es *una velocidad infinita puntual.* Aparece, pues, *el concepto de orden de magnitudes de una manera sencillísima,* de conformidad con nuestras percepciones.

Pasando ahora al sentido físico de esta invariante nos apercibimos de que *toda acción* es una *repetición.* Se dirá que una potencia almacenada tiene aspecto de continuidad estática que escapa al principio de repetición. Pero esto es *sólo en apariencia* puesto que *nuestra conciencia sólo puede percibir por medio de la repetición y esto demuestra la invariación aludida.* Este estado aparente estático se logra, o mantiene, gracias a *una repetición temporal de instantes* y una velocidad de propagación infinitesimal, etc., y aquí *el parámetro que gobierna el fenómeno* comunica su carácter al mismo. *Es la repetición, la demostración de la existencia de una sola acción: gravitación.*

Si, pues,

$$c = \nu\lambda$$

es el esquema invariante de una repetición, o

$$c_x = \sum_{i}^{n} \nu^i \lambda_i \qquad i = 1, 2, ..., n$$

en la forma linealizada, comprendemos que de esta forma tiene *a fortiori* que salir *toda ley* que gobierna un fenómeno perceptible por la conciencia humana. *Esto es una evidencia.*

Precisamente es esta la tesis desarrollada en esta obra en una forma muy incompleta y superficial, pero el camino queda señalado o indicado y no hay más que avanzar.

Maravilla la sencillez de la definición del problema material. Un *continuum* material no es más que *una traza densificada,* siendo *una repetición o propagación compuesta en una focalización.* El proceso es *infinitesimal* y esto es lo que caracteriza al *continuum,* precisamente esta continuidad. La materia es «mecánica» o «eléctrica» con sim-

plemente cambiar « el punto de vista ». De una manera salen las hamiltonianas de Einstein y de la otra las de Mie.

La invariación de una repetición entraña una concomitancia o reciprocidad entre los dos elementos paramétricos que gobiernan el fenómeno. De aquí deducimos que toda propagación que incide contra un *continuum* material cualquiera distinto del *continuum* mayor de la emisión, produce una doble composición. Composición recíproca : una *aferente* que penetra y se propaga en el nuevo *continuum,* y otra *eferente* que se refleja y que visualmente constituye « el color ». Si se trata de « focalizaciones » de repeticiones se tiene el astro cuya evolución pende de una aferencia de gravitación obscura y una eferencia de gravitación luminosa que percibimos con nuestros órganos visuales.

Esta *aferencia* puede formar base para una hipótesis de « eclipses » *convergentes ;* al revés de los que conocemos por eferencia y que son divergentes. Quiere decir que se puede estudiar con fundamento científico una posible relación entre la formación de manchas sobre la foto-esfera del sol por proyección de *sombras* planetarias en posiciones de *anomalías* interesantes. Podría decirse que un eclipse aferente o « eclipse estacionario » determinado producé *una variación térmica* de elementos en la foto-esfera solar sobreviniendo una composición tensorial de aspecto

$$(c_x c_y) \rightarrow 0 = \text{obscuridad},$$

con bordes a composición *recíproca* luminosa

$$(c_x c_y) \rightarrow 1$$

que explicaría la especie « facular » del fenómeno. Del estudio de los períodos de máximos y mínimos de manchas solares relacionadas con las posiciones orbitales planetarias habría de aparecer la exactitud del fenómeno de « focalización » aferente de repeticiones, lo cual nos daría por otra parte un dato acerca del período evolutivo del sol. En otra digresión trataremos detenidamente ese punto.

Si todo esto deriva de una repetición y ésta se expresa matemáticamente por medio de una invariante sencillísima :

$$c = \nu\lambda$$

$$c_x = \sum_{i}^{n} \nu^i \lambda_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \text{ etc.},$$

habría de esperarse que este esquema contuviera toda ley natural.

El cálculo tensorial harmonizado de esta manera adquiere una importancia que trasciende todo límite concebible. No hay más que considerar un cuerpo de vectores en un punto P como un cuerpo de *velocidades de propagación* (anisotropía) para descubrir en la teoría de Lie Engel, en los teoremas de Levi Civita, y de curvaturas vectoriales espaciales, etc., significados físicos importantes. *Toda la física, ni más ni menos, queda reducida de golpe a este estudio tensorial.* Por esto, es que se dice, y con razón, que el cálculo tensorial sistematizado por H. Weyl, es el cálculo del futuro — el único cálculo necesario para la comprensión de la naturaleza — y por eso se ha compendiado en esta obra. La *repetición* reduce toda acción a una sola única invariante: *la gravitación por propagación.*

RESUMEN

Fué próximamente en el año 1740-1750 que el doctor David Hartley, médico y filósofo, fundó una escuela de psicología nueva a base de «vibración». Este eminente hombre de ciencia explicó el fenómeno de «sensación» consciente como resultado de *una propagación* de vibraciones. Habiéndose adelantado a su época le correspondió la suerte consiguiente: la suerte de Riemann. Recién hoy, se puede decir, estamos en condición de abrir el libro de Hartley y poner atención en su psicología.

Es preciso notar con especial cuidado que la teoría de Hartley fué puramente «intuitiva» y, por lo tanto, no pasó de hipotética. Fueron indispensables los conocimientos matemáticos que culminaron en Riemann y, hoy día, en A. Einstein para admitir el fundamento lógico y científico de esa teoría nueva.

Quizá el verdadero punto de emergencia de esta revolución científica que precisamos fué Gauss. La invariación de la curvatura gaussiana de superficies y su método paramétrico de representaciones analíticas fueron golpes colosales de talento humano. Riemann no hizo más que generalizar este principio aplicándolo a un espacio engendrado paramétricamente por «gaussianas», pero Riemann nos dió así el *continuum* como concepto de espacio puntual, y — no hay dos maneras de ver este descubrimiento — aseguró el triunfo de las matemáticas como medio de adquirir conocimientos de filosofía natural. Einstein nos ha hecho comprender a Riemann, y esto en 1915.

La repetición en la naturaleza nos demuestra que prevalece *la pro-*

pagación como « realidad absoluta » en la conciencia humana. Todo es propagación en virtud de repetición. No se ha visto antes porque se ha vivido engañado por fases del campo métrico. Al decir campo métrico, es forzoso notar que se entiende un orden de magnitudes especial y determinado y este es el *orden perceptible consciente humano.* Nosotros, crédulos solamente de aquello que podemos percibir conscientemente, hemos vivido hasta este momento « en la apariencia de las cosas ». El sabio profesor H. Weyl describe esto magistralmente en su obra einsteiniana, y aventuró a sentar que su misma obra podía estar viciada por algún« engaño fásico ». Se ha visto que esto resulta efectivo y de acuerdo con su prevención, pues toda su geometría infinitesimal descansaba sobre un principio fásico de igualdad y traslación que constituía «una verdad a medias». Ahora la hemos fundado sobre la repetición como invariante universal y se desprende inmediatamente como consecuencia que: nuestra experiencia entera fenomenal estriba en « *continuums* de diversas características fásicas », pero todos representantes de « trazas densificadas perceptibles » de una sola cosa: repeticiones o propagaciones. La invariación descansa sobre una reciprocidad o contravariación entre dos dimensionalidades y esto nos ha permitido inducir, basándonos sobre la teoría leibnitziana diferencial, que las posibles diferencias entre pércepciones son simplemente *diferencias de propagación.* Se puede decir que esto es asombroso.

Aquí es que interviene Hartley. Queda pues demostrado matemáticamente que nuestras percepciones son el resultado de repeticiones de diversos órdenes que llegan a nuestro *continuum* cerebral por medio de mecanismos escalonados fásicamente, esto es, nuestros órganos de percepción sólo perciben una sola cosa y esa es la repetición, dividida en grupos de fases y escalonados desde gravitavitación luminosa hasta el límite recíproco de gravitación cohesiva material. Quiere decir, desde el órgano visual como límite métrico superior hasta el de « tacto » como límite inferior. Nada más.

Se desprende de esto que una piedra es un *continuum* material constituído por una *repetición determinada;* es, pues, *una propagación, cuya velocidad* C_p es infinitamente pequeña y, por lo tanto, *imperceptible* conscientemente, para nosotros seres humanos, *pero cuya* « *densidad* dimensional espacial — golpe sylvestriano — es infinitamente grande y al lado de esa velocidad, por lo tanto, es *finita para nosotros.* Quiere decir que son dos órdenes de magnitudes agrupados en una forma contravariante, i. e., invariante o concomitante. La

luz es precisamente el caso inverso de la piedra: *percibimos la propagación* pero no sentimos *la densidad sylvestriana* que es infinitamente pequeña, o de orden imperceptible conscientemente para nuestro tacto.

La situación, pues, es clara y *la pasmosa sencillez* de la *obra natural universal en evolución queda revelada nítidamente.*

Vivimos por repetición o propagación y toda nuestra fenomenología no es otra cosa que *la repetición* o, si se quiere, la propagación variada por una multiplicidad de infinitos fásicos.

La obra de densificación aparece así como una simple fase de propagación y comprendemos exactamente las razones que existen, ya explicadas, que permiten al sér humano conservar el compás de este majestuoso proceso; *nuestros sentidos gobiernan nuestra evolución* y, al decir esto, queremos señalar la importancia de percepción continua.

Nada de particular tiene ahora la afirmación, evidente, que en toda materia orgánica, sea cualquiera su naturaleza, una simetría lateral por inversión meridiana revela la harmonización de una acción *exterior a nuestro planeta;* y que toda simetría radial obedece a una acción de repetición en el *ambiente del planeta,* i. e., que guarda reposo en el planeta, etc. Estas cosas parecen axiomáticas ahora.

Cabe preguntar, ¿cómo es que se ha llegado a este concepto de la repetición como único fenómeno universal? Este ha sido el objeto especial del presente estudio y es, en realidad, el más importante.

Para explicarlo se empezó por hacer una advertencia sobre órdenes de magnitudes y se recalcó la importancia del resultado matemático que demostró existir *una determinación* en *un orden* de magnitudes como correspondencia a *una indeterminación* en *otro orden immediato superior.* Aquel que no domina la técnica matemática puede haber inferido el significado de esta correspondencia del ejemplo expuesto en esa misma advertencia, del barco que navega en el mar en condiciones planas, o del fenómeno de difracción luminosa en un monte, etc. Precisamente es en esto que reside la explicación y, comprendido a fondo esto, lo demás fluye con facilidad. El lector matemático ve inmediatamente todo esto en el simple enunciado de «linealización por reducción infinitesimal» en un *continuum* riemeniano o sea: la correspondencia de transformaciones *lineales* infinitesimales a transformaciones *generales arbitrarias.* Leibnitz nos dió este principio cuando nos enseñó que *toda curva no es otra cosa sino una repetición de elementos infinitesimales rectilíneos. Una repetición de una sola única cosa deter-*

minada, para *nosotros imperceptible conscientemente.* Aquí está todo.

Quiere decir esto que *un sér microscópico* hasta el grado de ser *infinitamente pequeño* podría marchar por cualquier curva, por tortuosa que se quiera concebir, sin darse cuenta sino de su «rectilineidad». Este sér creería firmemente que sólo existe la línea recta como trayectoria posible.

Nosotros no hemos observado que pueden *existir* dimensiones imperceptibles, conscientemente, para nuestros sentidos; no hemos palpado que una propagación puede ser *tan lenta* que nos parezca una *condición estática.* No sabíamos que una repetición estaba regida por una concomitancia y que esa condición de *infinita lentitud* correspondía con *una densificación integral finita* del orden *conscientemente perceptible de magnitudes.* Nada más que *esta omisión* es la responsable de nuestra ignorancia.

La repetición universal se expresa como sigue :

Velocidad de propagación = densidad de repeticiones en una unidad lineal de medida = *frecuencia* por *cosa producida*

$$c = \nu\lambda.$$

De hoy en adelante debemos dominar por completo la fenomenología perceptible de nuestro *continuum* mayor y *nuestro límite* o *jaula* será *el orden de magnitud que nos corresponde.*

Para terminar este breve resumen falta observar que « *continuums* materiales» son *propagaciones compuestas* en una focalización. Cuando se estudia óptica y se habla de la interferencia luminosa se pierde de vista que se está tratando de *pura cinemática.* En *una focalización astral* sobreviene *la composición tensorial* o *dinámica de las repeticiones apiladas.* Siendo *una* « la eferencia luminosa » que percibimos, comprendemos que *la materia,* por complicada que sea su estructura (grupo de elementos constitutivos de la molécula), obedece a formas matemáticas expresables por tensores del tipo (T_{ik}) y tensores del tipo (H_{ik}) *en todos los órdenes* posibles comprendidos entre el límite inferior *2, ó segundo orden* y otro superior determinado, pero desconocido ; la química revelará esto.

Cuatro propagaciones arbitrarias, invertidas, pueden combinar para producir

$$(c_x{}^1 c_y{}^2) + (c_x{}^2 c_y{}^1) = 2T_{ik}$$

cuya velocidad de propagación puede tender a *cero,* i. e., materia.

Sino :

$$(c_x{}^1 c_y{}^2) - (c_x{}^2 c_y{}^1) = H_{ik}$$

que puede tener una componente planetaria de propagación *nula* y todo el movimiento *ser de rotación;* característica de *la materia magnética.*

Estas son dos formas fundamentales básicas de composición focal de propagaciones. Son las dos únicas formas en que se obtiene una variación de *densidad de propagación compuesta resultante,* relativamente a la característica **c** invariante del *continuum* mayor.

Aquel que ha penetrado el significado de esta tesis podrá *interpretar el cálculo tensorial harmonizado* en términos de la repetición, o sea, la propagación.

Cuando se enciende una modesta vela de cera, sólo se piensa que se está alterando una forma de repetición: cambiando una propagación.

CAPÍTULO VII

Geometría infinitesimal. Cálculo tensorial

¿Quién desconoce la teoría de curvatura de Gauss? Seguramente se trata del abecedario del cálculo infinitesimal. Recordemos algunos puntos de esta teoría. El método paramétrico es especialmente importante porque nos permite establecer correspondencias matemáticas entre superficies curvas y planas.

Una curva puede concebirse analíticamente representada por la intersección de dos cilindros:

$$x = \varphi\,(yz) \qquad z = (\psi\,(xy)$$

y puede considerarse engendrada por un punto *cuyo movimiento es guiado por una causa extraña al medio* y representado por un parámetro variable s. Esto es:

$$x = x\,(s), \qquad y = y\,(s), \qquad z = z\,(s),$$

podríamos escribir x_1 por x, x_2 por y, ..., y la curva sería entonces

$$x_i = x_i\,(s) \qquad i = (1, 2, 3, ..., n).$$

Cada valor de s produce un sistema de coordenadas, o una posición del punto y el conjunto es una trayectoria en el espacio. Naturalmente, s puede llenar otras condiciones, experimentar trasformación con-

tinua, etc., sin afectar la trayectoria en sí; por ejemplo, podría ser $s =$ tiempo, etc.

Así, pues, s distingue una fase física del punto que describe la trayectoria, mientras que la representación analítica, intersección de dos cilindros, tiene carácter absoluto.

Supongamos ahora una superficie curva

$$z = \varphi(xy),$$

sería la representación matemática analítica absoluta, siendo la paramétrica:

$$X = x(wv), \qquad Y = y(wv), \qquad Z = z(wv),$$

en que w y v son dos parámetros variables.

Aquí el movimiento de generación puede concebirse guiado por dos causas o agentes exteriores. Una curva w que recorre los puntos de otra curva v, o un punto P que es intersección constante de dos curvas, w y v, que se desplazan.

Supongamos ahora que hacemos la correspondencia:

$$w = W(s) \qquad v = V(s)$$

en un plano, en el cual concebimos un sistema coordenado (w y v), obtendremos, mediante la variación del parámetro temporal s, una curva plana de expresión analítica absoluta

$$w = \varphi(v),$$

y a cada punto de esta curva corresponderá un punto sobre la superficie, así obtendremos *una curva plana* como correspondiente a *una curva sobre la superficie.* Fácil es ver cómo se puede dividir el plano por medio de una reticulación cualquiera y obtener sobre la superficie una reticulación correspondiente; un área plana tendría una área superficial curva correspondiente, etc. Y en esta forma podríamos ingeniar una geometría de la superficie por medio de una correspondencia plana.

Por ejemplo, una correspondencia paramétrica entre esfera y plano se logra de una manera muy sencilla. Sea O el centro de la esfera de radio $r = 1$; elijamos un plano tangente en el punto Z y proyectemos centralmente, desde O, sobre este plano, los puntos de la esfera: M se proyectará en P. Si (u y v) son las coordenadas planas de P y si N es la proyección normal de M sobre el plano, se tiene inmediatamente:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\frac{OZ}{ZP} = \frac{MN}{ZN}; \qquad \frac{1}{u} = \frac{z}{x}; \qquad \frac{1}{v} = \frac{z}{y}; \qquad \frac{1}{1} = \frac{z}{z};$$

o

$$u = \frac{x}{z}; \qquad v = \frac{y}{z}; \qquad 1 = \frac{z}{z};$$

y de aquí

$$u^2 + v^2 + 1 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2} = \frac{1}{z^2}; \qquad z^2 = \frac{1}{1 + u^2 + v^2}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}; \qquad y = \frac{v}{\sqrt{1 + u^2 + v^3}}; \qquad x = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}$$

que nos da la correspondencia plana buscada. Observamos que sólo nos es posible representar media esfera sobre el plano, pues, el ecuador va al infinito. Dos puntos antipodales se superponen proyectivamente.

Si ahora formáramos la expresión de un elemento ds de curva sobre la esfera, hallaríamos la correspondencia siguiente sobre el plano, que es un pequeño ejercicio de cálculo :

$$ds^2 = \frac{(1 + u^2 + v^2)(du^2 + dv^2) - (udu + vdv)^2}{(1 + u^2 + v^2)^2};$$

esta expresión es de importancia, como hemos de ver más adelante. Si en vez de las letras u y v utilizáramos x_1, x_2, o subíndices, mediante una constante a, podríamos escribir con Riemann :

$$ds^2 = \frac{(1 + a\sum x_i^2)\sum dx_i^2 - a(\sum x_i dx_i)^2}{(1 + a\sum x_i^2)^2}.$$

La constante a define aquí la curvatura de un espacio esférico, y vemos que cuando $a = 0$ tenemos el espacio plano euclideano

$$ds^2 = \sum dx_i^2.$$

Pero nos hemos adelantado.

Volvamos a la representación paramétrica de una superficie

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v),$$

supongamos ahora que tenemos sobre la superficie la conocida cuadrática :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

la correspondencia paramétrica nos dará:

$$dx = \frac{dx}{du}du + \frac{dx}{dv}dv; \qquad dy = \frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv; \quad \text{etc.}$$

$$dx^2 = \frac{dx}{du}\cdot\frac{dx}{du}\cdot du\,.\,du + \frac{dx}{du}\cdot\frac{dx}{dv}\cdot dudv + \frac{dx}{dv}\cdot\frac{dx}{du}dvdu, \text{ etc.}$$

$$= \left(\frac{dx}{du}\right)^2 du^2 + 2\frac{dx}{du}\cdot\frac{dx}{dv}dudv + \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 dv^2;$$

pongamos $(u_1 u_2)$ en vez de u, v, y además pongamos:

$$g_{ik} = \frac{dx}{du_i}\cdot\frac{dx}{du_k} + \frac{dy}{du_i}\cdot\frac{dy}{du_k} + \frac{dz}{du_i}\cdot\frac{dz}{du_k}$$

en que i y k varían de 1 a 2, resulta:

$$ds^2 = \sum_{ik=1}^{2} g_{ik}\,.\,du_i\,.\,du_k$$

en la que reconocemos *la célebre ecuación métrica, cuya importancia es trascendental.*

Se ve que, en general, los g_{ik} son funciones de u_i, $i = 1, 2$, y que estas componentes tienen aspecto de *producto escalar,* como hemos hallado antes al estudiar la forma métrica fundamental:

$$g_{ik} = (e_i e_k)$$

Ahora los coeficientes diferenciales substituyen los vectores básicos; de esto tendremos que hablar cuando estudiemos el cálculo tensorial infinitesimal.

Tenemos, pues, como correspondencia

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

sobre la superficie y

$$ds^2 = \sum_{ik}^{2} g_{ik} du_i du_k$$

sobre el plano. Únicamente en el caso de ser *la superficie un plano* será

$$ds^2 = du_1{}^2 + du_2{}^2$$

y en este caso vemos que los g_{ik} son constantes y derivan de ecuaciones lineales, i. e., la superficie es un plano.

Que podemos establecer esta correspondencia entre superficie y plano es muy fácil de demostrar. No hay más que considerar un pun-

to P de la superficie y un plano tangente en este mismo punto. Si consideramos un punto P′ vecino a P, cuyas coordenadas *relativas a* P son (dx, dy, dz) y las paramétricas correspondientes $(du_1\ du_2)$ en el plano, vemos que:

$$dx = \left(\frac{dx}{du_1}\right)_p du_1 + \left(\frac{dx}{du_2}\right)_p du_2; \qquad dy = \left(\frac{dy}{du_1}\right)_p du_1 + \left(\frac{dy}{du_2}\right)_p du_2; \text{ etc.,}$$

son tres ecuaciones lineales que expresan la correspondencia entre (dx, dy, dz) y (du_1, du_2), siendo nulas estas coordenadas en el punto P; en otras palabras, se trata de una simple correspondencia afín en un plano. Entendiendo que esta correspondencia afín plana en el plano sólo vale para el elemento infinitesimal de superficie en P, elemento común con el plano. Si con P como origen (du_1, du_2), $(\delta u_1, \delta u_2)$ respectivamente, son dos puntos infinitamente cercanos a P sobre el plano tangente, corresponderán dos desplazamientos ds y δs sobre la superficie y si θ *es el ángulo* comprendido tendremos manifiestamente:

$$\cos\theta = \frac{(ds\,.\,\delta s)}{\sqrt{(ds)\,(\delta s)}} = \frac{Q\,(d\,.\,\delta)}{\sqrt{Q\,(dd)\,Q\,(\delta\delta)}},$$

en la que

$$(ds\,.\,\delta s) = \sum_{ik}^{2} g_{ik} du_i \delta u_k.$$

La correspondencia de área sigue, pues; área paralelogramo construída sobre ds y δs es igual a:

$$\sqrt{g}\cdot\begin{vmatrix} du_1 \delta u_1 \\ du_2 \delta u_2 \end{vmatrix} \qquad g = |\,g_{ik}\,|$$

esto es, $|\,g_{ik}\,|$ es la determinante de los coeficientes de la forma fundamental. Resulta así que

$$\int \sqrt{g}\,.\,du_1 du_2$$

nos da un área determinada sobre la superficie. La *invariación* relativamente a las curvas paramétricas, de estos resultados, es muy conocida, y el significado de los cambios, *relativamente a la afinidad en el plano,* está a la vista. Repetimos que todo estriba en tomar en el plano, como expresión de la distancia entre dos puntos, la ecuación

$$ds^2 = \sum_{ik}^{2} g_{ik} du_i du_k$$

en vez de la canónica

$$ds^2 = du_1^{\,2} + du_2^{\,2}.$$

Nos olvidamos de hacer notar la simetría manifiesta de los g_{ik}, esto es:

$$g_{ik} = g_{ki}.$$

La importancia de la expresión ds de la distancia entre dos puntos sobre la superficie no puede escapar a la atención del lector. Esta función define toda la geometría de la superficie y sabemos que los coeficientes simétricos g_{ik} pueden servir para comparar las geometrías entre superficies curvas: *dos superficies cuyos g_{ik} son iguales o comunes tienen idéntica geometría,* etc. Recuérdese la representación conformal de la analítica.

Gauss fué el primero en observar que la geometría de una superficie nada tenía que ver con el espacio que la rodea, i. e., *medidas interiores se llevan a cabo sobre la superficie misma.* También notó *la invariación* de magnitudes lineales *geodésicas relativamente a deformaciones continuas de la superficie,* lo cual impedía descubrir la curvatura de la superficie. Esto es, si dibujamos figuras sobre un papel y luego encorvamos al papel arbitrariamente sin alterar su estructura (romper, etc.) será imposible *por medidas de las figuras dibujadas descubrir la curvatura del papel,* que no varía; ya lo sabemos del cálculo. Si tomamos un punto sobre una esfera y con éste como centro trazamos un círculo, una mensura del círculo y del diámetro curvilíneo nos revelará inmediatamente la curvatura. Siendo diferente la relación de circunferencia a diámetro sobre una esfera y sobre un plano, etc.

También sabemos del cálculo que en coordenadas curvilíneas generales la distancia entre dos puntos infinitamente próximos en el espacio, que en un sistema normal cartesiano tiene la forma canónica cuadrática, es:

$$ds^2 = \sum_{ik=1}^{3} g_{ik} dx_i dx_k$$

usando, por ejemplo, un sistema de tres superficies definidas por:

$$x_1 = \varphi(x, y, z) \qquad dx_1 = \text{etc.} \qquad \text{y} \qquad dx = \text{etc.}$$

$$x_2 = \psi(x, y, z) \qquad dx_2 = \text{etc.} \qquad \text{y} \qquad dy = \text{etc.}$$

$$x_3 = \chi(x, y, z) \qquad dx_3 = \text{etc.} \qquad \text{y} \qquad dz = \text{etc.}$$

resulta la expresión anterior en que

$$g_{ik} = \frac{dx}{dx_i} \cdot \frac{dx}{dx_k} + \frac{dy}{dx_i} \cdot \frac{dy}{dx_k} + \frac{dz}{dx_i} \cdot \frac{dz}{dx_k},$$

que sale de la solución recíproca $x = f_1 (x_4\, x_2\, x_3)$, etc. Las coordenadas paramétricas (x_i) son absolutamente arbitrarias. La correspondencia geométrica será euclideana, como ya lo hemos señalado, cuando los g_{ik} son constantes.

Todos recordamos cómo Gauss, valiéndose de una esfera unitaria, mide la curvatura de una superficie y como la relación de área en que se basa no es otra cosa que la expresión analítica de *una divergencia de la condición plana,* produciendo la condición plana una característica cero en la esfera de radio unitario.

Riemann continuó la obra de Gauss y remontó de las superficies al espacio.

En una palabra, Riemann *comprendió que así como una superficie de dos dimensiones en un espacio tridimensional* puede ser engendrada paramétricamente por *curvas unidimensionales,* también *un espacio tridimensional sumergido en otro de cuatro dimensiones puede ser engendrado paramétricamente por superficies bidimensionales y así* ser un espacio curvo! Engendrado el espacio por medio de *superficies paramétricas curvas* nos apercibimos que siendo cada punto del espacio el centro de un haz de superficies curvas — centro de intersección, — tendremos que tener en *cuenta la curvatuva según la dirección del elemento de superficie correspondiente* y nos vamos dando cuenta, como Riemann, que esta clase de magnitud tiene mucha semejanza con *las tensiones en un cuerpo elástico.* Esto es, *se trata de magnitudes que se expresan por medio de tensores.* En pocas palabras, Riemann descubrió que *la curvatura espacial es un tensor,* mientras que la curvatura de *una superficie es una magnitud escalar* (tensorial de orden cero). Pero el carácter *exactamente tensorial* de esta *curvatura se comprende cuando se observa que la curvatura gaussiana de una superficie es invariante relativamente a deformaciones continuas de la superficie, lo cual independiza la medida de la curvatura espacial de la selección paramétrica de superficies determinadas.* Esto es, *la curvatura espacial es un tensor* y como tal independiente, o invariante, relativamente a transformaciones continuas de coordenadas que dejan inalterada la estructura puntual del espacio, o sea que no alteran su densidad puntual. Esta condición es de gran importancia, como se verá oportunamente. Una geodésica queda determinada por su dirección.

Nos hemos adelantado un poco. Volvamos a la geometría euclideana y busquemos el punto de contacto que tiene con la geometría riemeniana.

Riemann ha partido del concepto rectilíneo infinitesimal de una

curva. Esto es, toda curva puede conceptuarse engendrada por elementos infinitesimales *rectilíneos.* Pasemos al caso de una superficie curva considerando a toda superficie compuesta de elementos infinitesimales *planos* y, por fin, a los espacios curvos compuestos de *elementos espaciales infinitesimales euclideanos o planos.* Estamos, pues, palpando el origen de la geometría infinitesimal y nos apercibimos que el paso de la geometría euclideana finita a la infinitesimal es idéntico al que dió Maxwell cuando substituyó la *acción a distancia finita* por la *acción de contacto* o *a distancia infinitamente pequeña.*

Quiere decir, pues, que Riemann aplica la geometría euclideana al infinitamente pequeño. Como la geometría euclideana está caracterizada por la forma cuadrática pitagórica, expresión de la distancia entre dos puntos, esta misma forma pasa a la geometría de Riemann para el caso de dos puntos infinitamente próximos uno de otro. Esto es, se repite la geométría euclideana en otro orden de magnitudes.

Riemann, en consecuencia, admitió un espacio que es euclideano en sus partes infinitesimales y que es posible comparar magnitudes infinitesimales independientemente de *posición y dirección.*

Esta posibilidad de comparar magnitudes independientemente de dirección y posición es una característica exclusiva del espacio riemeniano y *no es admisible en el caso general de espacios curvos, como ha indicado H. Weyl,* quien ha desarrollado la geometría infinitesimal sobre la base de que no es posible desplazar una distancia elemental sino de un punto al infinitamente próximo, o vecino. Nosotros hemos suprimido la discontinuidad infinitesimal totalmente, por medio de *la propagación,* o repetición como origen de dimensiones. Esto aparecerá más adelante, por el momento seguiremos el método clásico.

La idea de Riemann aparece claramente ahora.

Habría que remontar hasta Leibnitz para hallar el verdadero « punto de emergencia » del método infinitesimal, puesto que este sabio alemán fué quien nos indicó la manera de concebir curvas compuestas de elementos infinitesimales rectilíneos. Si el lector recuerda lo que hemos dicho al tratar los principios de la geometría afín habrá observado que *la traslación rectilínea* constituyó la base de aquélla. Kinemáticamente este movimiento traslatorio rectilíneo es la característica de un *espacio libre newtoniano,* y, al mismo tiempo, distingue el *movimiento uniforme.* Un espacio euclideano es, pues, un espacio afín plano y, por lo tanto, newtoniano libre — no hay acción de fuerza — y es el espacio de las traslaciones congruentes rectilíneas. Combinando todo esto se ve que una curva considerada kinemáticamente

como una trayectoria, es engendrada por *traslaciones rectilíneas infinitesimales,* lo cual indica que el punto material que la describe lo hace en forma *infinitesimalmente libre,* esto es, el punto material se mueve en una forma que es a *cada instante libre.* Su movimiento infinitesimal cambia bajo efecto de transformaciones continuas lineales y es así *uniforme* por trechos infinitesimales.

Recordando que la trayectoria rectilínea es una geodésica, o *una trayectoria estacionaria* en lenguaje de Hamilton, podemos decir que *un punto material describe su trayectoria geodésicamente,* y es así que la tierra describe su órbita al rededor del sol. La importancia de esta definición del movimiento de un punto aparecerá en breve.

Cuando decimos, pues, que el espacio Riemann *es infinitesimalmente euclideano* queremos dar a entender que ese espacio *es al mismo tiempo newtoniano infinitesimalmente,* y aquí tocamos el punto que sirvió a Levi Civita de apoyo para formular su admirable concepto de *traslación paralela infinitesimal.* Con esta propiedad Levi-Civita dotó al espacio curvo general de *conexión afín,* esto es, *convirtió al espacio amorfo en espacio esférico constante en sus elementos infinitesimales,* admitiendo la posibilidad de *la traslación paralela congruente infinitesimal* de vectores infinitamente pequeños.

Por otra parte, hemos observado cómo *una traslación rectilínea infinitesimal* plantea la importancia de la expresión matemática *de la distancia rectilínea entre dos puntos* y que el espacio métrico pitagórico se distingue por la conocida forma cuadrática, que en un espacio tridimensional y sistema normal cartesiano de representación es :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

y que en coordenadas generales es :

$$\sum_{ik=1}^{3} g_{ik} dx_i dx_k, \text{ etc.}$$

Una vez formulada esta expresión de distancia entre dos puntos : *traslación infinitesimal, en valor absoluto,* podemos dar *al espacio afín su complemento métrico,* i. e., el espacio métrico.

El lector puede, por lo dicho, comprender la importancia fundamental, por no decir *trascendental,* del concepto infinitesimal de Leibnitz. Todo descansa sobre el principio de la *generación de una curva por medio de un elemento rectilíneo infinitesimal. ¡ Una traslación infinitesimal rectilínea !* Todo se reduce *a este único principio :* que posee *un significado geométrico, uno kinemático y uno dinámico;* vemos re-

ducido al mismo el magistral concepto de los espacios amorfos multidimensionales de Riemann. *¡ Qué admirable sencillez !* Esto fué lo que comprendió Einstein.

Leibnitz criticaba a Newton su aceptación del principio de acción a distancia. Sin duda procedía impulsado por rivalidad más bien que justicia, pues Newton mismo imponía la salvedad a sus leyes diciendo que los fenómenos *aparentaban* una acción a distancia. En cambio dejó de ver el alcance de aquella observación newtoniana, evidencia de un talento colosal viz: *La trayectoria rectilínea es fenómeno característico de cuerpo libre, y de movimiento uniforme.*

En vista de esto puede decirse que la diferencia entre la geometría euclideana plana y la geometría riemeniana infinitesimal, es análoga a la que existe entre los conceptos físicos de acción a distancia y acción por contacto. Un concepto es integral y el otro es infinitesimal. Hay que añadir que la integral es un caso muy particular de integración, en el caso euclideano, pues es una operación que produce como resultado una línea recta. Esto nos obliga a considerar « las fases » de un fenómeno. Podríamos definir éstas como *efectos de acciones extrañas,* que alteran un estado cualquiera físico. Una ley integral debe prevenir todas las posibilidades fásicas y, por lo tanto, contener un parámetro representante de cada una de estas acciones extrañas : las conocidas constantes de integración. He aquí una dificultad « humana ». Nuestra percepción *consciente* es, desgraciadamente, *integral.* Tenemos conocimiento de los fenómenos en forma global, desfigurados relativamente a sus principios, por acciones extrañas que podemos apartar sólo con grandísima dificultad y a fuerza de observación continua, por un método de análisis harmónico.

Un punto material se mueve en forma *libre infinitesimal.* Este movimiento experimenta un cambio fásico por efecto de una acción extraña, esto es, no cambia de naturaleza puesto que *la ley es invariante* pero si cambia de clase. Se produce una simple *alteración métrica,* nada más, i. e., cambia de dirección y cambia la velocidad de magnitud. Siempre es infinitesimalmente libre. La trayectoria registra *la historia del fenómeno fásico.* Si se piensa a fondo sobre este principio se verá que, en pocas palabras, el sentido matemático físico de lo que llamamos « evolución » es *un estado de equilibrio en un campo a cuatro dimensiones, una de las cuales varía continuamente en una sola dirección.* Si no fuera por la dimensión *temporal* el estado sería estático y no existente para nosotros. La existencia es base de toda fenomenología y vemos que su esencia es « propagación ».

Caemos naturalmente a considerar de cerca esta dimensión temporal, que varía constantemente a son de « corriente » y en una sola dirección viz: *de futuro a pasado.* Desde un principio comprendemos que es *la esencia de todo cambio fásico.* Cuando hablamos de la distancia finita entre dos puntos en un espacio a tres dimensiones, por ejemplo, en un sistema normal cartesiano

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

formamos un concepto definido, mentalmente, del significado que tiene y perdemos de vista que la dimensión temporal, imprescindible, no figura porque es imperceptible conscientemente, o de diferente orden de magnitud; pero cuando en un sistema, también normal, expresamos la distancia entre *dos puntos* por la canónica

$$s^2 = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

y añadimos que x_0 *varía constantemente,* ya no podemos formar esa imagen mental definida. Si suprimimos una dimensión espacial obtenemos analíticamente la figura de un hiperboloide como sección tridimensional, o si pudiéramos reducir el tiempo a la constancia *suponiendo que varía con infinita lentitud,* estaríamos en el caso primero de tres dímensiones. Esta dimensión temporal es variable, unidireccionalmente, continuamente, y es así que interviene matemáticamente en las leyes naturales. Pronto veremos el significado de esta expresión cuadrática fundamental.

Como observa Einstein nuestro mundo es cuatridimensional. Tres dimensiones son espaciales y una es temporal. La dimensión temporal se nos presenta completamente distinta a las demás, como si se tratara de una magnitud absolutamente heterogénea. Sin embargo, el simple fenómeno *movimiento,* liga a todas estas dimensiones entre sí, como si se tratase de una mezcla, o, mejor aún, *una solución.* En resumidas cuentas, repetimos lo dicho, que *existimos,* y esto contiene un concepto de corriente en una dirección imaginaria.

CURVATURA

Gauss ideó el método de medir la curvatura de líneas por medio de lo que llamaremos: una divergencia normal. Lo que mide es el apartamiento de *la condición recta* en un caso y *el apartamiento de la condición plana* en el caso de superficies curvas. La parte verdadera-

mente admirable del método es su invariación relativamente a transformaciones continuas de coordenadas o, lo que es lo mismo, deformaciones continuas de la superficie considerada.

Curvatura gaussiana. — Gauss mide la curvatura de líneas y superficies valiéndose de una circunferencia de círculo y una esfera, de radios iguales a 1. Si por un punto, centro de un círculo unitario, trazamos radios paralelos a las normales en los puntos de un arco s de curva cualquiera plana, obtendremos sobre la circunferencia del círculo una longitud de arco — el determinado por radios extremos paralelos a normales extremas de s, — que mide exactamente el cambio total de dirección de un punto que recorre a s, sobre la curva. Dividiendo este arco de circunferencia por la longitud s de curva obtenemos una expresión de *curvatura media* — podríamos llamarla una curvatura estadística, — haciendo tender s a ds infinitamente pequeño, y a cero, obtendremos de la relación anterior, en el límite, la expresión de la curvatura propiamente dicha, en el punto P de la curva: curvatura específica. Empleandose una esfera unitaria en el caso de una curva gaussa, etc.

Estos mismos conceptos se aplican a una superficie, y si llamamos $d\omega$ el ángulo sólido esférico determinado por el cono de radios normales — paralelos a las normales en los puntos de una línea que encierra un área $d\sigma$ sobre la superficie, — y si ρ, ρ', son los radios principales de curvatura en el punto P considerado, tenemos:

$$\text{límite de } \frac{d\omega}{d\sigma} = \frac{1}{\rho\rho'}$$

igual *curvatura específica en* P.

Pero como una área sobre una esfera unitaria se mide por medio de lo que se llama « el exceso esférico », podemos definir la curvatura media de una porción s de superficie como sigue:

$$\text{Curvatura media o estadística} = \frac{2\pi - \text{cambio total de dirección}}{\text{área } s},$$

pero 2π, cambio total de dirección, es lo que Gauss llama « curvatura íntegra »:

$$\text{Curvatura estadística} = \frac{\text{curvatura íntegra}}{\text{área } s}.$$

Es muy sencilla la demostración de la equivalencia exacta entre estas dos formas de expresión. No hay más que hacer « rodar » un plano tangente sobre la traza de la curva en s y otro sobre la traza

correspondiente esférica y notar que a cada instante la dirección del movimiento sobre la esfera es *normal al eje instantáneo de rotación correspondiente* en la superficie. En otras palabras, la traza esférica registra las alteraciones de dicho eje instantáneo de rotación y como éste es a cada instante normal al plano que determinan dos normales consecutivas — que determinan la sección geodésica ds, — resulta *a fortiori* que la traza esférica mide el cambio de dirección en la superficie según s. Aplicando ahora el principio de exceso esférico resulta que:

$$\frac{2\pi - \text{cambio total traza esférica}}{\text{área } s} = \frac{\text{curvatura íntegra}}{\text{área } s}.$$

El teorema de Euler nos da las expresiones de curvaturas $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho'}$, en dos secciones normales en un punto P de una superficie y hemos visto que éstos dependen del valor que toman en ese punto las *segundas derivadas* de la ecuación

$$z = \varphi(xy),$$

esto es:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_p, \qquad \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)_p, \qquad \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)_p.$$

Si llamamos

$$A = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_p, \qquad B = \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)_p, \qquad C = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)_p,$$

entonces para dos secciones normales tenemos la relación conocidísima:

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = A + C,$$

y si R y R′ *son los radios principales de curvatura* en P tenemos:

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R'} = AC - B^2.$$

Así, pues, resulta:

$$\frac{\text{Curvatura íntegra}}{\text{área } s} = \frac{1}{RR'}$$

si suponemos constante a $AC - B^2$. Si *no es constante* entonces $\frac{1}{RR'}$ mide la *curvatura específica en* P. Esto es

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{1}{RR'}$$

en P.

Muy fácil es ahora ver que si una superficie se deforma continuamente sin alterar su *densidad* — sin estirarse ni contraerse, — las longitudes de geodésicas sobre la misma, los ángulos entre dos geodésicas, etc., no se alterarán y, por lo tanto, tampoco se alterará $\frac{1}{RR'}$ ni $\frac{1}{\rho\rho'}$ en un punto P. Aquí tenemos, pues, la célebre propiedad de invariación de curvatura gaussiana revelada, y esta es la propiedad de que se valió Riemann para formular su magistral concepto de « curvatura espacial », reconociendo su *carácter tensorial.* Riemann basó sobre esta invariación su *continuum* puntual multidimensional, o de n dimensiones y aplicó *el concepto gaussiano* generalizado en un punto P del mismo, considerando al espacio engendrado paramétricamente; y así en un punto tenemos una curvatura según cada dirección de elemento superficial paramétrico, esto es, elemento perpendicular *a la dirección normal de la superficie considerada. La invariación de la curvatura* es la *propiedad colosal que caracteriza al continuum espacial,* o, como nos mostró Einstein, podemos deformar continuamente al *continuum* mediante transformaciones continuas arbitrarias de coordenadas sin que se altere « la curvatura riemeniana» en P, siempre que no alteremos la densidad puntual del *continuum,* o sea, su estructura. Esto es lo mismo que decir que las geodésicas que parten de un punto quedan determinadas una vez que conocemos sus direcciones.

El lector, por simple inspección, verá que la curvatura gaussiana es una invariante diferencial derivada de la forma métrica fundamental:

$$ds^2 = \sum_{ik}^{2} g_{ik}\, dx_i dx_k \qquad g_{ik} = g_{ki},$$

esto es, formada con las derivadas de los coeficientes g_{ik}.

Riemann generalizó el concepto para $i, k = 1, 2, \ldots, n$ dimensiones. Si el espacio es homogéneo en todos sus puntos, es natural que su curvatura será constante. Si aplicamos esto a un espacio de n dimensiones y recordamos la forma fundamental métrica hallada para una representación paramétrica de la esfera, podemos decir que en un espacio esférico, n dimensional, la distancia entre dos puntos vecinos tiene el aspecto:

$$ds^2 = \frac{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)\sum_i^n dx_i^2 - a\left(\sum_i^n x_i dx_i\right)^2}{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)^2},$$

en que a es *la constante de curvatura* y es nula para un espacio plano euclideano. En un espacio esférico podemos desplazar una figura conservando la congruencia, como es evidente; podemos, pues, hacer comparaciones de distancias lineales independientemente de posición y dirección. El espacio euclideano plano afín se distingue por el grupo de trasformaciones lineales ya mencionado varias veces y que hace posible la geometría afín, etc., y es el límite de los espacios esféricos para $a = 0$.

Llegamos ahora al punto culminante de la especulación riemeniana: las multiplicidades discretas en oposición a las continuas.

Matemáticamente, Riemann halló posible un espacio *continuum* a n dimensiones. En este espacio un punto tiene n coordenadas numéricas arbitrarias y la continuidad se establece imponiendo la condición de que puntos infinitamente cercanos tengan coordenadas que se diferencian en cantidades infinitamente pequeñas del mismo orden que su separación. Riemann denominó multiplicidad discreta a ese *continuum* en que n tiene *un valor determinado.* Al ser determinado n se ve que la forma métrica fundamental queda también determinada. La métrica de este *continuum* o multiplicidad discreta queda determinada por el hecho mismo de serlo el número dimensional.

En realidad la condición «discreta» implica que la continuidad en el *continuum* está limitada a un determinado orden de magnitud. Si analizamos esto, veremos que existe la misma diferencia entre *discreta* y *continua* como entre los procesos conscientes de *contar* y *medir,* y caemos en el terreno de percepciones visuales y de tacto.

¿ Qué, pues, *es lo que determina la dimensionalidad de una multiplicidad continua ?*

Las palabras de Riemann son admirables: *reconocemos haber llegado al borde de otra ciencia, la física, el cual no pensamos cruzar !*

Reconocemos que en un *continuum n dimensional* es preciso que *una acción extraña produzca una densificación que permita diferenciar una dimensionalidad puntual del resto del continuum.* Quedamos asombrados ante la profundidad de esta observación, triunfo de una especulación puramente matemática.

Einstein, único desde el tiempo de W. K. Clifford en 1875, que comprendió a Riemann, nos ha dicho que la acción extraña que causa la dimensionalización en el *continuum* es *la gravitación.*

Toda la filosofía del día tiende a adelantar el conocimiento sobre este maravilloso *continuum n dimensional riemeniano.* El *contenido desconocido* de este espacio puntual ha sido declarado, por el astróno-

mo inglés Eddington, ser *de la misma naturaleza que nuestra conciencia!* Podríamos décir que nuestra conciencia es un *continuum* a n dimensiones y que una acción exterior produce la dimensionalización por medio de nuestros órganos de percepción. Por ejemplo, la vista de *un libro* sería una tal acción, *real* exterior, que produce una correspondiente dimensionalización en nuestra conciencia. *Una densificación* en el *continuum.* La palabra « libro » produce una densificación fonética, y otra literal, etc., obedeciendo éstas densificaciones a leyes determinadas, todas con un solo efecto *invariante* de *producir una diferenciación consciente.*

Exactamente en esta forma es que debemos interpretar las acciones exteriores a que se refiere Riemann.

Einstein nos ha enseñado que todas estas *densificaciones* son simples *alteraciones del campo métrico.* Son variaciones de la forma métrica fundamental

$$\sum_{ik}^{n} g_{ik} dx_i dx_k \qquad g_{ik} = g_{ki},$$

por efecto de variaciones de las componentes g_{ik} de este tensor métrico. En otras palabras, toda nuestra experiencia fenomenal obedece a simples variaciones del campo métrico mundial! Según este admirable hombre de talento, *la conexión afín* de nuestro espacio cuatridimensional es *el campo de gravitación,* y las leyes que rigen a este campo y a la materia, o densificaciones que existen en el mismo, están contenidas en los g_{ik} de la métrica fundamental.

¡ Qué inmenso triunfo matemático !

¡ La distancia cuatridimensional entre dos puntos gobierna nuestro universo !

Esta distancia expresada es un sistema normal geodésico coordenado, tiene la forma canónica cuadrática. Supongamos, para cambiar de órdenes de magnitudes, que nuestro espacio mayor es euclideano plano y que nuestro sistema es normal cartesiano, la distancia, entonces, aparecerá como una divergencia de la condición luminosa. Esto es lo que hemos señalado: medimos la variación relativa a la propagación invariante, y vimos que esta variación es sólo posible por dos conceptos: cambios de *continuum* o focalizaciones. En otras palabras, por variaciones de densidad. Tenemos, pues, las dos ecuaciones que revelan todo esto :

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0,$$

en que la divergencia de la condición luminosa es precisamente lo que llamamos s^2, distancia. De acuerdo con nuestra tesis : *es la divergencia de la condición invariante la que percibimos fenomenalmente;* como si dijéramos que es la desigualdad que, obrando sobre nuestro *continuum* cerebral, produce el efecto que llamamos « fenómeno ». Repitiendo esto en otro orden de magnitudes diremos : *es la desigualdad perceptible en la naturaleza* la causa del fenómeno « idioma » o « lenguaje », y *esta es la medida en unidades fonéticas convencionales de las divergencias de condición de igualdad o invariación.*

A pesar de manifestar su intención de no cruzar el borde, Riemann aventuró la observación de que la dimensionalidad de un *continuum* es determinada por *la materia que contiene.* Quiere decir que lamate ria determina al campo métrico. Cambiando el contenido material cambiará la forma métrica fundamental.

Dejamos esto para entrar de lleno al cálculo tensorial en el *continuum,* o sea la geometría infinitesimal de H. Weyl.

DIGRESIÓN 0.57

Velocidad infinita. Hamiltoniana luminosa

Ya hemos hecho alusión a esto y mencionamos una hipótesis de Kelvin relacionada con la propagación del *fenómeno cerebral humano* llamado *luz.* En otra digresión se explicará este fenómeno de « la luz » en una forma nueva y de perfecto acuerdo con la naturaleza.

Se dijo que *toda* velocidad finita para nosotros puede convertirse en *una velocidad infinitamente* grande por pasaje al *infinitamente pequeño.* Esto es evidente y encierra una « indeterminación » que afecta a *un orden,* i. e., dentro del orden la faz queda indeterminada y lo único determinado es « el orden ». *Cualquier cosa finita,* para *un sér infinitamente pequeño,* tiene, *a fortiori,* que poseer *dimensión infinitamente grande.* Está a la vista : simple relativismo entre dos órdenes.

Se supone que la velocidad en el finito es grande y finita. Una propagación puede, en virtud de esto considerarse de dos maneras que en todo guardan relación con las dos maneras de infinitesimalización clásicas :

$$\frac{\text{fluxión}}{\text{Newton}} \qquad \frac{\text{diferencial}}{\text{Leibnitz}}.$$

Podemos concebir una repetición como un proceso gradual continuo y podemos considerarla a base de « golpe estático instantáneo ». De la primera manera el producto sale de la focalización en una forma de *perceptible continuidad,* y de la otra sale por « golpes rapidísimos », seguidos de pausas temporales.

El número *dos aparece* y desplaza por *un golpe instantáneo* al número *uno* haciendo que éste *en la misma forma tome su nueva posición.* Si no así, entonces el dos aparece empujando a uno hacia su nueva posición sin que se haya perdido jamás el contacto. Es un *tren de unos* que van saliendo.

Matemáticamente este *processus* puede expresarse fácilmente si suponemos que haya regularidad en el mismo. Si hay irregularidad finita, entonces, « linealizamos » y pasando al infinitamente pequeño hallaremos la regularidad. Pero como el procedimiento es *ipso facto* infinitesimal, tiene que ser regular para nosotros, a la fuerza, sin necesidad de recurrir a la experiencia fásica como árbitro. Nuestro *continuum* mayor sólo tiene *una forma de propagación invariante,* en cuanto se relaciona con la conciencia humana, viz :

c de Einstein.

Esta velocidad es para la humanidad un límite superior, verdaderamente el deslinde del orden de magnitud que nos enjaula.

Supongamos ahora la ecuación siguiente referida a una unidad temporal y otra métrica determinadas :

$$c = \nu\lambda.$$

Propagación = frecuencia por longitud de onda, esta ecuación es invariante y en su maravillosa sencillez encierra todo el fenómeno de la *repetición.* De esta simple expresión tiene, *a fortiori,* que salir *cuanto infinito fásico existe.*

Siempre deberá recordarse que se trata de una velocidad y para mayor sencillez que se trata de *una unidad de tiempo.* En esta forma, c mide un desplazamiento espacial, ν *un número de repeticiones* y λ otro desplazamiento. Teniendo en cuenta el principio dimensional de Sylvester se ve que, *a fortiori,* hay *normalidad* entre ν y λ.

Decimos, pues, que c representa el proceso que tiene lugar en un foco emisor, o focalización, en una unidad de tiempo, un segundo planetario. El foco durante un segundo de tiempo hace ν *repeticiones de una cosa infinitesimal;* esta cosa, *no pudiendo coincidir, tiene a la fuerza*

que salir y avanzar en el continuum mayor y *sale rectilíneamente, por razones obvias.* La manera que sale ofrece las siguientes analogías.

Un carpintero clava un clavo en una tabla, golpea ν veces por segundo sobre la cabeza del mismo y el clavo, bajo el impulso de cada golpe, avanza una distancia λ.

Invirtamos el proceso de *una araña* que se deja caer deshilvanando su tela desde una altura — su caída es con una velocidad de $\nu\lambda$ y en forma fluxional continua. Aquí tenemos dos puntos de vista, — únicos dos posibles.

Se ve inmediatamente que en el primer caso λ *mide vectorialmente una fuerza* por *medio de un desplazamiento normal dimensional.*

Si, pues, f es una potencia, entonces $\frac{df}{dx_i}$, en la que (x_i) son las coordenadas del foco, mide perfectamente esa fuerza que encierra la λ. ¿Pero cuál es *la causa de la fuerza?* Indudablemente es *la cohesión* de la tabla o madera. El índice de cohesión que podemos encerrar en una *escalar* μ y suponer lo que se quiera acerca de su variación, o no variación, a medida que el número «uno» o punta del clavo avanza. Así, pues, $\mu f_i = \mu \frac{df}{dx_i}$ será la *densidad de la fuerza en evolución.* Nada podría ser más exactamente descriptivo del *processus.* $\mathbf{c}$, pues, representa *la densidad total, por segundo de tiempo, de la propagación* y es *invariante en el continuum mayor;* teniendo esto en cuenta: es *una densidad escalar invariante.* Escribimos:

$$\mathbf{c} = \nu^i \cdot \mu \frac{df}{dx_i} = \nu^i \cdot \mu f_i$$

$$= \nu^i \cdot \mathbf{p}_i \qquad \mathbf{p}_i = \mu f_i,$$

pero todavía estamos *ad portas* puesto que tenemos que tener presente que *hay direcciones* espaciales el momento que fijamos un punto de referencia, que es aquí $P = (x_i)$. Elijamos en este punto un sistema vectorial básico unitario de referencia — sistema en P, — como se acostumbra en el cálculo tensorial y vemos que ν es *una velocidad,* o sea, *un vector,* entonces la ecuación

$$\mathbf{c} = v^i \cdot \mu f_i \qquad v^i = \nu^i$$

$$= v^i \mathbf{p}_i \qquad f_i = \frac{df}{dx_i}$$

expresa muy bien el proceso de repetición que tiene lugar.

El carpintero aumenta el número de golpes por segundo, pero *como solo dispone de una potencia dada, impuesta por condiciones de orden superior, disminuye el* λ. *Ahora nos damos cuenta que v encierra más que una simple velocidad, vemos que v consume algo, cuando varía, que afecta al esfuerzo,* puesto que si v aumenta, λ disminuye y viceversa. Aquí, pues, vamos vislumbrando una propiedad de *v que existía oculta.* ¿Qué es? Muy simple, pasemos el factor μ a la componente v^i de la velocidad (frecuencia) y se descubre

$$\mu v^i = \mathbf{s}^i$$

que es una corriente de impulsos. Aparecen, pues, *dos maneras de encarar el fenómeno* de *la repetición,* considerarla como *una punta (uno) que avanza por efecto de una densidad de fuerza en acción en la punta misma,* regulada por un parámetro repetidor (v^i), o podemos considerar *que la punta avanza en virtud de una corriente de impulsos transmitidos por repetición desde el foco a lo largo de la pila integral de unos que constituye el clavo.* ¡Notable dualidad!

Decimos, pues, que, en consecuencia estos dos puntos de vista, *vinculados por una reciprocidad invariante en nuestro continuum mayor* constituyen dos aspectos : 1° mecánica; 2° electricidad.

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^i . f_i = v^i . \mathbf{p}_i$$

$$\mathbf{s}^i = \mu v^i; \qquad \mathbf{p}_i = \mu f_i; \qquad v^i = \nu^i; \qquad f_i = \frac{df}{dx_i}$$

μ = índice de cohesión del *continuum* mayor; $\mathbf{c}$ = densidad escalar invariante que mide perfectamente «la cantidad de cosa» que produce el foco.

Vemos que $\mathbf{s}^i$ son componentes contravariantes y $\mathbf{p}_i$ covariantes *de densidades.* Mientras que v^i son componentes contravariantes y f_i componentes covariantes de magnitudes de intensidad.

Aparece, pues, $\mathbf{c}$ como una densidad escalar invariante *en el continuum mayor,* mide *el contenido* de una magnitud, mide *el número de golpes Sylvestrianos que contiene una magnitud espacial,* y *mide la cantidad de impulso producida por repetición,* que ha *corrido desde el foco a la punta* que avanza. Su carácter de *densidad tensorial* está manifiesto, el lector recordará lo que significan *órdenes* de tensores.

Resumiendo :

$$\mathrm{P} = (x_i) \qquad i = 1, 2, 3, ..., n$$

$$\nu^i = v^i; \qquad \frac{df}{dx_i} = f_i.$$

$f =$ potencial focal; $\mu =$ índice cohesivo del *continuum* mayor

$$\mathbf{s}^i = \mu v^i; \qquad \mathbf{p}_i = \mu f_i$$

$$\mathbf{c} = \sum_i^n \mathbf{s}^i \,.\, f_i = \sum_i^n v^i \,.\, \mathbf{p}_i$$

en un sistema vectorial básico unitario en P, que podríamos designar como de los (e_i) si se quiere; estamos, pues, en el terreno de *la afinidad* y de la métrica.

Siendo $\mathbf{s}^i =$ componentes de densidad de corriente; $\mathbf{p}_i =$ componentes de densidad de fuerza, fácilmente podemos formular una integral Hamiltoniana invariante.

Puede bien decirse ahora, que la invariante universal *repetición* ha permitido descubrir otro enemigo fásico oculto, precisamente en estas dos relaciones de identidad.

$$\mathbf{c} = \sum_i^n \mathbf{s}^i \,.\, f_i = \sum_i^n v^i \,.\, \mathbf{p}_i$$

Aquí, pues, está el *fons et origo* de la *densificación infinitesimal.*

Hemos dado el nombre de «Sylvestriano» al golpe de los (f_i) en honor al autor de *la canonización de la cuádrica.* La razón es la siguiente : nosotros mortales apreciamos las dimensiones conscientemente, por medio de *direcciones normales.* Decimos, en consecuencia, que *la acción que canoniza es la acción que densifica y que dimensionaliza.* El golpe (f_i) es una pulsación normal a la línea de propagación, etc.

De esta manera se ha logrado harmonizar en parte el cálculo tensorial y universalizar su significado, pero falta completar el proceso.

La materia aparece como resultante de composiciones tensoriales focalizadas, que reducen la velocidad de propagación a un límite que tiende a cero, aumentando, indefinitamente, por reciprocidad, la densidad Sylvestriana.

Einstein, por una simple *generalización intuitiva,* formuló su ecuación de la gravitación, precisamente valiéndose de esta relación entre *mecánica y electricidad.*

H. Weyl se apercibió de la *necesidad de esta relación.* Aquí, partiendo de una base axiomática de *repetición, se ha llegado con gran sencillez a obtener esa unión,* que siempre ha existido, y siempre se ha comprendido intuitivamente, pero que no se pudo formular porque *el edificio científico estaba mal cimentado.*

DIGRESIÓN 0.58

La luz

Desde el instante que se reconoce, que toda nuestra fenomenología perceptible es *repetición,* se reconoce que todo es *propagación.*

Las explicaciones hechas acerca de órdenes de magnitudes, perceptibles conscientemente, e imperceptibles conscientemente, y la correspondencia de *indeterminaciones,* en un orden de magnitudes, con *determinaciones* en otro orden inmediato inferior permiten, con facilidad, comprender el fenómeno cerebral que se denomina *luz.*

Matemáticamente se puede definir la gravitación luminosa como una propagación compuesta de *repeticiones Sylvestrianas,* infinitamente pequeñas, y una frecuencia contravariante infinitamente grande. Resulta, pues, que percibimos la luz por el fenómeno puramente kinético, que entra en el orden finito consciente de magnitudes *perceptibles visualmente;* pero no podemos percibir la parte «Sylvestriana», o dinámica material *que no entra en el orden finito* de magnitudes perceptibles, conscientemente, por nuestro órgano de «tacto». En virtud de esta distinción, el lector podrá, desde ya, ir relacionando nuestras percepciones conscientes con las divisiones analíticas conocidas, como *proyectivas* y *métricas,* respectivamente.

Nuestro *continuum* mayor admite la propagacion libre, aparentemente, de la *repetición luminosa,* y ésta tiene lugar en una forma perfectamente invariante, i. e., la c de Einstein.

No es posible variar esta c de Einstein. Para que suceda este fenómeno es preciso cambiar la característica cohesiva del *continuum,* lo cual se sabe. Pero hay otro método que ha pasado desapercibido, y éste es por medio de *una focalización* en el *continuum* mayor.

En una focalización puede producirse la composición tensorial siguiente :

$$(c_x \,.\, c_y) \rightarrow 0$$

$$\text{val. abs. } c_x = \text{val. abs. } c_y = c,$$

cuyo significado es manifiesto, i. e., una propagación compuesta que se anula por interferencia normal, anulándose toda cohesión. Puede producirse también en la focalización :

$$(c_x{}^1 \,.\, c_y{}^2) + (c_x{}^2 \,.\, c_y{}^1) = 2\mathrm{T}_{ik}$$

$$(c_x{}^1 \,.\, c_y{}^2) - (c_x{}^2 \,.\, c_y{}^1) = \mathrm{H}_{ik}$$

o sea

$$T_{ik} = T_{ki} = \frac{1}{2}(\gamma_{ik} + \gamma_{ki})$$

$$H_{ik} = - H_{ki} = \gamma_{ik} - \gamma_{ki},$$

en que los (γ_{ik}) son los componentes de los tensores que resultan de los productos escalares. Estas formas tan conocidas, son tensores de segundo orden, simétrico y levo-simétrico, respectivamente, y se interpretan como sigue.

Los $T_{ik} = T_{ki}$, tensor «material» dinámico; y los $H_{ik} = - H_{ki}$, tensor «material» kinético. El primero encierra una resultante de traslación, mientras que el segundo encierra una resultante de rotación.

Decimos, en consecuencia, que el límite recíproco de una propagación luminosa es *materia,* por la sencilla razón de que *no podemos percibir conscientemente el orden de magnitud del factor kinético de la propagación con nuestro sentido de tacto, pero sí podemos percibir el factor dinámico con este sentido.*

En otras palabras, el cerebro humano abarca en su potencia de perceptibilidad los dos límites siguientes :

Kinética pura : visión;

Dinámica pura : tacto;

y en virtud de estas dos facultades es que *contamos* y *medimos*. Así :

$$w = v \,.\, \delta \qquad w = \text{invariante espacial}$$

$$w = \begin{cases} v \to \infty \,.\, \delta \to 0 & \text{visión : luz} \\ v \to 0 \,.\, \delta \to \infty & \text{tacto : materia} \end{cases}$$

en que v = velocidad de repetición (frecuencia); δ = densidad de acción (longitud de onda).

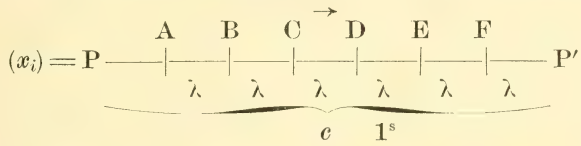
En virtud de la continuidad de nuestras percepciones, como ya se ha notado en otra parte, desaparece ese fantasma matemático llamado geometría abstracta. Vemos, en consecuencia, que *nuestro cerebro focaliza las percepciones,* y al hacer esto desempeña el rol de *un absoluto* en el sentido que Cayley, Clifford, etc., definieron este concepto. Quiere decir que, en nuestro cerebro se relacionan *propiedades proyectivas* y *propiedades métricas.* Hemos de volver sobre esto en otro lugar.

DIGRESIÓN 0.59

La invariante (c) como densidad tensorial

Puede haber alguna duda acerca de la interpretación tensorial de **c**, y como ésta es la base de *todo el edificio geométrico levantado* sobre *la repetición,* se vuelve sobre el punto para elaborar y explayar más el concepto.

Eligiendo el siguiente esquema gráfico se tiene fácilmente :



A = un golpe Sylvestriano encerrando una potencia f, que llamaremos una densificación de fuerza infinitesimal, que *ocupa espacio infinitesimalmente*, gracias a un μ de cohesión que *posee el continuum mayor.* La *densidad de esta potencia* será, pues, μf; una verdadera *densidad* de fuerza mecánica. Un atributo de *materia.*

AB = λ es un desplazamiento producido por la salida de A del foco P que impulsa a B, C, D, E, etc., y obliga la *propagación.* Esta acción de impulso se transmite a lo largo de la fila, partiendo desde P hacia el lado E. Quiere decir que cuando va saliendo A, hay una acción *que recorre la línea.* Llamemos esto *un esfuerzo desde* P; vemos que se repite ν veces en un segundo para llegar de P a P′.

Decimos que ν es *la velocidad de la repetición de impulsión,* que se propaga a lo largo de la fila o línea A, B, C, D, ..., P′. Tiene, por lo tanto, dirección y es vector.

Si, pues, μ es la *resistencia volumétrica unitaria de cohesión del continuum* mayor, entonces $\mu\nu$ será, indudable y clarísimamente, *una densidad de corriente de impulsiones*, que al mismo tiempo *es densidad de corriente material,* y tiene el aspecto de una corriente eléctrica de $\overline{P}$ a $\overline{P'}$.

Ahora, **c** abarca en $\overline{PP'}$ una magnitud de cantidad de *repeticiones* con aspecto de *dimensionalización,* o de densificación, como es evidente, y es una *invariante de nuestro continuum mayor, para nuestra conciencia.* Quiere decir, pues, que conduce a una invariante integral de contenido zonal, o, si se quiere, a una *Hamiltoniana estacionaria.*

Queda así evidenciado su carácter de *densidad tensorial.*

Resulta, por lo tanto :

$f =$ potencia escalar; $\mu =$ índice cohesivo; $v =$ frecuencia de repetición; $P = (x_i)$; $i = 1, 2, 3, ..., n$; tendremos :

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^i . f_i = v^i . \mathbf{p}_i$$

$$\mathbf{s}^i = \mu v^i; \qquad \mathbf{p}_i = \mu f_i,$$

quedando sobrentendido el carácter de densidad de **c** en oposición al de $c =$ velocidad de propagación.

Se ha supuesto en $P(x_i)$ un sistema vectorial básico de referencia (e_i), que nos servirá para fundar el campo métrico correspondiente.

DIGRESIÓN 0.60

Matemáticas

Siendo $P = (x_i)$, y un sistema vectorial básico (e_i) en P, podemos escribir, como antes, dejando indeterminado el número de dimensiones:

$f^i = \dfrac{df}{dx_i}$; $\mu =$ índice escalar cohesivo del *continuum* mayor; $\mathbf{s}^i = \mu v^i$; $v^i =$ componentes vector velocidad; $\mathbf{p}_i = \mu f_i$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \sum_i^n \mathbf{s}^i . f_i \\ &= \sum_i^n v^i \mathbf{p}_i; \end{aligned} \qquad i = 1, 2, 3, ..., n$$

evidentemente **c** es una densidad escalar invariante.

Consideremos ahora a

$$c = v^i . f_i$$

y formemos la métrica

$$(cc) = \sum_{ik}^n v^i v^k . (f_i f_k) = \sum_{ik}^n g_{ik} . v^i v^k$$

$$g_{ik} = g_{ki} = (f_i f_k),$$

y como sabemos ser en el *continuum* mayor :

$$c^2 = \sum_{ik}^n g_{ik} v^i v^k = \text{constante}$$

esto nos dice que la propagación *es rectilínea uniforme.* Esto es evidente. No debe perderse de vista que aquí c es una *velocidad.* Así que estamos en el caso Einsteniano de

$$g_{ik}v^i v^k = (u^k \,.\, u_k) = \text{invariante, etc.}$$

Por otra parte, la constancia de c debe interpretarse convenientemente en el sistema de representación.

Una focalización sería muy fácil de representar, pues no habría más que invertir *sentidos* en las direcciones coordenadas, o vectoriales (componentes). En seguida, en virtud de la invariación de la propagación de gravitación en el *continuum* mayor no habría sino suponer fijo $P(x_i)$, y hacer girar el sistema al rededor de este punto, *en una forma continua,* mediante *un grupo de matrices* continuo. *Resultaría una focalización.* Para determinar el «apilamiento infinitesimal» sería cuestión de conocer *una época* y valerse del teorema de Gauss, etc. De esta manera llegaríamos a formarnos una idea de la *densificación,* pero sería solamente *aproximada.* La *eferencia* interviene, y esto complica enormemente, pues no conocemos la diferencia entre golpes «Sylvestrianos» que llegan a la focalización, como gravitación obscura, y parten como luminosa. Oportunamente hemos de ver que siendo el número un símbolo de repetición, es en el estudio de las propiedades de los números donde debemos buscar la explicación de nuestras percepciones conscientes dinámicas, e inconscientes, que llamamos *materia.*

Si nos fijamos en las ecuaciones fundamentales notaremos que

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^i \,.\, f_i = v^i \mathbf{p}_i$$

implica en el foco las condiciones siguientes :

$$\frac{d\mathbf{H}^{ik}}{dx_k} = \mathbf{s}^i, \qquad \frac{d\mathbf{T}_i^{\,k}}{dx_k} = \mathbf{p}_i,$$

suponiendo condiciones de un espacio euclideano plano.

Este resultado, invariante, tensorial, es importante; puesto que nos hace percibir que la evolución astral es una resultante de dos formas de acción, a saber :

Repetición dinámica traslativa, o los $T_{ik} = T_{ki}$,

Repetición dinámica rotativa, o los $H_{ik} = -H_{ki}$,

pudiendo el lector suplir los diversos significados físico-geométricos que tienen estos dos tensores de segundo orden.

En el *continuum* mayor las cosas son simples, debido a la invariación de **c**; pero, en los *continuums* menores o quanta, en que se tiene $(c \,.\, c)$ variable por anisotropía espacial, sobrevienen los cálculos complicados, y ya no sería más el caso de ser

$$\frac{d\mathrm{T}_i^k}{dx_k} = \mathbf{p}_i,$$

sino

$$\frac{d\mathrm{T}_i^k}{dx_k} - \frac{1}{2}\frac{dg_{\alpha\beta}}{dx_i}\mathrm{T}^{\alpha\beta} = \mathbf{p}_i$$

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha},$$

en que reconocemos el término de «curvatura espacial». Hemos de ver oportunamente cómo este término expresa matemáticamente *la divergencia de la condición plana,* y cómo significa una alteración de curvatura esférica.

DIGRESIÓN 0.61

La reciprocidad

El edificio geométrico del cálculo tensorial harmonizado, como el del cálculo de tensores, en general, descansa sobre *la invariación,* aparte de todo significado físico. La repetición no es más que *una invariación* en el sentido matemático de la palabra.

Es necesario ahora notar ¿en qué estriba esta invariación? Vemos fácilmente que es en la *reciprocidad.*

Quiere decir, pues, que esta relación fundamental, es la que se ha llamado *concomitancia,* cuando se estudiaba la teoría de determinantes. Ahora se descubre que esta *concomitancia* es, a la par de la *repetición, la ley más profunda que existe en nuestro mundo de percepciones conscientes.*

Si un objeto *mantiene su color,* es en virtud de *una invariación y revela la existencia de una contravariación o contragrediencia y concomitancia,* en una palabra : *una reciprocidad.*

Si un cuerpo mantiene su temperatura, es por *invariación, existe una concomitancia entre una aferencia* y *una eferencia* y decimos : *la aferencia es contravariante a la eferencia. Son, pues, recíprocas. Siguiendo este razonamiento, podemos descubrir una serie de leyes que yacían ocultas* bajo los *caracteres fásicos de fenómenos en general.*

Es menester cultivar, matemáticamente, este hábito de «ver los fenómenos» desde este punto — no fásicamente, sino «invariantemente», — buscando la propiedad *estática.*

La vida de un astro depende exclusivamente de *una aferencia* y *una eferencia,* tan exactamente como la vida de *cualquier organismo en nuestro mundo infinitesimal.* El astro es *una focalización de gravitación obscura* que *se traduce* en *una radiación estacionaria, a simetría esférica,* en nuestro *continuum* mayor, de *gravitación más compuesta.* La misma focalización engendra una densificación en $P = (x_i)$ y la misma gravitación obscura, al incidir en esta densificación, *su propia obra,* se compone en *dos formas recíprocas :* una que se propaga en sentido inverso, *la eferencia,* otra, que penetra al *quantum.* Aquí tenemos, en consecuencia *una invariación,* un color luminoso para nuestra conciencia; la observación de este *color* sirve de índice para conocer *una época de evolución,* o mejor, la fase de la evolución

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^i . f_i,$$

si $\mathbf{c}$ es invariante, es porque $\mathbf{s}^i$ y f_i son contravariantes, etc.

La reciprocidad, al lado de la fundamental *repetición,* contiene «la llave» de nuestro *mundo de percepciones.* Vemos en *la reciprocidad* un *doublet* que forzosamente debe repetirse en el mismo *golpe Sylvestriano* original que emite el foco, y en virtud de la cual se tiene

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^i f_i = v^i \mathbf{p}_i$$

precisamente.

DIGRESIÓN 0.615

Especulación matemática

La ecuación fundamental de propagación de acción gravitante, en el *continuum* mayor, por emisión de un foco estático, radial esférico, toma la forma :

$$P = (x^i) \qquad \mathbf{c} = \mathbf{s}^i f_i \qquad f_i = \frac{df}{dx_i}$$

$$i = 1, 2, ..., n \qquad = v^i \mathbf{p}_i \qquad \begin{array}{l} \mathbf{s}^i = \mu v^i \\ \mathbf{p}_i = \mu f_i \end{array}$$

μ = índice de cohesión o densificación del *continuum* mayor; estas dos simples expresiones encierran estas otras

$$\mathbf{H}^{ik} = \mu \mathrm{H}^{ik} \qquad \frac{d\mathbf{H}^{ik}}{dx_k} = \mathbf{s}^i$$

$$\mathbf{T}^{ik} = \mu \mathrm{T}^{ik} \qquad \frac{d\mathbf{T}_i^{\ k}}{dx_k} = \mathbf{p}_i,$$

lo cual quiere decir que en el foco de emisión tenemos dos condiciones tensoriales completamente distintas; la de los

$$\mathrm{T}_{ik} \quad \text{o} \quad \mathbf{T}_{ik}$$

y la de los

$$\mathrm{H}_{ik} \quad \text{o} \quad \mathbf{H}_{ik}.$$

Decimos que este estado es de *densificación progresiva* por medio de las composiciones

$$\mathrm{T}_{ik} = \frac{1}{2}(\gamma_{ik} + \gamma_{ki})$$

con deformación, y el otro estado que obedece a los

$$\mathrm{H}_{ik} = \gamma_{ik} - \gamma_{ki}$$

encierra la rotación y el fenómeno de « magnetismo ».

Trataráse de señalar la importancia de este hecho. Los (H_{ik}), en cierto período, *o fase de la evolución ascendente* astral (en este caso el foco), han predominado, llegando a un valor hamiltoniano estacionario, y luego descendiendo pasan a «segunda categoría». Los (T_{ik}), inversamente, pasando de categoría ínfima, y creciendo, recién entran a predominar cuando los (H_{ik}) alcanzan al punto estacionario, y desde ese momento, en adelante, predominan gradualmente, etc. Pero ya tiene *rotación* axial el astro, por efecto de los (H_{ik}), predominantes *al principio :* densificación mínima infinitesimal. Fácil es percibir, por efecto de densificación, dos procesos :

$$\text{Polaridad} \begin{cases} \text{giroscopía magnética,} \\ \text{giroscopía dinámica o mecánica,} \end{cases}$$

y como resultante de la desigual marcha de los (H_{ik}) y de los (T_{ik}) : *una divergencia,* que se traduce en un eje de rotación dinámica no coincidente con el eje magnético.

Siendo este fenómeno de carácter general, invariante, debe poderse observar en cualquier astro. La *deformación* y *rotación* determinan el fenómeno de la *rotación zonal heterogénea,* i. e.: *el astro se divide en fajas zonales, dotadas de diferentes tensores lineales,* como *características de movimientos angulares respectivos.* Recordar siempre que la velocidad, o movimiento angular, es *un tensor lineal* y no un vector, como se acostumbra creer.

La inclinación del eje de rotación mecánico, relativamente al magnético, es el fenómeno a que responde nuestra inclinación axial relativamente a la eclíptica. Concretándonos a nuestro caso terrestre, como ejemplo de mayor interés, se observa lo siguiente: nuestro eje de rotación « magnético » y nuestro eje de rotación « dinámico » deben *no coincidir.*

El ángulo entre uno y otro oscila, aproximadamente, al rededor de 23°. No siendo homogéneo nuestro planeta tampoco podrán estos dos ejes intersectarse en el centro de figura de la densificación (tierra). El eje magnético siendo llevado por el movimiento mecánico describe un cono de dos napas, como es evidente.

La observación nos demuestra claramente que los (H_{ik}) no son magnitudes constantes en nuestro planeta; existe variación fásica. Esto es muy importante, puesto que podemos deducir una serie de consecuencias que interesan de cerca a la humanidad, y que están a nuestro alcance.

Quiere decir, pues, que sabemos perfectamente que los valores de los (H_{ik}) son variables. Hay fluctuaciones de corto período, dentro de la marcha harmónica secular. Refiriendo estas fluctuaciones al tiempo planetario

$$\frac{dH_{ik}}{dt} = a$$

podemos, por medio de la observación de a, conocer el comportamiento de la perturbación. Dos ejemplos: siendo a periódico, durante un intervalo relativamente largo tendríamos

$$\frac{dH_{ik}}{dt} = \text{periódico},$$

y diríamos que, en virtud de una conocida *ley de áreas,* la causa perturbadora puede describir una órbita plana al rededor de nuestro planeta. Este es un caso; el otro sería el recíproco: nuestro planeta describiendo la órbita al rededor de la causa. En el primer caso estaría

nuestro satélite *la luna,* y en el segundo nuestro sol. Las demás fluctuaciones sometidas a un proceso de « análisis harmónico » darían como resultado la posible ubicación de los « perturbadores » en el *continuum* mayor. He aquí, pues, una razón de fundamento para el estudio continuado y prolijo del fenómeno magnético. Fácil será al lector descubrir la razón matemática de las órbitas, geodésicas, planas, si tiene en cuenta que una aceleración angular periódica puede corresponder a una superficie paramétrica plana de homofocales, etc.

Pongamos ahora atención en los T_{ik}. Estos son los que acusan movimientos de *deformación material.* Decimos, ahora, que de acuerdo con nuestra teoría natural de la *focalización,* como origen de vida astral, y la *repetición* de *una* acción de gravitación en distintos puntos del *continuum supra,* como *fons et origo* de esta *concentración :* existe *una íntima y absoluta relación entre* tres cosas : los *focos emisores* dispersos, nuestro *continuum mayor* con su período μ de cohesión y la *focalización* o *apilamiento,* i. e., *densificación.* Sin entrar en detalles, que después estudiaremos, diremos que todo fenómeno perceptible sobre la superficie de la tierra responde a *una alteración perturbadora exterior.* Estas alteraciones pertenecen a todos los órdenes de magnitud, desde el infinitamente pequeño hasta lo infinitamente grande (para nosotros).

La geología de nuestro planeta y la configuración superficial de la costra contiene la historia y marcha del proceso de evolución. *Nada sucede espontáneamente.* Todo está escrito (densificado) y todo está archivado, y el proceso sigue continuamente, no hay más que abrir los ojos y leer. En otra digresión indicaremos cómo el ser humano y la vida orgánica contienen un magnífico « plano » de la evolución. ¿ Quién diría que la distancia de nuestros ojos del plano meridiano de simetría lateral nos habla sobre la « velocidad angular del movimiento de rotación axial de nuestro planeta » ? ¿ Quién sospecharía que no tenemos dos cabezas ciclópeas debido a una simple ley mecánica de composición de movimientos harmónicos de períodos diferentes ?

DIGRESIÓN 0.62

Composición recíproca

Teniendo en cuenta notación y significado usuales, si se tiene:

$$c_x = a_i \xi^i$$

$$c_y = b_i \eta^i$$

$$(c_x{}^1 c_y{}^2) = a_i b_k \xi^i \eta^k = \gamma_{ik}$$

$$(c_x{}^2 c_y{}^1) = a_k b_i \xi^k \eta^i = \gamma_{ki}$$

$$2\mathrm{T}_{ik} = \gamma_{ik} + \gamma_{ki}; \qquad \mathrm{H}_{ik} = \gamma_{ik} - \gamma_{ki}.$$

Métricamente:

$$(c^2) = \sum_{ik}^{n} g_{ik} \xi^i \xi^k$$

$$\xi^i = (c \,.\, e_i),$$

covariación escalar.

$$g_{ik} = g_{ki} \qquad \xi^i = g^{ik} \bar{\xi}_k$$

$$|g_{ik}| \neq 0 \qquad \xi_i = g_{ik} \bar{\xi}^k.$$

Si, pues, la composición que penetra en el *continuum* es la de los T_{ik}, aquella que es recíproca complementaria es la de los

$$\mathrm{T}^{ik} = g^{ir} g^{ks} \mathrm{T}_{rs}$$

y si penetran los H_{ik} se tendrá la recíproca

$$\mathrm{H}^{ik} = g^{ir} g^{ks} \mathrm{H}_{rs}.$$

Teniéndose siempre los estados estacionarios de deslinde:

$$\mathrm{T}^{ik}\mathrm{T}_{ik} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{H}^{ik} \,.\, \mathrm{H}_{ik},$$

esto es:

$$\mathrm{T}^{ik} \,.\, \mathrm{T}_{ik} = |\mathrm{T}|$$

$$\mathrm{H}^{ik} \,.\, \mathrm{H}_{ik} = |\mathrm{H}|$$

formas muy conocidas en cálculo tensorial.

Si

$$c_x = a_i \xi^i$$

se transforma en

$$c_x = \bar{\alpha}_i \bar{\xi}^i$$

tendrá, forzosamente, que ser

$$\sum_i a_i \xi^i = \sum_i \bar{\alpha}_i \bar{\xi}^i,$$

quiere decir que si

$$\bar{\alpha}^i = \lambda_i{}^k a_i$$

entonces

$$\xi^i = \lambda_k{}^i \bar{\xi}^k,$$

o sea, con el signo usual de suma

$$\bar{\alpha}^i = \sum_k \lambda_i{}^k a_k$$

$$\xi^i = \sum \lambda_k{}^i \bar{\xi}^k$$

$$i = 1, 2, ..., n, \qquad |\lambda_i{}^k| \neq 0.$$

Aquí tenemos, pues, expresadas matemáticamente las formas invariantes en que se producen los fenómenos de aferencia y eferencia : de propagación de gravitación sea luminosa, obscura, térmica, eléctrica, etc. Siendo los T_{ik} y los H_{ik}, las formas tensoriales básicas más simples de todo *quantum* material focalizado.

Oportunamente comprenderemos que la explicación matemática del fenómeno cerebral que llamamos *atracción* reside en «una reciprocidad» y que, por ejemplo, electricidad positiva y electricidad negativa, no son sino dos formas recíprocas, una de la otra, dos propagaciones contravariantes.

DIGRESIÓN 0.635

Percepciones. Focalizaciones

El eminente sabio matemático inglés A. Cayley presidió la reunión de la *British Association for the Advancement of Science* en 1883. Hizo un discurso inaugural, magistral, resumiendo el estado de la ciencia en su día y llamando la atención a las nuevas ideas espaciales de Riemann.

Fué en los preámbulos de ese discurso que Cayley despachó, con cierta ligereza, los fundamentos filosóficos de las matemáticas y con-

solidó la funesta teoría corriente de que la geometría era una ciencia abstracta, engendrada por nuestro cerebro de una manera especialísima, que nada tenía que ver con las cosas reales del mundo. Así, pues, nacieron los conceptos de punto matemático, línea, plano, etc.

Cayley existió en el tiempo de la «acción a distancia». Esto explica su error y sobre todo su ligereza en aceptar «axiomas» corrientes. Admitió *un salto* desde el cero de impercepción hasta el finito de percepción consciente. Para él terminaba la perceptibilidad con el *punto visible,* que sabía ser una magnitud finita, y así la definía.

Sobre la base de la *repetición* procedemos a corregir este error y reconstruir el edificio científico. Llegaremos al siguiente resultado: *no hay geometría abstracta,* como la concibió Cayley.

Sencillísimamente, decimos: una percepción es el fenómeno cerebral que responde a una acción exterior, en nuestro *continuum* mayor ambiente. Acción es repetición; por lo tanto, percepción y acción se corresponden exactamente. En otras palabras, nuestras percepciones arrancan desde *un límite inferior, cero, de acción exterior* y crecen en *intensidad* con la acción hasta adquirir un valor que pertenece al *orden de magnitudes conscientes* y que llamamos finito consciente. Estas percepciones pueden, con la acción exterior, seguir creciendo en magnitud hasta un cierto límite, pasado el cual sobreviene nuevamente la inconsciencia o indeterminación. Resulta, pues, que lo que desaparece es *el orden finito de magnitud consciente,* y *no la percepción.* Por esto puede *abstraer* el cerebro.

Este fenómeno tiene su réplica en el siguiente ejemplo, ya citado en otra parte, la «difracción de la luz». Ya vimos que en un monte de árboles la luz se proyecta en círculos, elipses, etc., sobre el suelo o plano de proyección. Si aproximamos el plano de proyección a los intersticios, entre hojas, por donde penetra la luz solar, notaremos que a cierta distancia se deformarán esas cónicas y se asomarán, nítidamente, los contornos de los intersticios. Precisamente, es *a esta transición* que corresponde lo que hemos llamado: *orden de magnitudes conscientes, o punto consciente. Es así* cómo las percepciones, creciendo en intensidad progresivamente, asoman al *orden consciente* de nuestro cerebro.

Quiere decir todo esto, simplemente, que nosotros existimos en la más completa e íntima relación, o contacto, con el *continuum* espacial ambiente, universal. *Toda acción — absolutamente toda acción — en nuestra vecindad ambiente, penetra a nuestro cerebro* por los conductos de aferencia que llamamos sentidos, *se focaliza* y produce densificación

infinitesimalmente (continuidad), a lo cual sigue la eferencia interior en nuestro *quantum* corpóreo.

Esto es de una importancia trascendental. Decimos con Locke: *nisi ipse intellectu quod prius non fuerit in sensu,* y exclamamos: *¡ Mirabile dictu !* Nos hemos, así, emancipado de la clásica escuela de acción a distancia, i. e., las discontinuidades, etc.

Vemos, en consecuencia, que no hay tal « geometría abstracta », y que tal frase carece de sentido. Cuando estudiamos el problema de la curvatura espacial y de los espacios esféricos derivados del espacio *incoherente,* o sin cohesión, euclideano plano, hemos de darnos cuenta que así como nace una dimensionalización, o un *quantum,* en una forma continua y evoluciona, nace igualmente un astro en el firmamento y evoluciona; y así también nacen nuestras percepciones, por acciones infinitesimales exteriores inmediatas, y evolucionan produciendo el fenómeno colosal que Aristóteles, el Estagirita, llamó νόος. En otras palabras, tenemos « actividad intelectual », y conservamos el compás de la evolución universal, por *la continuidad de nuestras percepciones.*

Pues, si *percepción* responde a acción, y acción es repetición, entonces *el número, siendo símbolo de repetición, encierra la explicación matemática de la fenomenología perceptible.* Esto lo hemos de desarrollar en otra digresión. El misterio está en *la acción.* De paso, diremos que el estudio de las propiedades del *número,* es quizá el más difícil de los estudios matemáticos y que aún está sin solución el problema de los números primos entre dos límites numéricos dados. Este problema tiene como similar aquel otro relativo al número de invariantes independientes de una cuantica cualquiera entre dos límites de órdenes — grados — determinados, que resolvió admirablemente Cayley para el caso de una binaria.

Resumiendo, vivimos en el más absoluto e íntimo contacto con el *continuum* ambiente mayor. *Este contacto con el ambiente es lo que constituye el fenómeno de nuestra perceptibilidad,* y no nos fundimos con este ambiente por una ley de conservación de curvatura que veremos oportunamente. *Somos una focalización* y nuestra existencia obedece al siguiente esquema hueco :

$$\text{Existencia} = \begin{cases} \text{Aferencia espacial,} \\ \text{Focalización,} \\ \text{Eferencia espacial.} \end{cases}$$

Somos, pues, como el mismo sol. Simplemente: *somos un continuum de repetición* en todos los órdenes de magnitudes.

DIGRESIÓN 0.6355

Manchas solares. Eclipses por aferencia

La repetición nos permite formular la siguiente teoría, de fácil comprobación, respecto a las manchas solares y sus períodos: máximos y mínimos.

Ya se ha explicado que un astro, como el sol, es una focalización espacial de acciones, por *aferencia,* y una radiación de las mismas, *compuestas,* por *eferencia.* Siendo la eferencia la componente *kinética* de una invariación, cuya componente recíproca *dinámica* se propaga en el foco y *densifica* en el mismo. Vamos ahora a formular una prueba práctica de este proceso de focalización. Supongamos que sea exacto; entonces es evidente que si alguna densificación espacial (materia) *obstruyera la corriente aferente* se debería producir *una divergencia del estado normal,* dentro de la zona determinada por *la proyección del obstáculo, por los rayos aferentes, sobre la focalización,* i. e., la foto-esfera solar. Siendo esto evidente, pasemos a observar la posible naturaleza de esa corriente aferente solar y de determinar las proyecciones de los obstáculos más cercanos, o sea los grandes planetas del sistema solar.

Miremos al cielo y observemos *la faja galáctica,* o vía láctea. Percibiremos que si el sol recibe una corriente de acciones aferentes, *esta corriente debe ser más densa dentro del espacio conoidal determinado por la proyección central de la faja, desde el centro del sol,* que fuera de esta zona espacial.

Observando más detenidamente, nos damos cuenta que esta faja galáctica puede simbolizarse geométricamente como la *traza de dos planos paralelos sobre una esfera,* cuyo centro fuese ocupado por el sol. Y también podemos simbolizar, sobre la misma esfera, la faja del *sistema planetario* con un par de planos paralelos, comprendiendo todos los planos orbitales planetarios. Si ahora nos fijamos en la situación relativa de estas dos trazas descubriremos que, *con relación a la esfera, una es la polar de la otra,* muy aproximadamente. Quiere decir que la faja galáctica pasa, aproximadamente, por los polos de la eclíptica. Es así, y sabemos que en el polo sur la faja se interrumpe, presentando un aspecto de menor espesor, muy notable.

Todo esto conduce a la siguiente consideración final: *que cuando*

un planeta penetra el espacio conoidal, ya descrito, su sombra aferente sobre el foco solar será más intensa que cuando se halla fuera del conoide. De aquí que sea posible calcular, con mucha facilidad, aquellas *anomalías orbitales interesantes de penetración, estacionamiento y emersión al conoide,* para los planetas mayores, i. e., Saturno y Júpiter, a ambos lados de sus respectivas órbitas, y así comparar estos cálculos con la observación de las manchas solares. Calcular las conjunciones, parciales o totales, dentro del conoide, etc., y comparar resultados con la observación. Estos cálculos habrían de dar los períodos de máximos y mínimos en todos los órdenes de frecuencias o magnitudes; sólo habría que calcular las inmersiones y emersiones para todos los demás planetas del sistema solar.

Como el sol tiene un movimiento de rotación axial, estamos en un problema de análisis harmónico, muy parecido al de las mareas sobre nuestro planeta.

Para hallar *el efecto* de la mancha sobre nuestro planeta, basta dibujar la traza de la mancha *proyectada desde el centro de la tierra,* sobre la superficie del planeta mismo; *problema que requiere especialmente tomarse en cuenta dos movimientos de rotación diferentes.* La traza de esta proyección, pasando por una zona terrestre volcánica, sin duda daría lugar a fundadas aprehensiones, etc.

Es de esta manera que la *repetición* resuelve el problema de *las manchas solares.* Pero no termina aquí el alcance de nuestra invariante universal.

Supongamos que, *así como el sol densifica al cuerpo humano* (como ya se explicó), *también densifica a los planetas de su sistema.* Esperaríamos encontrar el efecto del conoide galáctico traducido en una correspondiente densificación por eferencia sobre cada uno de los planetas así:

1° La densificación sobre la foto-esfera solar sería máxima según la traza del conoide, harmonizada por la rotación axial del sol;

2° La desigual constitución de la faja galáctica y su interrupción en el polo sur haría que en el sol hubiera *más densificación en el hemisferio norte solar que en el hemisferio sur,* con la característica de estar dirigida la faja de densificación según un meridiano solar, i. e.: *densificación según husos dirigidos de norte a sur, solar.* Esto se traduciría fielmente en los planetas del sistema en los cuales esperaríamos encontrar *exceso de protuberancia terrestre en un hemisferio* (norte) *relativamente al otro hemisferio, y estas protuberancias dirigidas de norte a sur.*

Sencillamente, todo esto sale de la ley invariante de que *nuestro universo es un continuum de repetición.* Todo se repite, en todos los órdenes de magnitudes. Un país se densifica por la obra humana, de la misma manera que el universo perceptible. Una ciudad es una focalización de orden mayor que una villa que obedece la misma ley, y así también es nuestro cerebro una focalización, y nuestro sol. Densificación infinitesimal, universal.

DIGRESIÓN 0.636

Relaciones proyectivas y métricas

Nadie ignora esta división natural de problemas analíticos. Tan natural es, que ha cesado de llamarnos la atención, pues en cierta manera parecen ser el uno complemento del otro. Sin embargo, esto no es así y la división obedece a nuestra configuración cerebral. Relaciones proyectivas son las relaciones basadas sobre *percepciones kinéticas o visuales.* Éstas no son alteradas por proyecciones y sabemos que transformar linealmente *es proyectar,* ni más ni menos. Relaciones métricas son las que dependen de *nuestra percepción dinámica, o tacto, con o sin intervención de la visión.*

Relacionar la « proyectiva » con la métrica ha sido el objeto de la ciencia desde los días de Riemann. Si mal no recordamos, fué Poncelet el primero en notar la propiedad analítica de los círculos como curvas semejantes que tienen, *todos,* comunes dos puntos imaginarios en el infinito. Es hoy una conocidísima propiedad y se designan esos puntos como puntos circulares al infinito. Si tenemos presente que una recta es un caso límite del círculo, podemos extender a la recta lo anterior, diciendo que toda recta corta al *absoluto* en dos puntos, i. e., los dos puntos circulares anteriores. Bien conocemos la relación entre estos puntos circulares y las cónicas, y en especial los focos y directrices de las mismas. La analítica de Salmon abunda en propiedades de estos puntos. Pero notemos que *una distancia entre dos puntos* puede expresarse como *una relación anarmónica entre estos dos puntos y los dos circulares de la recta que los une;* y notemos que esta relación *es invariante.* Fácil es fundar toda la geometría sobre esta fundamental métrica, o distancia entre dos puntos, como sabemos y se hallará explicado en el texto en otro lugar. Aquí, pues, tenemos *un*

vínculo entre relaciones proyectivas y relaciones métricas. *Necesitamos valernos del absoluto* para poder pasar de una clase de problemas a la otra. Y esto lo hace, *naturalmente, nuestro cerebro.* Esto es, *relaciona las percepciones conscientes kinéticas, o visuales, y las dinámicas, o de tacto.*

Esta intervención del « absoluto » es muy interesante. Fijémonos en el modelo Klein plano y luego generalizaremos para un espacio, siguiendo el método de Cayley, eligiendo una superficie umbilical como absoluto. Vemos que en el plano Klein *dos rectas no se cortan necesariamente* y que por un punto cualquiera *podemos trazar una infinidad de rectas que no cortan a otra del plano.* Euclides, en su célebre postulado, nos enseñaba que sólo era posible trazar por un punto dado una recta que no cortara a otra, i. e., la paralela — se entiende en un plano.

Ahora, si tenemos todo esto en cuenta, y también lo recién dicho acerca de la deducción de relaciones métricas de las relaciones proyectivas, valiéndonos de *una forma cuadrática, como absoluto,* podemos ocuparnos de nuestro cerebro, matemáticamente. Claro está que cuando llamamos al absoluto: una forma cuadrática, lo hacemos en todo el sentido más lato y general posible, sin precisar si los términos de la cuadrática son positivos o negativos, esto es, *los supondremos siempre* de origen *positivos,* admitiendo que pueden ser imaginarios o complejos en casos especiales.

Hemos dicho, pues, que nuestro cerebro focaliza por aferencia las percepciones. Estas percepciones pueden ser *kinéticas o luminosas puramente,* y las focalizamos por nuestra *visión, kinéticas* y *dinámicas, mixtas,* y las focalizamos en forma mixta por medio de *visión* y *tacto, dinámicas o materiales cohesivas puramente,* y las focalizamos por nuestro *tacto.*

Ahora, ¿cómo se demuestra que podemos tener *aferencias exclusivas de visión,* independientes del tacto, en un extremo fásico, y *aferencias exclusivas de tacto, independientes de visión,* en el otro extremo? La prueba del fenómeno es muy sencilla. Supongamos, con Locke, un ciego acostumbrado a distinguir por tacto entre *una esfera* y *un cubo.* Si colocamos éstos sobre una mesa y milagrosamente concedemos al hombre su *visión, no podrá decir cuál es la esfera, ni cuál el cubo,* como es evidente. *Sólo podrá hacerlo después de tocarlos, mirándolos.* He aquí, en breves palabras, condensado el significado del absoluto cerebral. La recíproca es también exacta.

Quiere decir que las aferencias de visión pura y tacto puro no se

intersectan *en el finito consciente* y *sólo pueden hacerlo en el absoluto*, i. e., *mirando y tocando a la vez*. Descubrimos así que pueden haber una infinidad de percepciones aferentes que no intersectan a otra determinada, así como en el modelo de Klein pueden haber una infinidad de rayos por un punto que no cortan a otro en el plano, *y que sólo podrán relacionarse en el absoluto, cortándose allí.*

Todo esto es lo mismo que sentar lo ya observado, i. e., *no existe geometría abstracta.* El cerebro no posee un mecanismo especial, diferente de nuestra perceptibilidad, para « engendrar lo abstracto ».

Comprendido esto, se comprende el dilema de Riemann, quien encontró imposible conciliar los conceptos básicos de:

$$\textit{Situar} \text{ con la métrica de } \begin{cases} \textit{contar,} \\ \textit{medir,} \end{cases}$$

ahora nos damos cuenta del por qué de esto.

El lector podrá interpretar fácilmente el significado matemático de *la invariación de la forma fundamental cuadrática pitagórica,* i. e.; es condición de transformaciones lineales infinitesimales *que no alteran la estructura puntual del elemento espacial,* esto es, *que no alteran la densidad escalar constante* del elemento, o lo que es lo mismo: *que no alteran la curvatura esférica del elemento.* Pues se ha de ver, en la otra parte, la demostración analítica del teorema que: todo espacio continuo es esférico constante en sus elementos espaciales infinitesimales, etc. Alterar la curvatura espacial es alterar la densidad y, por lo tanto, su estructura puntual: cambiar la forma métrica fundamental.

$$ds^2 = \sum_{ik}^{n} g_{ik}\xi^i\xi^k = \sum_{i}^{n} \xi^i\xi_i$$

$$g_{ik} = g_{ki}$$

y en un sistema normal geodésico en $P = (x_i)$ se tiene *la escalar Riemann de curvatura:*

$$R = g_{ii\,.\,kk} - g_{ik\,.\,ik}$$

$$g_{ik\,.\,rs} = \frac{d^2 g_{ik}}{dx_r \,.\, dx_s}$$

$$g_{ik} = g^{ik} \qquad \text{y} \qquad g_{ik}g^{ik} = g^{ik}\,.\,g^{ik} = 1$$

como se sabe.

En síntesis: *no hay geometría abstracta y nuestro universo perceptible es un continuum de repetición, siendo el número, símbolo de repetición.*

DIGRESIÓN 0.64

La solución

Einstein formuló su ecuación hamiltoniana

$$\int G \, . \, dx = \frac{1}{2} \int R \sqrt{g} \, . \, dx$$

basándose en una simple *analogía intuitiva,* que puede expresarse como sigue: la correspondencia entre *substancia* y *acción eléctrica*, debe ser una propiedad invariante que subsiste entre *materia* y *gravitación,* esto es, sintéticamente, la solución einsteniana. Se ha visto que esto es exacto. La dificultad enorme que tuvo que vencer Einstein no dependía de él sino de un defecto *del instrumento de análisis que utilizaba.* Realmente causa admiración la forma en que el sabio alemán formuló la expresión escalar

$$\frac{1}{2} R \sqrt{g},$$

fué un triunfo de sagacidad y habilidad matemática. Hasta este momento, recorriendo el camino seguido por Einstein para descubrir esta invariante de curvatura, el autor de la presente está convencido que el método resultó de un proceso «inverso» de razonamiento, como esas obras que se principian por el final y se remontan por retrogradación. Quiere decirse, que Einstein empezó por sentar que existía una forma posible de expresión

$$R = g_{ik \, . \, ik} - g_{ii \, . \, kk}$$

en un sistema ortogonal coordenado, geodésico, en un punto O, y por medio de transformaciones sucesivas remontó a una expresión original de carácter general

$$T = \sum \lambda_{ik \, . \, rs} g_{ik \, . \, rs} + \lambda = - aR + \lambda,$$

en la que existe simetría doble:

$$\lambda_{ik \, . \, rs} = \lambda_{ik \, . \, sr}$$

$$\lambda_{ki \, . \, rs} = \lambda_{ik \, . \, rs}$$

y

$$g_{ik \, . \, rs} = \frac{d^2 g_{ik}}{dx_r \, . \, dx_s}$$

etc. (notación del profesor Weyl), dejando así demostrada la posibilidad de fundar una invariante escalar de curvatura Riemann, que contuviera las derivadas de segundo orden de g_{ik} en forma lineal solamente, y no pasando de este orden. Este fué un triunfo de análisis formidable.

Soldar la mecánica y la electricidad en una sola entidad fué imposible tarea. *Esta es la solución verdadera buscada* y esta es la solución que hemos obtenido gracias a la invariante universal, base de toda la fenomenología perceptible consciente, o sea, la repetición.

Elijamos un punto cualquiera como centro de propagación

$$P = (x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

sea t el tiempo planetario, f un potencial escalar, μ *una densidad escalar de cohesión,* teníamos:

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^i f_i = v^i \mathbf{p}_i$$

$$\mathbf{p}_i = \mu f_i \qquad f_i = \frac{df}{dx_i}$$

$$\mathbf{s}^i = \mu v^i \qquad v^i = \nu^i = \text{comp. vect. veloc.}$$

donde se observa que la densidad escalar invariante de la traza luminosa puede estudiarse desde dos puntos de vista que son *recíprocos*: *¡ mecánica y electricidad !* Esto es verdaderamente colosal y nos demuestra que tanto la substancia material como la substancia eléctrica y sus respectivas « acciones » no son más que *una cosa en el fondo.*

Esta cosa es *repetición.* Aquí, pues, tenemos el *centrum centrorum* que se buscaba, y aquí está la gran solución.

Para hacer ver esto vamos a indicar someramente cómo por un simple cambio de fraseología matemática, deducimos todas las formas de la teoría de Mie, a la par de las formas clásicas mecánicas. Nada puede ser más sencillo y más claro.

Consideremos a

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^i f_i = v^i \mathbf{p}_i$$

ahora tomemos el punto de vista eléctrico; se ve que la hamiltoniana es:

$$\int_G \mathbf{c}\, dx = \int_G (\mathbf{s}^i f_i)\, dx = \int_G (v^i \,.\, \mathbf{p}_i)\, dx.$$

Aplicando los principios conocidos tenemos:

$$\mathbf{s}^i = \mu s^i = \frac{d\mathbf{H}^{ik}}{dx_k}$$

en que

$$\mathbf{H}^{ik} = \mu \mathrm{H}^{ik}$$

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{F}_{ik} s^k,$$

donde

$$\mathbf{F}_{ik} = \mu \mathrm{F}_{ik}$$

según la notación de Weyl, campo electro magnético. La hamiltoniana estacionaria da por variación

$$\delta \int_G \mathbf{c} dx = 0,$$

de donde:

$$\int_G \delta (\mathbf{s}^i f_i)\, dx = 0$$

$$\int_G \delta (v^i \,.\, \mathbf{p}_i)\, dx = 0,$$

que nos dan las condiciones cuyas formas son muy familiares en el campo eléctrico:

$$\frac{\partial \mathbf{s}^i}{\partial x_i} = 0$$

$$\delta (\mathbf{F}_{ik} s^k) = 0,$$

o sea:

$$\frac{\partial \mathbf{s}^i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{F}_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathbf{F}_{ik}}{\partial x_l} = 0,$$

que son las ecuaciones básicas, o fundamentales, que sirvieron como punto de partida a Mie para formar su célebre invariante L.

Adoptemos ahora el *punto de vista dinámico, mecánico, material:*

$$\mathbf{c} = \mu v^i \,.\, f_i = v^i \mathbf{p}_i \qquad \mathbf{p}_i = \mu f_i$$

$$\int_G \mathbf{c} dx = \int_G (\mu v^i \,.\, f_i)\, dx = \int_G (v^i \mathbf{p}_i)\, dx,$$

aplicando el principio de variación tenemos fácilmente:

$$\delta \int_G \mathbf{c} \,.\, dx = 0,$$

de donde:

$$\frac{\partial (\mu v^i)}{dx_i} = 0 \qquad (a)$$

$$\delta [\mathbf{p}_i] = \delta [\mu f_i] = 0 \qquad (b)$$

en que reconocemos en (a) la ecuación de continuidad de propagación material y en (b) la de conservación de acción. Esta última ecuación es la que encierra la gravitación einsteiniana, como es natural. Para poner esto en evidencia no tenemos más que aplicar las siguientes transformaciones conocidas, que no requieren mayor comentario:

$$\partial(\mu f_i) = \partial \,.\, \mathbf{p}_i = \partial\left(\frac{d\mathrm{T}_i^k}{dx_k} - \Gamma_{i\beta}{}^{\alpha}\mathrm{T}_{\alpha}{}^{\beta}\right) = 0,$$

pues, se recordará que

$$\mathbf{p}_i = \frac{d\mathrm{T}_i^k}{dx_k} - \Gamma_{i\beta}{}^{\alpha}\mathrm{T}_{\alpha}{}^{\beta} = \frac{d\mathrm{T}_i^k}{dx_k} - \frac{1}{2}\frac{dg_{\alpha\beta}}{dx_i}\mathrm{T}^{\alpha\beta},$$

puesto que, como se sabe:

$$\Gamma_{\alpha\,.\,i\beta}\mathrm{T}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} i\beta \\ \alpha \end{bmatrix}\mathrm{T}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{dg_{\alpha\beta}}{dx_i}\mathrm{T}^{\alpha\beta},$$

donde

$$\Gamma_{i\beta}{}^{\alpha} = \begin{Bmatrix} i\beta \\ \alpha \end{Bmatrix} = g^{\alpha r}\Gamma_{r\,.\,i\beta} = g^{\alpha r}\begin{bmatrix} i\beta \\ r \end{bmatrix}$$

son símbolos de Christoffel.

Pero la condición arriba consignada

$$\partial\left(\frac{d\mathrm{T}_i^k}{dx_k} - \frac{1}{2}\frac{dg_{\alpha\beta}}{dx_i}\mathrm{T}^{\alpha\beta}\right) = 0$$

es la ecuación de conservación einsteiniana, que contiene la « divergencia por curvatura esférica ». En una palabra, contiene el célebre término cosmológico que estudia Weyl.

Resumiendo, pues, tenemos:

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^i f_i = v^i \mathbf{p}_i$$

y la hamiltoniana:

$$\int_{\mathrm{G}} \mathbf{c} \,.\, dx = \int_{\mathrm{G}} (\mathbf{s}^i f_i)\, dx = \int_{\mathrm{G}} (v^i \mathbf{p}_i)\, dx$$

que nos dan:

$$\text{Electricidad (teoría de Mie)} \begin{cases} \dfrac{d\mathbf{s}^i}{dx_i} = 0 \\[2ex] \dfrac{d\mathbf{F}_{kl}}{dx_i} + \dfrac{d\mathbf{F}_{li}}{dx_k} + \dfrac{d\mathbf{F}_{ik}}{dx_l} = 0, \end{cases}$$

en que:

$$\frac{d\mathbf{H}^{ik}}{dx^k} = \mathbf{s}^i = \mu s^i$$

$$\mathbf{F}_{ik} = \mu\left(\frac{df_i}{dx_k} - \frac{df_k}{dx_i}\right)$$

y, por otra parte :

$$\text{Mecánica material} \begin{cases} \dfrac{d(\mu v^i)}{dx_i} = 0 \\ \delta\left(\dfrac{dT_i^k}{dx_k} - \dfrac{1}{2}\dfrac{dg_{\alpha\beta}}{dx_i} T^{\alpha\beta}\right) = 0 \end{cases}$$

que contiene la teoría einsteiniana de gravitación.

En otra digresión haremos la deducción de la escalar de curvatura Riemann, y del término cosmológico de Einstein partiendo del principio que un espacio arbitrario *es esférico en sus elementos infinitesimales espaciales.*

Hay que interpretar a los g_{ik} como corresponde, recordando que

$$c = s^i . f_i$$

es una propagación con aspecto de *magnitud lineal de desplazamiento.* Esto es, c es *una densidad de puntos invariantes* de *una dimensión,* o mejor, c, es una densidad unitaria invariante que representa la traza de una *repetición de puntos.*

Vemos, pues, que la solución de nuestra fenomenalidad consciente, física, reside en la sencillísima expresión de una *repetición :*

$$c = \nu . \lambda.$$

Propagación = velocidad de repetición por *cosa producida.*

CAPÍTULO VIII

El continuum

Hay una cierta propiedad en concebir un espacio de n dimensiones constituído por puntos, puesto que la definición matemática de un punto es precisamente la « ausencia de dimensiones ». Así, pues, supongamos un espacio multidimensional de puntos y elijamos un punto cualquiera. A este punto le asignamos n números arbitrarios que no tienen significado determinado alguno por el momento. Llamaremos a estos n números las « coordenadas del punto P elegido». Numerado el punto P procedemos a la numeración de los demás puntos en una forma tal que las coordenadas de un punto P′ infinitamente próximo a P difieren respectivamente de las coordenadas

del punto P en un infinitamente pequeño del mismo orden que la distancia que los separa. En esto consiste la continuidad, y por esto se denomina *continuum*. Comprendemos *ab initio* que la forma de numeración del primer punto P determina una característica del *continuum*, pero esto es sólo en apariencia, puesto que, con una transformación adecuada de coordenadas podemos hacer variar, *ad libitum*, estos números. Así que, en este espacio n dimensional la única propiedad determinada que alcanzamos a percibir es la continuidad, esta es invariante. La noción matemática así expresada es exacta, y no admite ambigüedad alguna de interpretación. Quiere decir, pues, que si adoptamos una representación numérica que llamaremos « sistema de coordenadas » (nada tiene que ver con ejes, ni vectores, etc.), podemos, mediante cualquier operación matemática continua y derivable, con derivadas también continuas, pasar del sistema de coordenadas adoptado a otro nuevo, *ad libitum*, si conocemos las formas

$$x_i = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_n) \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

o ecuaciones de transformación, en que (x_i) son las coordenadas antiguas y $(\bar{x}_i)$ las nuevas siendo (f_i) las funciones de transformaciones que expresan la posición de un punto invariante en los dos sistemas de numeración.

A la forma absolutamente arbitraria de numeración coordenada continua, adoptada, suministramos, así, una especie de « mecanismo matemático » que nos permite manejar al *continuum* con una eficacia o eficiencia notable; pronto hemos de verlo. Una transformación de coordenadas representa físicamente una deformación del *continuum*, ni más ni menos.

Nuestro *continuum* tiene, pues, un carácter espacial. Cada uno de sus puntos está numerado con n coordenadas, que pueden variar *ad infinitum* mediante transformaciones simbólicamente representadas así:

$$x_i = \bar{f}_i(\bar{x}_k) = \bar{\bar{f}}_i(\bar{\bar{x}}_k), \text{ etc.} \qquad k, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Podemos imaginar que estas coordenadas varían incesantemente y continuamente, por efecto de transformaciones continuas e incesantes, y de todas las maneras imaginables y posibles, que encierran como única condición invariante *la continuidad*. Así caracterizado, es lícito decir que la esencia de nuestro *continuum* es *un movimiento*. No es posible evitar la idea de movimiento. (Más aún, se nos ocurre

pensar en ciertos plasmas marinos, esos inmensos aguas-vivas, dotados de la propiedad del elemento deformativo continuo, etc.).

Definamos un movimiento, matemáticamente. Digamos sencillamente: un punto, cuyas coordenadas cambian continuamente de valor y de acuerdo con alguna ley, es un punto que se mueve. Pero el lector comprenderá inmediatamente que podemos producir este « efecto » suponiendo que el punto no se mueve y que el sistema de referencia cambia. El efecto es uno, como se ve: cambio continuo del valor numérico de las coordenadas.

Ahora se comprende el alcance admirable que tiene el concepto de un *continuum* a transformación coordenada continua *ad infinitum* para abarcar todos los fenómenos que derivan del « movimiento variado », tan difíciles de someter al régimen matemático clásico con sus espacios; planos y tridimensionalidad. Estamos en pleno campo de ideas einsteinianas.

Es evidente, como señala Einstein, que si nosotros podemos descubrir leyes matemáticas que se conservan inalterables en un *continuum* que se deforma continua e incesantemente, *ad infinitum* (formas matemáticas invariantes relativamente a transformaciones arbitrarias continuas de coordenadas), podremos declarar haber descubierto « leyes naturales del *continuum* ».

Hemos dicho que si un punto se mueve en un *continuum,* conoceremos el fenómeno por la manera que « cambian de valor numérico sus coordenadas ». También hemos indicado que este cambio de valor numérico de las coordenadas del punto puede ser producido por una transformación continua *ad hoc* del sistema de representación. Deducimos, en consecuencia, que « podemos anular el movimiento de un punto » mediante una transformación continua que altere los valores de las coordenadas en sentido opuesto a las alteraciones producidas por el movimiento. Así tendremos representado matemáticamente el fenómeno de un punto estacionario en un *continuum* deformable arbitrario. ¿ Pero cómo determinar en cada caso la ley de transformación continua, y cómo descubrir las formas matemáticas invariantes relativamente a transformaciones generales ? Este problema monumental también admite una solución relativamente sencilla. Se trata nuevamente de « una hilación de ideas matemáticas » con punto de emergencia en Leibnitz. El cálculo infinitesimal leibnitziano se fundó sobre el concepto de magnitudes infinitamente pequeñas, comparables unas con otras. Según este cálculo, toda cantidad finita se puede considerar como una integral de elementos infinitesimales que son, en el

sentido absoluto, comunes o unitarios. El *dx, dy, dz* que intervienen en el cálculo de la longitud de una curva gausa son siempre los mismos, no cambian de naturaleza, lo que cambia es la manera de usarlas, y a esta manera daremos el nombre adecuado de « fase ». Así, resulta que lo que desfigura una integración, relativamente a la sencillez de sus elementos constituyentes, es el « acoplo de una serie de circunstancias de *fase* posibles y, por lo tanto, de presencia necesaria en una fórmula global que pretende abarcar todas las posibilidades de un fenómeno o problema. ¿Qué es lo que determina la « fase » ? La contestación es en cada caso : *circunstancias exteriores o ajenas ;* exactamente como la causa determinante de la dimensionalidad de una multiplicidad continua riemeniana, es exterior, o pertenece a « otra ciencia ». Pongamos un caso práctico de biología ; consideremos una célula y supongamos que el nucleolo se halla sostenido en el centro de figura de su habitación por medio de una serie de filamentos que representan « líneas de tensión », ya sea compresiva o de tracción. El nucleolo es tensionado en forma simétrica y, por lo tanto, está en equilibrio en su dominio espacial, etc., y ocupa el centro de figura. Aquí tenemos circunstancias iniciales que definen un estado elemental de equilibrio. Supongamos ahora que este nucleolo es iluminado de un lado con un foco de radiación cualquiera. Ya tenemos *la causa exterior*, « alteración de fase ». La desigual acción radiante en el dominio espacial del nucleolo determinará una variación de tensión en los filamentos y, en consecuencia, el nucleolo tomará movimiento dentro de su campo en demanda de una nueva posición de equilibrio, etc.

La acción externa es manifiesta. Podríamos añadir que, de acuerdo con el concepto riemeniano, la película que limita al dominio celular del nucleolo no es más que la historia en acción : « una fase de equilibrio » impuesta por acciones exteriores, sobre un campo de energía determinado.

De acuerdo con el concepto infinitesimal de Leibnitz, una línea curva se concibe engendrada por elementos infinitamente pequeños rectos, y la mecánica clásica ha apropiado el principio para explicar el movimiento variado considerando al mismo como uniforme, unidireccional, en trechos infinitesimales : traslación rectilínea uniforme. Ya vimos que una superficie gausa también puede concebirse compuesta de elementos de superficie plana infinitamente pequeños. Todo descansa sobre el postulado de la distancia elemental infinitesimal *ds*.

El principio infinitesimal de la mecánica clásica para explicar el movimiento variado es el que nos interesa especialmente. Bien sabemos que en un espacio newtoniano de cuerpos libres, el movimiento característico es el de traslación rectilínea uniforme, y que en este espacio alteramos la dirección de una traslación uniforme, y la velocidad constante de la misma, por medio de transformaciones lineales de coordenadas. Resulta de esto que si el movimiento variado puede reducirse a uno de traslación uniforme mediante una reducción al infinitamente pequeño, podemos aplicar el procedimiento a nuestro *continuum* y considerar el movimiento infinitesimalmente. Este procedimiento ha recibido el nombre de « linealización » y es de una fecundidad admirable.

Supongamos que $P = (x_i)$ es un punto del *continuum* y que

$$x_i = f_i(\bar{x}_k) \qquad k, i = 1, 2, \ldots, n$$

son las ecuaciones de transformaciones a otro sistema coordenado arbitrario. Consideremos ahora un punto P′ vecino a P tal que

$$P' = (x_i + dx_i),$$

los dx_i serán coordenadas relativas de P′ respecto a P. Si transformamos, como $\overline{PP'}$ es invariante resulta

$$dx_i = \frac{df_i}{d\bar{x}_1} d\bar{x}_1 + \frac{df_i}{d\bar{x}_2} d\bar{x}_2 + \ldots + \frac{df_i}{d\bar{x}_n} d\bar{x}_n = \sum_k^n \frac{df_i}{d\bar{x}_k} d\bar{x}_k$$

y si los $(\bar{\bar{x}}_i)$ representan otra transformación, tenemos manifiestamente

$$dx_i = \sum_k^n \frac{df_i}{d\bar{x}_k} d\bar{x}_k = \sum_k^n \frac{d\bar{f}_i}{d\bar{x}_k} \cdot d\bar{\bar{x}}_k = \ldots, \text{ etc.},$$

que son formas lineales. Estamos, pues, en pleno terreno de transformaciones lineales y si hacemos la sustitución

$$\alpha_k{}^i = \frac{df_i}{d\bar{x}_k}; \qquad \bar{\alpha}_k{}^i = \frac{d\bar{f}_i}{d\bar{\bar{x}}_k}, \text{ etc.},$$

tendremos

$$dx_i = \alpha_k{}^i d\bar{x}_k = \bar{\alpha}_k{}^i d\bar{\bar{x}}_k = \text{etc.},$$

sobreentendiendo el signo de suma $\sum$.

El lector se dará cuenta ahora de lo siguiente, que no es más que la expresión en lenguaje analítico-matemático de lo ya observado, es de-

cir : pasando del infinitamente pequeño en el *continuum* a transformaciones absolutamente arbitrarias de coordenadas corresponden transformaciones lineales infinitesimales. De manera que formas invariantes en el infinitamente pequeño relativamente a transformaciones lineales son formas absolutamente invariantes relativamente a transformaciones arbitrarias de coordenadas del *continuum*. Aquí, pues, tenemos evidenciado « el poder de la linealización » como instrumento de análisis. Todavía más, reconocemos la correspondencia exacta que existe entre este resultado matemático y el mecánico que nos dice que cualquier movimiento puede reducirse a traslación rectilínea uniforme pasando a trechos o elementos infinitesimales de trayectoria, y así decimos que en estos trechos el cuerpo se comporta libremente, a lo cual, *a fortiori,* tendrá que corresponder un elemento infinitesimal espacial newtoniano, o sea : espacio libre = espacio plano euclideano afín ! El encadenamiento lógico es completo y perfecto ; se trata de una « unidad harmónica ». La idea de Leibnitz lo enhebra todo, es decir : que las magnitudes están caracterizadas por « órdenes » ; aquello que Euclides formuló para el orden finito se mantiene exacto en las generalizaciones si pasamos al orden inmediato infinitamente pequeño.

Se descubre ahora la posibilidad de desarrollar un cálculo tensorial en el *continuum*. No tenemos más que elegir un punto P como « punto de emergencia » y considerar desplazamientos infinitesimales $\overline{PP'}$ (siempre unido al punto P) adoptando en P un sistema vectorial convencional unitario básico $(e_1, e_2, ..., e_n)$. Nada más. Los tensores son ahora tensores en P. Estos vectores básicos corresponden en un todo a los conocidos del espacio plano euclideano afín. Hay una circunstancia que más adelante estudiaremos en detalle, y se relaciona con la conexión métrica del *continuum*. Esto es, adoptado el sistema básico vectorial en P, o sea $(e_1, e_2, ..., e_n)$, y transformando a otro sistema $(e_1\ e_2, ..., e_n)$ mediante una rotación guiada por la matriz A de componentes $(a_k{}^i)$, el cuerpo vectorial infinitesimal en P no experimentará alteración métrica si la determinante de los (a^i), o sea $|a_k{}^i| = 1$. No es necesario que esta determinante sea igual a uno, pero sí es necesario que sea igual a una constante, o que sea constante. Como el lector puede ver, esta circunstancia encierra una condición de *densidad invariable.* Quiere decir, que si llamamos (ξ^i) las componentes infinitesimales de un desplazamiento infinitamente pequeño PP′ en P, y si (e_i) son los vectores básicos del sistema en P, tendremos como antes :

$$\overline{PP'} = X = \sum_{i}^{n} \xi^i e_i,$$

si transformamos con una rotación A $(\alpha_k{}^i)$ será:

$$\bar{e}_i = \sum_{k}^{n} \alpha_k{}^i \bar{\xi}^k; \qquad \bar{\xi}_i = \sum_{k}^{n} \alpha_i{}^k \xi_k; \qquad \xi^i = \sum_{k}^{n} \alpha_k{}^i \bar{\xi}^k;$$

y como se sabe:

$$\alpha_k{}^i = \frac{df_i}{d\bar{x}_k}; \qquad P = (x_i); \qquad x_i = f_i(\bar{x}_k);$$

en que

$$k, i = 1, 2, ..., n.$$

Los valores de $\alpha_k{}^i$ siempre se refieren al punto P. Un tensor en P es, pues, una forma multilineal infinitesimal, en que las variables o componentes de los vectores infinitesimales se transforman por lineales, directas o recíprocas, en forma cogrediente o contragrediente, relativamente a los vectores básicos (e_i). Exactamente como hemos visto en el espacio plano afín. La única diferencia es que ahora los tensores se refieren a un punto P de emergencia, es decir, estamos reducidos a un elemento infinitesimal de espacio en P. Los coeficientes de estas formas invariantes son los componentes del tensor, etc. Todos los desplazamientos o vectores infinitesimales cuyas componentes figuran en estas formas tensoriales arrancan de P.

Otra particularidad del *continuum* es que ya no podemos comparar desplazamientos infinitesimales entre sí excepto cuando poseen un mismo punto P de emergencia. Así, pues, no tiene sentido hablar de magnitudes iguales en este espacio excepto cuando éstos son infinitesimales y arrancan de un mismo punto. Matemáticamente, si desplazamos un elemento infinitesimal dx de P a P′, infinitamente próximo, habrá experimentado un $\delta \,.\, dx$ cuando haya llegado a P′ y si se vuelve otra vez a P será un $\delta' \,.\, \delta \,.\, dx$ y no necesariamente dx, dependiendo estas variaciones de los caminos seguidos de P a P′ y de P′ a P. Quiere decir que, solamente en un punto P admitimos una conexión métrica invariable y esta condición es la que dió origen a la condición de transformación ya enunciada.

Dos traslaciones infinitesimales en P (δx_i) y (dx_i), dan origen a un elemento superficial, o un elemento lineal de segundo orden, o sea:

$$dx_i \,.\, \delta x_k - \delta x_i dx_k = \Delta x_{ik},$$

y tres desplazamientos originan un elemento lineal de tercer orden que podemos escribir Δx_{ikl}, etc. Estos valores son invariantes como

se ve, pues, se componen de elementos invariantes, así que tenemos, *ipso facto,* definido los tensores lineales en P, o sea, covariantes levosimétricos.

Antes de seguir adelante tenemos que hacer notar y establecer que una transformación arbitraria de coordenadas en el *continuum* se tratraduce en una rotación del sistema vectorial infinitesimal (e_i) en P, guiada por una matriz A, por ejemplo :

$$x_i = f_i(\bar{x}_k), \qquad \alpha_k{}^i = \frac{df_i}{d\bar{x}_k}, \qquad \bar{e}_i = \alpha_i{}^k e_k.$$

Si suponemos ahora transformado el *continuum* en todas las múltiples infinitas maneras continuas posibles, obtendremos en P una rotación continua, múltiple también por *invariación de densidad,* que tendría representación por un número correspondiente de matrices. Estas matrices forman un grupo continuo, esto es, constituyen elementos de un *continuum* de matrices a n dimensiones.

Es fácil ver, matemáticamente, el carácter múltiple de la continuidad grupal. Por ejemplo, eligiendo un punto P con un sistema (e_i) unitario básico, establezcamos una correspondencia afín, en este sistema, valiéndonos del cuerpo de vectores en P. Sea A la matriz de correspondencia afín, de componentes $(\alpha_k{}^i)$. Ahora transformemos al *continuum,* lo cual determina una matriz de rotación U en P ; evidentemente que el efecto será una transformación de A por U. Formemos la rotación conjugada

$$UAU^{-1}$$

y percibiremos el carácter múltiple grupal inmediatamente. Si A es un elemento de un grupo de transformaciones afines, y U un elemento de rotaciones, con hacer recorrer a A todos los valores del grupo y a U todos los valores, a su vez, del grupo de rotaciones, obtenemos nuevos grupos, *ad infinitum.* Fácil es reconocer que todos éstos grupos son de una misma especie, o que difieren del grupo A, por ejemplo, por orientación. Volveremos nuevamente sobre este punto cuando consideramos la conexión métrica del *continuum.*

Para concebir una dimensionalización en el *continuum* tenemos forzosamente que valernos de parámetros, como quien dice de acciones extrañas. Por ejemplo, una línea, como espacio unidimensional, resulta de una « densificación » guiada por un parámetro r, que obedece una ley cualquiera determinada, o sea :

$$P = (x_i), \qquad \chi_i = \varphi_i(r), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Cada valor de r produce un punto P y la variación continua de r engendra una línea en el *continuum*. Dos parámetros nos permiten engendrar una superficie a dos dimensiones y así sucesivamente. Si r es una acción que depende del tiempo podríamos interpretar la densificación como un movimiento, sin perder de vista que la esencia de una densificación es un movimiento, o bien, una densificación es posible únicamente donde es posible un movimiento o existe posibilidad de movimiento. Nosotros estamos acostumbrados a interpretar esta acción paramétrica en el solo sentido de movimiento y de llamar trayectoria a la representación gráfica de su historia o pasado. Si recordamos lo dicho acerca del fenómeno llamado «movimiento», podemos sentar que una densificación es la historia de una acción, posible solamente en un dominio espacial-temporal. Pero esto no basta como definición, puesto que nos produce intelectualmente una diferenciación entre dimensiones que es errónea. Quiere decir, simplemente, que así como Einstein nos ha demostrado ser imposible distinguir entre los sistemas cartesianos de representación en un espacio newtoniano libre, así también es imposible distinguir un punto de otro punto en el *continuum*. ¿Cómo será, por ejemplo, posible distinguir en un *continuum* plano de dos dimensiones, o sea un plano de puntos, una línea de puntos del resto de los puntos en el plano? De una sola y absolutamente única manera, es decir, densificando la línea. Esto exige como condición indispensable, necesaria, la posibilidad de movimiento en el plano y esta posibilidad exige, a su vez, una acción temporal extraña al plano que obra sobre sus elementos constituyentes o puntos en cierta forma determinada, dejando, como historia o pasado, la línea. Tenemos percepción del proceso de densificación, en acción, o sea presente activo por los fenómenos que englobamos en el término «evolución», pero de aquí no pasamos.

Todo esto nos obligaría a entrar en consideraciones sobre la disposición de los puntos en un *continuum;* problema que parece trascender a nuestros alcances humanos, como diría Locke, cuya filosófica reflexión del tiene especial aplicación en este caso.

El vector en P determinado por las componentes $\frac{dx_i}{dr} = u^i$ tiene aspecto de velocidad y es de gran importancia; consiste, como sabemos, del desplazamiento infinitesimal $\overline{PP'}$ de dos posiciones consecutivas de P en la trayectoria, multiplicado por el número o escalar $\left(\frac{1}{dr}\right)$.

Fácilmente pasamos de una a dos velocidades

$$\frac{dx_i}{dr}, \qquad \frac{dx_i}{ds}, \quad \text{etc.}$$

El análisis tensorial en el *continuum* presenta dificultades y está limitado a los tensores lineales. Esto resulta del hecho de que debemos ceñirnos a un punto de emergencia, de suerte que un campo tensorial de una especie determinada implica el conocimiento de los tensores en cada punto P de un dominio o fracción de *continuum*. Los componentes de un tensor son funciones de las coordenadas del punto, y, en el caso de un espacio afín euclideano, la invariación respecto a transformaciones lineales nos permitía elegir, *ad libitum,* los vectores o desplazamientos con componentes independientes de la posición o del lugar (punto), de manera que el análisis se resumía en una diferenciación directa del tensor, sus componentes, se entiende. Ahora no.

Una transformación arbitraria del *continuum* produce una rotación A en P de componentes $(\varkappa_k{}^i)$ y éstos ya no son constantes, sino en el punto P, esto es, los $(\varkappa_k{}^i)$ varían de P a P′; he ahí la dificultad. Se ve, pues, que solamente podemos operar con formas tensoriales lineales con punto de emergencia en P. De acuerdo con el principio de Weyl, no podemos desplazar distancias en el *continuum*. Repetimos, entonces, que en el *continuum* el análisis tensorial queda restringido a tensores lineales en P.

Evidentemente, los componentes de un campo tensorial en el *continuum* son funciones de las coordenadas (x_i) del punto P, que se suponen continuas y derivables con derivadas continuas, etc. Así, pues, de un campo escalar (tensorial cero) derivamos un campo tensorial lineal de primer orden, y así sucesivamente.

De $\varphi = f(x_i)$ obtenemos :

$$f_i = \frac{df}{dx_i};$$

de $f_i = \dfrac{df}{dx_i}$ obtenemos :

$$f_{ik} = \frac{df_i}{dx_k} - \frac{df_k}{dx_i};$$

de f_{ik} obtenemos :

$$f_{ikl} = \frac{df_{kl}}{dx_i} + \frac{df_{li}}{dx_k} + \frac{df_{ik}}{dx_l}; \quad \text{etc.}$$

Tomemos el primer caso de $f^i = \frac{df}{dx_i}$; se basa sobre la invariación de la operación *grad* vectorial, como se ve :

$$\varphi = f(x_i) = \bar{f}(\bar{x}_i) = \bar{\bar{f}}(\bar{\bar{x}}_i)$$

$$d\varphi = \sum_i^n \frac{df}{dx_i} dx_i = \sum_i^n \frac{d\bar{f}}{d\bar{x}_i} dx_i = \ldots$$

en que aparecen los $\left(\frac{df}{dx_i}\right)$ como componentes de un campo lineal de primer orden, etc., que corresponde al escalar φ por la operación invariante *grad.* que vemos es invariante general.

Obtenida f_i de φ por la operación *grad.* podemos ascender al f_{ik} calculando la variación que experimenta f_i por un doble transporte infinitesimal de componentes (dx_i) y (δx_i).

Si (dx_i) y (δx_i) son, respectivamente, dos elementos lineales en P, la variación producida en $(f_i dx_i)$ por el desplazamiento del punto P a lo largo de estos dos elementos será :

$$(\delta f_i \,.\, dx_i + f_i \delta dx_i) - (df_i \delta x_i + f_i d\delta x_i) =$$
$$= (\delta f_i dx_i) - (df_i \delta x_i) + f_i (\delta dx_i - d\delta x_i),$$

fácil es ver que el segundo paréntesis es nulo y despreciable por ser de orden superior de infinitesimal pequeño, quedando :

$$\delta f_i \,.\, dx_i - df_i \delta x_i = \left(\frac{df_i}{dx_k} - \frac{df_k}{dx_i}\right) dx_i \delta x_k$$

en que se suple el δ con otro índice, etc. Así, pues :

$$f_{ik} = \frac{df_i}{dx_k} - \frac{df_k}{dx_i},$$

o si se quiere

$$\Delta f = \Delta\varphi = (d \,.\, \delta\varphi - \delta \,.\, d\varphi) = f_{ik} dx_i \delta x_k,$$

que es un tensor lineal de segundo orden de componentes

$$f_{ik} = \frac{df_i}{dx_k} - \frac{df_k}{dx_i}.$$

Para demostrar que

$$(\Delta \,.\, dx) = (d\delta x_i - \delta dx_i) = 0$$

no hay más que considerar el paralelogramo de vértices en orden cíclico $P_0 P_{01} P_{11} P_{10} P_0$.

Desplazando a P_0 hasta P_{11} por los dos caminos posibles, vemos que la variación puede expresarse como sigue:

$$d \,.\, \delta x_i = \{ P_{11}(x_i) - P_{01}(x_i) \} - \{ P_{10}(x_i) - P_0(x_i) \}$$

$$\delta \,.\, dx_i = \{ P_{11}'(x_i) - P_{10}(x_i) \} - \{ P_{01}(x_i) - P_0(x_i) \}$$

$$d \,.\, \delta x_i - \delta dx_i = P_{11}(x_i) - P_{11}'(x_i) = 0$$

en que reconocemos la condición que $P_0 P_{10} P_{11} P_{01}$ forme un paralelogramo infinitesimal, cuya condición postulamos llenada con menos error que un infinitamente pequeño de orden mayor que el primero.

Resumiendo, pues: de la invariante

$$df = f_i dx_i$$

obtenemos el campo lineal de segundo orden

$$\Delta f = \left(\frac{df_i}{dx_k} - \frac{df_k}{dx_i} \right) dx_i \delta x_k = f_{ik} dx_i \delta x_k,$$

que es derivado del campo de primer orden y relacionado con el mismo en forma absolutamente invariante. Hay otro método de llegar a este resultado y consiste en concebir una superficie arbitraria definida por dos parámetros (r, s) sobre el cual se halla el punto P. Suponiendo que esta superficie es reticulada por las curvas r y s, podemos imaginar una posición determinada P_0 y considerar un campo tensorial lineal de primer orden en P_0 definido por la invariante $df = f_i dx_i$; en seguida desplazando a P_0 a lo largo del perímetro de un paralelogramo infinitesimal. Este desplazamiento podemos conceptuarlo producido por dos velocidades de componentes u^i y v^i en P_0, esto es:

$$P = (x_i); \qquad x_i = \varphi_i(rs)$$

$$\left(\frac{dx_i}{dr} \right)_{P_0} = u^i; \qquad \left(\frac{dx_i}{ds} \right)_{P_0} = v^i;$$

y suponer que $r = o$, $s = o$ en P_0 para mayor sencillez.

Tendremos, entonces, como puede verse y sin necesidad de más explicación, simbolizando d y δ diferenciación relativamente a r y s respectivamente:

$$\frac{df}{dr} = df = f_i \frac{dx_i}{dr}; \qquad \delta \,.\, df = \frac{df_i}{dx_k} \cdot \frac{\delta x_k}{ds} \cdot \frac{dx_i}{dr} + f_i \frac{d^2 x_i}{drds};$$

$$\frac{\delta f}{\delta s} = \delta f = f_k \frac{\delta x_k}{\delta s}; \qquad d \,.\, \delta f = \frac{df_k}{dx_i} \cdot \frac{dx_i}{dr} \cdot \frac{\delta x_k}{\delta s} + f_i \frac{d^2 x_i}{drds};$$

$$\Delta f = \delta df - d\delta f = \left(\frac{df_i}{dx_k} - \frac{df_k}{dx_i} \right) \frac{dx_i}{dr} \cdot \frac{\delta x_k}{ds};$$

y pasando al punto P_0 tenemos :

$$\Delta f = \left(\frac{df_i}{dx_k} - \frac{df_k}{dx_i}\right) u^i v^k,$$

que es una invariante que depende de dos vectores arbitrarios u y v en P. La relación entre este método y el anterior está a la vista.

Recordemos el admirable teorema de Stokes y apliquémoslo al caso de análisis recién estudiado. Según ese teorema la invariante diferencial $f_i dx_i$ se dice *integrable* si la integral tomada a lo largo de cualquier curva cerrada es nula, es decir, si su rotación es $= 0$, que es la condición general de una diferencial total exacta, como se sabe. Supongamos, pues, una superficie arbitraria paramétrica definida por $x_i = \varphi_i (rs)$ que contenga a la curva cerrada a lo largo de la cual se integra $f_i dx_i$, y dividamos, por medio de una reticulación infinitesimal de líneas coordenadas, el área encerrada sobre esta superficie por la curva. Entonces podemos substituir el transporte perimetral a lo largo de la curva cerrada por la suma de las rotaciones tomadas al rededor de cada uno de los paralelogramos reticulares que componen el área comprendida por la misma sobre la superficie. En otras palabras, descubrimos que el tensor lineal hallado, o sea :

$$\Delta f = f_{ik} u^i v^k = \left(\frac{df_i}{dx_k} - \frac{df_k}{dx_i}\right) u^i v^k$$

es precisamente el valor unitario de estas rotaciones elementales, multiplicado por $u^i v^k$, y deducimos, en consecuencia, que

$$\frac{df_i}{dx_k} - \frac{df_k}{dx_i} = f_{ik}$$

mide la intensidad de rotación en el punto P_0, como si dijéramos : la rotación por unidad de área en este punto.

Por un método completamente análogo deducimos el tensor lineal, o campo tensorial lineal de tercer orden, del de segundo orden; queda como ejercicio para el lector. Se obtiene

$$f_{ikl} = \frac{df_{kl}}{dx_i} + \frac{df_{li}}{dx_k} + \frac{df_{ik}}{dx_l}.$$

De este análisis hemos deducido una propiedad de la mayor importancia que es preciso recordar, es decir : que los tensores lineales tienen *aspecto de una intensidad*, o, si se quiere, *miden una magnitud de intensidad.*

Consideremos ahora la invariante integral

$$\int \mathbf{w} dx \qquad dx = dx_1 \,.\, dx_2 \;\; \ldots \;\; dx_n$$

si transformamos el sistema coordenado, es evidente que **w** tendrá que ser una magnitud que depende del sistema coordenado, de tal manera, que la transformación tendrá como único efecto multiplicarla por un factor constante, es decir, el valor absoluto de la jacobiana de transformación. Si concebimos que **w** representa una magnitud de cantidad de alguna cosa (una substancia) y si comprendemos por dx un elemento volumétrico multidimensional, la integral representará una masa. Quiere decir que **w** es una densidad escalar, y así la llamaremos siempre.

Podemos extender este concepto a los tensores de la manera siguiente: llamaremos densidad tensorial a todo tensor cuyos componentes, cuando se transforman coordenadas, resultan multiplicados por el valor absoluto de la determinante de « rotación », así :

$$| \alpha_k{}^i |$$

las variables transformándose como de costumbre, esto es:

$$\xi^i = \sum_k \alpha_k{}^i \bar{\xi}; \qquad \bar{\xi}_i = \sum_k^n \alpha_i{}^k \xi_k .$$

Percibimos inmediatamente que bastará multiplicar a cualquier tensor por una densidad escalar (**w**) para obtener una densidad tensorial del mismo orden que el tensor. Y, en general, vemos que el producto de cualquier densidad tensorial por un tensor producirá una densidad tensorial de un orden igual a la suma de los órdenes de los factores, como en la multiplicación de tensores. También está a la vista que el producto de dos densidades escalares no puede ser una densidad tensorial — una transformación lo demuestra.

Weyl recalca la importancia de la distinción entre tensores y densidades tensoriales; efectivamente, es de una importancia trascendental física. Hemos logrado establecer, matemáticamente, una diferencia marcada entre tensores como magnitudes de intensidad, y densidades tensoriales como magnitudes de cantidad.

Mas aún: las densidades tensoriales contravariantes, levo-simétricas, desempeñan el mismo rol, entre las demás densidades tensoriales, que los tensores covariantes, levo-simétricos, desempeñan entre los tensores en general. Por esta razón, y por analogía, llamaremos «densidades tensoriales lineales» a aquellas densidades que son *contravariantes y levo-simétricas.*

El álgebra de estas densidades es idéntica a la conocida para tensores en general : adición de densidades de una misma especie, multiplicación, contracción de índices, etc. Refiriéndose la multiplicación a dos factores, es decir, uno tensor y el otro densidad tensorial y no teniendo significado el producto de dos densidades, etc., distinguiremos las densidades por letras especiales.

El análisis de densidades tensoriales en el *continuum* general sólo es posible en el caso de densidades tensoriales lineales. Se resume en un procedimiento de divergencia, en el concepto vectorial de esta palabra. Esto era de esperarse, puesto que hemos visto que estas densidades miden magnitudes de cantidad, teniendo una divergencia aspecto de una dilatación.

Encontramos que :

$$\frac{d\mathbf{w}^i}{dx_i} = \mathbf{w}$$

$$\frac{d\mathbf{w}^{ik}}{dx_k} = \mathbf{w}^i$$

$$\frac{d\mathbf{w}^{ikl}}{dx_l} = \mathbf{w}^{ik}, \text{ etc.}$$

Empezaremos por demostrar que $\mathbf{w}$ es una densidad escalar. Muy sencillamente ; no tenemos más que formular la expresión de la variación que experimenta una cantidad de substancia en un dominio G dado, por efecto de una deformación del *continuum* que convierte al dominio G en $\overline{G}$ infinitamente poco diferente. Esto se consigue llamando S (x) una escalar de densidad, o sea una cantidad de substancia por unidad volumétrica n dimensional. Así, $\int_G S(x) \,.\, dx$ es la cantidad contenida en G.

Si ahora deformamos, infinitesimalmente, al *continuum* de manera que :

$$\bar{x}_i = x_i + \xi^i \,.\, dt$$

en que (ξ^i) es el vector de deformación y dt el parámetro infinitesimal director de la deformación — el tiempo, — sabemos que un volumen elemental dV sufre variación :

$$d\overline{V} = dV\,(1 + A) \qquad A = \frac{d\xi^i}{dx_i} \cdot dt,$$

fácil es ver que

$$dV = \left| \frac{dx_i}{d\bar{x}_k} \right|$$

es la jacobiana de transformación y que A es la dilatación volumétrica, igual a la divergencia, etc. Si pues:

$S(x_i)$ se convierte en $S(\bar{x}_i)$;

dx se convierte en $d\bar{x}$, siendo $dx = dx_1 . dx_2, \ldots$

G se convierte en $\bar{G}$.

La deformación entraña la variación de

$$\int_G S(x_i)\, dx \qquad \text{a} \qquad \int_{\bar{G}} S(\bar{x}_i)\, d\bar{x}$$

esto es:

$$\int_{\bar{G}} S(\bar{x}_i)\, d\bar{x} = \int_G S(\bar{x}_i) . (1 + A)\, dx,$$

o con error de orden superior de infinito pequeño tomando límite G:

$$\int_G S(\bar{x}_i)(1 + A)\, dx$$

la variación es, pues:

$$\int_G S(\bar{x}_i)(1 + A)\, dx - \int_G S(x_i)\, dx = \int_G \left\{ S(\bar{x}_i)(1 + A) - S(x_i) \right\} dx$$

reduciendo se tiene con facilidad:

$$S(\bar{x}_i) = S(x_i + \xi^i dt) = S(x_i) + \frac{d(S)}{dx_i} \cdot \xi^i dt$$

$$\int_G S(\bar{x}_i)\, A . dx = \int_G \left\{ S(x^i) + \frac{dS}{dx_i} \xi^i dt \right\} \frac{d\xi^i}{dx_i} \cdot dt . dx$$

y de aquí una $S(x_i)$ se destruye por

$$\text{variación} = \int_G \left\{ S \cdot \frac{d\xi^i}{dx_i} \cdot dt + \frac{dS}{dx_i} \cdot \xi^i dt + \left(\frac{dS}{dx_i} \cdot \frac{d\xi^i}{dx_i} \cdot \xi^i dt^2 \right) \right\} dx$$

y descartando infinitamente pequeños de orden superior

$$= \int_G \frac{d(S . \xi^i)}{dx_i}\, dt . dx,$$

quiere decir que

$$\frac{d(S . \xi^i)}{dx_i} \cdot dt$$

es una magnitud escalar de cantidad regulada por el parámetro dt:

$$\frac{d(S . \xi^i)}{dx_i}$$

es pues una *densidad escalar invariante*

$$\frac{d\,(S\xi^i)}{dx_i} = \mathbf{w} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{w}^i = S\xi^i;$$

para una $S = 1$, etc., el significado es manifiesto y no requiere mayor comentario.

$\mathbf{w}^i = S\xi^i$ responde a nuestra definición de densidades tensoriales que dice : ser el producto de una densidad escalar por un vector, o tensor, igual a una densidad tensorial de primer orden. Tomando, pues, a $S = 1$ resulta $\mathbf{w}^i = \xi^i$, y ya sabemos que podemos hallar un sistema coordenado en el cual $S = 1$, de suerte que $\mathbf{w}^i = \xi^i$ será válido en cualquier sistema coordenado por invariación. Esto implica un factor constante, etc.

Resultando que una densidad tensorial de primer orden $\mathbf{w}^i$ puede siempre ser elegida, de manera que $\mathbf{w}^i = S\,.\,\xi^i$, en que $S\,(x_i)$ es una densidad escalar y (ξ^i) las componentes de un campo vectorial contravariante. Así, pues, remontamos en el análisis, o sea :

$$\frac{d\mathbf{w}^i}{dx_i} = \mathbf{w},$$

eligiendo un campo covariante en P :

$$\frac{d\mathbf{w}^{ik}}{dx_k} = \frac{d\,.\,(f_i\mathbf{w}^{ik})}{dx_k} = f_i\,\frac{d\,.\,\mathbf{w}^{ik}}{dx_k} = f_i\mathbf{w}^i$$

en que basta tomar $f_i = 1$ y tenemos

$$\frac{d\mathbf{w}^{ik}}{dx_k} = \mathbf{w}^i,$$

f_i es un campo vectorial covariante derivado de un potencial f.

Muy fácil es ahora demostrar el siguiente teorema de cálculo integral que es de importancia. Si se tiene

$$\int_G \frac{d\mathbf{w}^i}{dx_i}\,dx$$

y si las funciones $\mathbf{w}^i$ son tales que se anulan en los límites del dominio de integración será

$$\int_G \frac{d\mathbf{w}^i}{dx_i}\,dx = 0.$$

Esto es evidente, puesto que, analíticamente:

$$\int_G \frac{d\mathbf{w}^i}{dx_i} dt \,.\, dx = \int_G dt \cdot \frac{d\,.\,(S\xi^i)}{dx_i} dx = \int_G \left\{ S \frac{d\xi^i}{dx_i} + \xi^i \frac{dS}{dx_i} \right\} dtdx$$

$$= \Big[S\xi^i \Big]_G - \int_G \xi^i \frac{dS}{dx_i} dt \,.\, dx + \int_G \xi_i \frac{dS}{dx_i} dt \,.\, dx = \Big[S\xi^i \Big]_G$$

y como los $\mathbf{w}^i$ se anulan en los límites, resulta:

$$\int_G \frac{d\mathbf{w}^i}{dx_i} dtdx = 0$$

o sea

$$\int_G \frac{d\mathbf{w}^i}{dx_i} dx = 0.$$

Aquí deducimos que la integral de una divergencia, cuyas funciones se anulan en los límites de la integración, es cero. Este es el principio tensorial de integración por partes.

Se remonta a

$$\frac{d\mathbf{w}^{ikl}}{dx_l} = \mathbf{w}^{ik}$$

$$\frac{d\mathbf{w}^{ikl}}{dx_l} = \frac{d\,(f_{ik}\mathbf{w}^{ikl})}{dx_l} = f_{ik} \frac{d\mathbf{w}^{ikl}}{dx_l} = f_{ik}\mathbf{w}^{ik}, \text{ etc.}$$

CAPÍTULO VIII

La conexión afín. Curvatura vectorial

Llegamos al concepto magistral de Levi-Civita del transporte infinitesimal paralelo.

Diremos que el *continuum* posee conexión afín, sí transportando, por pura traslación paralela, el cuerpo de vectores infinitesimales en P al punto inmediato infinitamente próximo P′, podemos establecer una conexión afín entre los vectores en P y los correspondientes en P′; en otras palabras, si podemos descubrir una matriz de transformación lineal que aplicada al cuerpo vectorial en P produce el cuerpo vectorial en P′. Quiere decir, que es posible una traslación pura, congruente, infinitesimal vectorial entre P y P′. Convertir esta correspondencia afín en una igualdad es simple cuestión de una transformación adecuada de coordenadas del *continuum* que determi-

ne una rotación conveniente de los (e_i) básicos en P. Se puede, pues, sentar que, existiendo conexión afín en el *continuum* será posible elegir un sistema de coordenadas para P y su vecindad inmediata, infinitamente próxima, tal que los componentes de los vectores en P no experimenten alteración alguna por efecto de transporte paralelo a P′, infinitamente vecino. Siendo esto exacto para cualquier P′, podríamos decir que deja sin alteración los componentes de un vector cualquiera en P después de un desplazamiento paralelo infinitesimal arbitrario. Este sistema de coordenadas se denomina geodésico en P. Se trata de una « propagación paralela » infinitesimal.

Vemos claramente, en consecuencia, que podemos, mediante una elección sucesiva de sistemas geodésicos, primero en P, después en P′, después en P″, etc., *ad libitum,* trasportar, por puras traslaciones paralelas, un vector determinado infinitesimal en P, desde P a otro punto del *continuum,* sin que experimente variación. Si el vector en P representa *la velocidad* del movimiento traslatorio paralelo, vemos que el punto P se moverá en el sistema constantemente *geodésico,* como si fuera libre : con velocidad y dirección constantes. En otras palabras, sometemos al *continuum* a una deformación continua que corrige la variación (aceleración) en el movimiento del punto P, es decir, anula la aceleración. Si podemos anular la aceleración podemos anular la fuerza, dinámicamente considerada. Efectivamente, y es así que el lector podrá explicar la situación de los pasajeros en un ascensor que se desploma, sin fricción ni resistencias, desde una gran altura imaginaria por haberse cortado la cuerda ; los pasajeros existen en un *espacio libre newtoniano* dentro del ascensor, constituyendo éste un sistema estacionario geodésico. El sistema geodésico estacionario anula la acción de gravitación. La inmensa importancia de estos sistemas geodésicos aparece cuando se estudia la nueva ley de gravitación de Einstein en la teoría general del relativismo.

Vamos a expresar matemáticamente este concepto de Levi-Civita. *Postulamos* que la variación que produce el transporte infinitesimal paralelo de un vector de P a P′ inmediato es del mismo orden que la traslación, y por lo tanto, la matriz de transformación será infinitesimal ; si (ξ^i) son las componentes en el sistema (e_i) en P de un vector infinitesimal, entonces en P′ este vector tendrá componentes alterados en

$$d\xi^i = -\sum_r^n d\gamma_r{}^i \xi^r$$

en que el signo (—) resulta cómodo para los fines que perseguimos ; la

matriz G debe ser infinitesimal y del mismo orden que la traslación. Esto nos obliga a imponer la condición:

$$d\gamma_r{}^i = \Gamma_{rs}{}^i dx_s,$$

debiendo además cumplirse la condición de simetría

$$\Gamma_{rs}{}^i = \Gamma_{sr}{}^i.$$

Entendiéndose siempre que estas variaciones tienen lugar en el sistema vectorial original en P de los (e_i) unitarios.

Ahora bien, si transformamos las coordenadas del *continuum*

$$P = (x_i), \qquad x_i = f_i(\bar{x}_k), \qquad i, k = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

esta transformación determinará una rotación de los (e_i) en P. Resulta, pues, que descubrimos una posibilidad de transformar los (x_i) en $(\bar{x}_i)$ de manera que se produzca una rotación de (e_i) en P tal que los $\Gamma_{rs}{}^i = 0$ y el transporte paralelo infinitesimal es sin variación. El lector observará fácilmente la relación que existe entre estas magnitudes en P, como ser los (dx_i) que son coordenadas relativas a P de un punto vecino, y que todo vector infinitesimal no es sino el $\overline{PP'}$ determinado por dos puntos: el primero, origen, P, y el segundo el de coordenadas (dx_i), etc. Este $\overline{PP'}$ es el vector de componentes (ξ^i) en el sistema (Pe_i) vectorial unitario. Cuando convertimos (dx_i) en $(d\bar{x}_i)$ se transformará (ξ^i) en $(\bar{\xi}^i)$ por efecto de la rotación de los (e_i). El problema, pues, consiste en hallar una matriz que convierta la clase de la conexión afín definida por los Γ en congruencia, que equivale a decir $\Gamma = 0$.

Una rotación definida por la matriz A haría que:

$$\xi^i = \alpha_k{}^i \bar{\xi}^k \qquad \text{y} \qquad \bar{\xi}_i = \alpha_i{}^k \xi_k,$$

si esta rotación es producida por una transformación que convierte los (x_i) en $(\bar{x}_i)$ y los $\bar{x}$ son coordenadas de un sistema geodésico en P, deberá tenerse:

$$d\xi^i = d\left(\alpha_k{}^i \bar{\xi}^k\right) = \bar{\xi}^k \,.\, d\alpha_k{}^i,$$

pues los $(\bar{\xi}^k)$ no varían. Como

$$\alpha_k{}^i = \frac{df_i}{d\bar{x}_k}; \qquad d\alpha_k{}^i = \frac{d}{d\bar{x}_r}\left(\frac{df_i}{d\bar{x}_k}\right) d\bar{x}_r = \frac{d^2 f_i}{d\bar{x}_r \,.\, d\bar{x}_k}\, d\bar{x}_r;$$

$$d\xi^i = \frac{d^2 f_i}{d\bar{x}_r \,.\, d\bar{x}_k}\, \bar{\xi}^k \,.\, d\bar{x}_r = -\, d\gamma_r{}^i \bar{\xi}^r = -\, \Gamma_{rk}{}^i \bar{\xi}^r \,.\, dx_k,$$

el encadenamiento es perfecto. Resumiendo :

$$d\xi^i = -d\gamma_r{}^i\xi^r; \qquad d\gamma_r{}^i = \Gamma_{rs}{}^i dx_s;$$

y de aquí

$$d\xi^i = -\Gamma_{rs}{}^i\xi^r dx_s$$

$$\xi^i = \alpha_r{}^i\bar{\xi}^r; \qquad d\xi^i = \bar{\xi}^r \,.\, d\alpha_r{}^i = \frac{d^2 f_i}{d\bar{x}_r d\bar{x}_s}\,\bar{\xi}^r d\bar{x}_s;$$

$$d\xi^i = \frac{d^2 f_i}{d\bar{x}_r d\bar{x}_s} \cdot \bar{\xi}^r \,.\, d\bar{x}_s = -\Gamma_{rs}{}^i\xi^r dx_s;$$

si suponemos que los $(\xi^i = \partial x_i)$ son componentes de un $\overline{PP'}$ tendremos

$$-\Gamma_{rs}{}^i\partial x_r \,.\, dx_s = \frac{d^2 f_i}{d\bar{x}_r d\bar{x}_s}\,\partial\bar{x}_r \,.\, d\bar{x}_s.$$

Evidentemente, pues, la condición de sistema geodésico en P es que

$$\Gamma_{rs}{}^i = -\frac{d^2 f_i}{d\bar{x}_r \,.\, d\bar{x}_s} = -\frac{d^2 f_i}{d\bar{x}_s \,.\, d\bar{x}} = \Gamma_{sr}{}^i,$$

siendo

$$d\bar{x}_i = (\partial_i{}^k = \alpha_i{}^k)\, dx_i;$$

y queda de esta manera completa y matemáticamente definida la conexión afín de un *continuum,* único que consideraremos de aquí en adelante.

Cuando los $\Gamma = 0$ tenemos un sistema geodésico en P y cuando $\Gamma \neq 0$ nos hace conocer la clase de la conexión afín entre P y P′ infinitamente próximo.

Se deduce que podemos elegir para los $(\Gamma_{rs}{}^i)$ un sistema de valores numéricos cualesquiera arbitrarios — determinando la transformación en el *continuum* que corresponde, — pudiendo entre todos estos sistemas de valores elegir el 0, y a éste corresponde el sistema geodésico en P. Quiere decir que los $(\Gamma_{rs}{}^i)$ no son invariantes y, por lo tanto, *no son componentes de tensor ; únicamente lo son* para transformaciones *generales lineales del continuum.* En cambio, las derivadas de los $(\Gamma_{rs}{}^i)$ son componentes de un tensor ; pero esto es evidente geométricamente.

La naturaleza de la conexión afín de un *continuum* es única. Los *continuums* son, en este respecto, homogéneos. Pero la clase de la conexión afín en un punto P, definida por los $(\Gamma_{rs}{}^i)$, varía de un punto a otro del *continuum* y depende exclusivamente del sistema de nume-

ración coordenada de los puntos. Como el lector ha visto, la posibilidad de solución del problema de conexión afín descansa o radica en la propiedad de traducirse toda transformación arbitraria general de coordenadas, o sea :

$$P = (x_i), \qquad x_i = f_i(\bar{x}_k), \qquad i, k = 1, 2, ..., n,$$

en una rotación del sistema vectorial infinitesimal básico unitario de referencia (e_i) en el punto P. Postulada una transformación afín cualquiera en este sistema de referencia (e_i), de carácter infinitesimal, podemos, mediante una rotación conveniente, convertir la clase de afinidad en igualdad o congruencia. El problema, pues, es determinar la transformación general que produce esta rotación conveniente y hallamos :

$$x_i = f_i(\bar{x}_k) \qquad \Gamma_{rs}{}^i = \Gamma_{sr}{}^i = -\frac{d^2 f_i}{d\bar{x}_r \, . \, d\bar{x}_s}, \text{ etc.}$$

Para la condición $\Gamma = 0$ los $(\bar{x}_i)$ son coordenadas de un sistema geodésico en P.

Ahora bien ; se ve que la ecuación :

$$\left.\begin{aligned} d\xi^i + \Gamma_{rs}{}^i \xi^r dx_s = 0 \\ d\xi^i + d\gamma_r{}^i \xi^r = 0 \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

expresa la condición de traslación paralela de P a P′ infinitamente vecino, del vector de componentes (ξ^i). Esto es, si las componentes (ξ^i) de un vector satisfacen (A) será un vector transportado paralelamente de P a P′.

Supongamos ahora que del cuerpo de vectores en P elegimos uno de componentes (ξ^i) y lo transportamos de acuerdo con (A) a todos los puntos P′ inmediatos o infinitamente vecinos a P. Obtendremos evidentemente un campo vectorial infinitesimal de carácter *estacionario* en P. La condición que tienen que llenar las componentes de los vectores derivados de este vector único es (A).

En otras palabras, tenemos a la vista la ecuación diferencial de un campo vectorial estacionario en P, y podemos elegir a voluntad este campo, esto es, podemos hacer corresponder a cualquier sistema de componentes dadas, de un vector en P (infinitesimalmente se entiende), un campo estacionario. Por otra parte, ésto es manifiesto puesto que se trata de un vector del cuerpo vectorial en P.

Definimos el campo estacionario en P diciendo que es el campo vectorial obtenido por la traslación de un vector cualquiera del cuer-

po vectorial en P, a todos los puntos infinitamente vecinos a P; entendiéndose un mismo y solo vector del cuerpo, que se elige a voluntad. Las componentes de este vector satisfacen a la ecuación (A). Nada más.

Hasta ahora hemos estudiado vectores contravariantes en P. Podemos fácilmente deducir campos vectoriales estacionarios covariantes como sigue. Postulamos que, la invariante $(\xi_i \eta^i)$ no experimenta alteración por efecto del transporte paralelo infinitesimal de P a P′, es decir :

$$d\,(\xi_i \eta^i) = 0$$

y, por lo tanto, siguen los cálculos sencillos :

$$d\,(\xi_i \eta^i) = \xi_i d\eta^i + \eta^i d\xi_i = 0$$

$$d\eta^i = -\,d\gamma_r{}^i \eta^r$$

$$\xi_r d\eta^r + \eta^i d\xi_i = 0 = \xi_r\,(-\,d\gamma_i{}^r \eta^i) + \eta^i d\xi_i$$

$$\eta^i\,(d\xi_i - d\gamma_i{}^r \xi_r) = 0$$

$$\text{(A)} \;\ldots\; d\xi_i - d\gamma_i{}^r \xi_r = 0$$

$$\text{B} \;\ldots\; d\xi_i = +\sum_r^n d\gamma_i{}^r \xi_r,$$

que da la variación de un vector covariante en P por efecto de traslación a P′ :

$$d\xi_i = \sum_r^n d\gamma_i{}^r \xi_r = d\gamma_i{}^r \xi_r.$$

Así (A) define un campo vectorial covariante en P de componentes (ξ_i). Resulta, pues :

$$\left\{\begin{array}{ll} d\xi^i = -\,d\gamma_r{}^i \xi^r & d\xi_i + \Gamma_{rs}{}^i \xi^r dx_s = 0 \\ d\xi_i = d\gamma_i{}^r \xi_r & d\xi_i - \Gamma_{is}{}^r \xi_r dx_s = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} d\xi^i + d\gamma_r{}^i \xi^r = 0 \\ d\xi_i - d\gamma_i{}^r \xi_r = 0 \end{array}\right\}$$

La característica de un espacio plano sería que los $(\Gamma_{rs}{}^i)$ fuesen constantes para todo punto del mismo.

Consideremos ahora un punto P del *continuum* y un vector unido a éste de componentes (u^i) contravariantes. Desde ya podemos imagi-

nar que el punto P se mueve guiado por un parámetro s, que puede bien ser temporal; así, pues, si elegimos:

$$P = (x_i); \qquad x_i = \varphi_i(s); \qquad \frac{dx_i}{ds} = u^i;$$

se ve el significado de los (u^i) fijos en P, es decir, el punto P se mueve llevando unido el vector velocidad de componentes $\left(\frac{dx_i}{ds} = u^i\right)$. Si el campo es estacionario al instante s, en P tendremos:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{rs}{}^i u^r \cdot \frac{dx_s}{ds} = 0,$$

que procede de

$$du^i + \Gamma_{rs}{}^i u^r \,.\, dx_s = 0$$

y es finalmente:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{rs}{}^i \,.\, u^r \,.\, u^s = 0;$$

esta es la condición necesaria para que el vector (u^i) se propague, con el punto P, de P a P′ vecino, sin alteración, siendo la propagación por traslación paralela. Quiere decir que el vector (u^i) se propaga con P, de P a P′, conservando magnitud y dirección *constantes*. En otras palabras, siendo (u^i) la velocidad del punto P en su movimiento regulado por s, debemos interpretar este campo estacionario como la condición de ser libre el punto P en el mismo, es decir, el punto P se traslada rectilínea y uniformemente de P a P′ infinitamente vecino.

En general, P describe una trayectoria geodésica cuya ecuación diferencial es la condición estacionaria establecida.

Cuando

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{rs}{}^i u^r u^s \neq 0$$

será

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{rs}{}^i u^r u^s = V^i$$

en que (V^i) son componentes de una aceleración en el *continuum*, o el apartamiento de la condición de movimiento uniforme traslatorio. Los (V^i) miden la variación del vector velocidad por unidad de tiempo durante el trasporte paralelo de P a P′. Si elegimos un vector covariante (ξ_i) que se mantiene constante en P, cuando se traslada P a P′ (traslación paralela de los (ξ_i)) y si se recuerda el postulado sobre transporte de la invariante

$$(\xi_i \eta^i)$$

se ve que

$$(\xi_i u^i)$$

es invariante y formada con el vector velocidad (u^i). Así,

$$d\,(\xi_i u^i) = 0,$$

por desplazamiento de P a P′

$$d\,(\xi_i u^i) = \frac{d\,(\xi_i u^i)}{ds} = 0,$$

pero

$$\frac{d\,(\xi_i u^i)}{ds} = \xi_i V^i,$$

puesto que los (ξ_i) son constantes y los (V^i) miden la variación de los (u^i) por el desplazamiento paralelo de P a P′. Resulta:

$$\frac{d\,(\xi_i u^i)}{ds} = \xi_i V^i = 0$$

$$V^i = 0,$$

pues (ξ_i) es arbitraria.

Quiere decir que la condición de ser $V = 0$ a todo instante s, acarrea forzosamente la condición de ser los (u^i) las componentes de un vector constante en P. De manera que P se mueve con velocidad y dirección constantes desde P a P′ *a todo instante* y, por lo tanto, describe una trayectoria geodésica como si fuera un punto libre en un espacio newtoniano. Hemos de ver más adelante que esta línea geodésica es « estacionaria », o sea, que la variación de su longitud entre dos puntos determinados por efecto de un desplazamiento infinitesimal de la misma es cero. Descubrimos aquí una propiedad física de una trayectoria rectilínea, a saber: *la historia de un punto que se mueve conservando su velocidad y su dirección.*

También podríamos escribir la condición de campo estacionario en P:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{rs}{}^i \frac{dx_r}{ds} \cdot \frac{dx_s}{ds} = 0,$$

y como

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{d^2 x_i}{ds^2},$$

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \Gamma_{rs}{}^i \frac{dx_r}{ds} \cdot \frac{dx_s}{ds} = 0$$

es la ecuación diferencial de la geodésica.

Para ver la importancia en mecánica de estas ecuaciones, supongamos que μ representa una densidad material unitaria; si

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{rs}{}^i u^r u^s = V^i,$$

será

$$\mu \frac{du^i}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^i \cdot \mu u^\alpha u^\beta = \mu V^i = \mathbf{p}^i,$$

en que los $\mathbf{p}^i$ son componentes de un vector que representa una « densidad de fuerza » en el *continuum,* mientras que $\mu \frac{du^i}{ds}$ son las componentes de un vector unido al punto material (P_μ) que representa la densidad de fuerza en el elemento de materia que se mueve. Vemos que :

$$\mu \frac{du^i}{ds} = \mathbf{p}^i - \Gamma_{\alpha\beta}{}^i \cdot \mu u^\alpha u^\beta = \mathbf{p}^i - \bar{\mathbf{p}}^i$$

si designamos

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^i \mu u^\alpha u^\beta = \bar{\mathbf{p}}^i.$$

Esta ecuación nos dice que si un cuerpo material en un *continuum* a conexión afín describe una trayectoria geodésica ($\mathbf{p}^i = 0$), existe a cada instante del recorrido un equilibrio entre la densidad de fuerza $\left(\mu \frac{du^i}{ds}\right)$, que conocemos de la mecánica clásica, y una densidad de fuerza ficticia $(\bar{\mathbf{p}}^i)$ puramente matemática. Mejor aún : eligiendo un sistema geodésico de representación en un punto P de la trayectoria se anula la densidad de fuerza ficticia $(\bar{\mathbf{p}}^i)$. Quiere decir que nos valemos del principio puramente matemático de « transformación continua del sistema de representación » :

$$x_i = f_i(\bar{x}_k) = f_i(\bar{\bar{x}}_k), \text{ etc.},$$

para anular el cambio sucesivo continuo de valores representado por los $\left(\mu \frac{du^i}{ds}\right)$. Es así que se explica cómo un sistema de naturaleza determinada, por ejemplo, el ascensor de Einstein, que se desploma sin roce por efecto de la ruptura del cable, constituye un sistema libre o un espacio newtoniano para los pasajeros que contiene, o sea : *relativamente al ascensor o pasajeros el sistema de representación es geodésico.* El ascensor describe una trayectoria geodésica en el campo de gravitación y el pasajero es el sistema geodésico de representación en el punto P que recorre la trayectoria. Para completar, diremos que

esto es posible, por la simple razón de que *la propiedad inerte de la materia* se manifiesta por el fenómeno de peso en un campo de gravitación, y por inercia en un movimiento. Podemos, pues, substituir la gravitación por un movimiento, es decir, por una transformación continua de sistema coordenado de representación.

Los pasajeros del ascensor observarían el movimiento del *continuum* si fuera posible hacer visibles sus puntos; mientras que un observador en un punto del *continuum* observaría el movimiento del ascensor y pasajeros, etc. Y esto, en virtud de la ausencia de aceleración que caracteriza al movimiento libre, hace que sea imposible distinguir el movimiento propio del movimiento del punto o sistema de referencia.

La razón por la cual no es posible distinguir entre el movimiento de un cuerpo y otro de referencia es que no queda historia perceptible para nosotros de la acción en evolución. Se trata, para nuestros órganos de percepción, de acciones de existencia instantánea, como si dijéramos de « carácter puntual », en el sentido de carecer un punto de dimensiones. Cuando la acción deja historia en forma de una « densificación » perceptible, ya no tenemos duda acerca del movimiento; sabemos perfectamente cuál es el cuerpo que posee el movimiento. Hemos tocado, pues, el *fons et origo* de la cuestión relativista y hemos descubierto que el relativismo *ha surgido de aquellos fenómenos que no registran su historia en forma de densificaciones perceptibles para nosotros.*

Nadie duda un instante el hecho de ser un objeto tal cosa, o sea, una historia densificada; pero, en cambio, puede haber serias dudas acerca del movimiento, por ejemplo, de un globo; pues para uno que forma parte del sistema es una cosa, y para otro ajeno al sistema es otra. Pero si el globo registrara su movimiento por una densificación progresiva en el *continuum,* ya no habría duda : *todos veríamos el fenómeno de la misma manera* y convendríamos en su absoluta realidad. Lo mismo sería estar en el globo que fuera del globo. Hemos de volver otra vez sobre este punto interesantísimo, para demostrar que una acción extraña en un *continuum,* al alterar el estado interior de equilibrio estático (que supondremos existía), inicia una historia e introduce una dimensionalidad temporal especial en el mismo, donde antes no existía. Tenemos, pues, el comienzo de un fenómeno de densificación. Nadie puede dejar de observar, por ejemplo, este fenómeno en el *quantum* que designamos con el término de « semilla »; es manifiesta la fase de equilibrio estático relativamente a la acción del

campo solar que ha terminado un ciclo y cuya historia ahí está registrada materialmente por una densificación.

Para terminar esta pequeña digresión podemos añadir que el significado que atribuímos a « haber desaparecido la dimensión temporal de un dominio » es simplemente la cesación consciente para nuestros órganos de percepción de la historia y, por lo tanto, de la « densificación ». Siguiendo este camino de razonamiento se ve cómo la relatividad del « tiempo » es responsable de todos los fenómenos de nuestra percepción consciente.

Volviendo al *continuum,* vimos que en uno de carácter general, era sólo posible el análisis de densidades tensoriales lineales, en virtud del carácter de la magnitud que representan. En un *continuum* a conexión afín podemos extender el análisis a cualquier clase, o especie de tensores, o densidades tensoriales. Veamos esto; supongamos el tensor mixto de segundo orden:

$$\sum_{ik}^{n} f_k{}^i \xi^k \eta_i$$

$$\frac{d}{dx_r}(f_k{}^i \xi^k \eta_i) = \left(\frac{d}{dx_r} \cdot f_k{}^i\right) \xi^k \eta_i + f_k{}^i \left\{ \eta_i \frac{d\xi^k}{dx_r} + \xi^k \frac{d\eta_i}{dx_r} \right\}$$

pero

$$\begin{aligned} \eta_i d\xi^k + \xi^k d\eta_i &= -\eta_i \Gamma_{\alpha\beta}{}^k \xi^\alpha dx_\beta + \xi^k \Gamma_{i\beta}{}^\gamma \eta_\gamma dx_\beta \\ &= -\eta_i \Gamma_{k\beta}{}^\alpha \xi^k \,.\, dx_\beta + \xi^k \,.\, \Gamma_{\gamma\beta}{}^i \eta_i dx_\beta \\ &= \xi^k \eta_i \left\{ \Gamma_{\gamma\beta}{}^i - \Gamma_{\beta k}{}^\alpha \right\} dx_\beta, \end{aligned}$$

ajustando ahora los índices que corresponden al tensor de componentes $(f_k{}^i)$ tenemos fácilmente, adoptando dx_β en vez de dx_r, etc.:

$$\frac{d}{dx_\beta}(f_k{}^i \xi^k \eta_i) = \frac{df_k{}^i}{dx_\beta} \cdot \xi^k \eta_i + \xi^k \eta_i \left\{ f_k{}^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}{}^i - f_\alpha{}^i \Gamma_{k\beta}{}^\alpha \right\}$$

o sea, abreviando:

$$\frac{d}{dx_\beta} f_k{}^i = f_{k\beta}{}^i + f_k{}^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}{}^i - f_\alpha{}^i \Gamma_{k\beta}{}^\alpha,$$

o si se quiere:

$$f_{k\beta}{}^i = \frac{df_k{}^i}{dx_\beta} + f_k{}^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}{}^i - f_\alpha{}^i \Gamma_{k\beta}{}^\alpha.$$

El juego de índices está a la vista y es de sencillez elemental. Sólo hay que distinguir entre índices independientes y dependientes y los

límites. Por ejemplo, como γ y α varían de la misma manera podemos substituirlos por una r única, o sea:

$$f_{k\beta}{}^{i} = \frac{df_k{}^{i}}{dx_\beta} + \Gamma_{r\beta}{}^{i} f_k{}^{r} - \Gamma_{k\beta}{}^{r} f_r{}^{i},$$

que da las componentes de un tensor mixto de tercer orden, derivado de uno de segundo orden por un procedimiento invariante, independiente del sistema coordenado del *continuum*, etc.

Tomemos ahora el caso de una densidad tensorial mixta $\mathbf{w}_k{}^{i}$; no tenemos más que elegir un campo vectorial auxiliar estacionario de componentes (ξ^i) y formar la densidad $(\mathbf{w}_i{}^{k}\xi^i)$. Si aplicamos un método de divergencia:

$$\frac{d\,(\mathbf{w}_i{}^{k}\xi^i)}{dx_k}$$

obtenemos:

$$\frac{d\,(\mathbf{w}_i{}^{k}\xi^i)}{dx_k} = \xi^i \frac{d\mathbf{w}_i{}^{k}}{dx_k} + \mathbf{w}_i{}^{k} \frac{d\xi^i}{dx_k} = \xi^i \frac{d\mathbf{w}_i{}^{k}}{dx_k} - (\mathbf{w}_i{}^{k}\Gamma_{rk}{}^{i}\xi^r) =$$

$$= \xi^i \left(\frac{d\mathbf{w}_i{}^{k}}{dx_k} - \mathbf{w}_\beta{}^{\alpha}\Gamma_{i\alpha}{}^{\beta} \right).$$

Si elegimos los $(\xi^i = 1)$ será

$$\frac{d\mathbf{w}_i{}^{k}}{dx_k} = \frac{d\mathbf{w}_i{}^{k}}{dx_k} - \mathbf{w}_\beta{}^{\alpha}\Gamma_{i\alpha}{}^{\beta} = \text{densidad escalar.}$$

Esta densidad escalar es de gran importancia en la teoría de gravitación de Einstein.

Por diferenciación podemos análogamente elevar el orden de una densidad tensorial. Sea el caso de $\mathbf{s}$ = densidad escalar, elegimos un campo vectorial auxiliar estacionario (ξ^i) y se procede:

$$\frac{d\,(\mathbf{s}\xi^i)}{dx_r} = \xi^i \frac{d\mathbf{s}}{dx_r} + \mathbf{s}\,\frac{d\xi^i}{dx_r} = \xi^i \left(\frac{d\mathbf{s}}{dx_r} - \mathbf{s}\Gamma_{ir}{}^{r} \right),$$

y tomando los $(\xi^i = 1)$ resulta:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dx_r} = \frac{d\mathbf{s}}{dx_r} - \mathbf{s}\Gamma_{ir}{}^{r},$$

densidad covariante de primer orden obtenida por diferenciación de una densidad escalar. Facilísimamente se extiende el método al análisis de tensores o densidades de órdenes superiores y a todas las especies de invariaciones (covariantes, contravariantes, etc.).

Vemos, pues, que la conexión afín nos permite elegir, *ad libitum,* campos vectoriales estacionarios en P, cuyas componentes tienen magnitudes dadas (ξ^i) o (ξ_i) y que esto es posible en virtud de los $(\Gamma_{\alpha\beta}{}^i)$, pues:

$$\frac{d\xi^i}{dx_\alpha} = -\Gamma_{\alpha\beta}{}^i\xi^\beta \qquad \Gamma_{\alpha\beta}{}^i = -\frac{d^2 f_i}{d\bar{x}_\alpha d\bar{x}_\beta}$$

$$x_i = f_i(\bar{x}_k) \qquad k, i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

que nos permite calcular los $(\Gamma_{\alpha\beta}{}^i)$ dadas las (ξ^i), y podemos elegir todos los campos estacionarios que querramos en P de esta manera, covariantes o contravariantes, etc.; los cuales facultan reducir a la invariación escalar cualquier tensor dado en P. Esta «elasticidad» del *continuum* es de una perfección admirable, pues nos permite valernos de todas las propiedades de la geometría afín en el espacio plano, después de la linealización. Teniendo bien presente que la conexión afín nos permite trasladar vectores en P paralelamente a sí mismos de P a P′ (propagación paralela) y mediante un sistema geodésico en P, hacer que esta propagación tenga carácter «invariable» en el elemento infinitesimal de *continuum,* podemos operar en P como en un espacio plano, ni más ni menos, y desarrollar el análisis para tensores y densidades tensoriales *ad libitum.*

Así, pues, un campo tensorial cualquiera en P puede, por diferenciación, dar un campo tensorial de orden mayor en una unidad. Densidades tensoriales por divergencia admiten reducción en una unidad. Densidades escalares por diferenciación producen densidades tensoriales de primer orden.

CAPÍTULO IX

Curvatura vectorial

El concepto de curvatura vectorial en el *continuum* es muy importante. Repetimos que el único *continuum* que nos interesa es el que posee conexión afín (Levi-Civita).

Supongamos un movimiento en el *continuum,* de un punto P, por ejemplo, guiado por un parámetro temporal s cualquiera:

$$P = (x_i), \qquad x_i = \varphi_i(s), \qquad x_i = f_i(\bar{x}_k),$$

$$\frac{d\varphi_i}{ds} = \frac{dx_i}{ds} = u^i; \qquad \frac{du^i}{ds} = \frac{d^2x_i}{ds^2}; \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n;$$

en que (u^i) son los componentes del vector velocidad en P. Si el campo es estacionario en P al instante s tendremos:

$$u^i = \varphi_i'(s),$$

$$\text{(A)} \quad \ldots \quad \frac{du^i}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^i u^\alpha u^\beta = 0.$$

El campo sería estacionario para cualquier otro vector (ξ^i) o (ξ_i) en P al mismo instante si

$$\text{(B)} \quad \ldots \quad \frac{d\xi^i}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^i \xi^\alpha \frac{dx}{ds} = 0$$

$$\text{(C)} \quad \ldots \quad \frac{d\xi_i}{ds} - \Gamma_{i\beta}{}^\alpha \xi_\alpha \frac{dx_\beta}{ds} = 0,$$

como hemos visto al tratar de la conexión afín. Si el sistema fuese geodésico en P tendríamos los $\Gamma = 0$, etc.

Estas ecuaciones expresan las condiciones que tienen que llenar los componentes de un vector determinado unido a un punto $P = (x_i)$ cuando es transportado paralelamente a sí mismo, con P, desde su posición original a otra infinitamente próxima cualquiera; constituyendo así el elemento infinitesimal de *continuum* vecino a P un campo vectorial estacionario. Quiere decir que dentro de este elemento existe una correspondencia afín vectorial de matriz Γ. Hemos visto cómo una rotación del sistema vectorial coordenado en $P(e_i)$ determinado por una transformación conveniente de los (x_i) puede reducir Γ a cero; este sistema coordenado es el geodésico en P. Observamos, pues, que al pasar de un punto P a otro P′ inmediato, y de éste a otro P″, a su vez inmediato, lo que cambia es la clase de conexión afín, esto es, varía la matriz Γ poseyendo esta variación el carácter de continuidad. Cuando no varía Γ tenemos un caso particular de afinidad euclideana más difundida, no limitada ya al elemento infinitesimal en P.

Esto es lo que emana de la integrabilidad de las ecuaciones (A). Podríamos hablar en este caso de una verdadera propagación vectorial paralela inalterable en el *continuum.* Un *continuum* que es euclideanamente afín y que admite traslación infinitesimal de conjunto de todos sus puntos en forma perfectamente homogénea. Esto permite la introducción de sistemas vectoriales lineales de representación en los cuales vectores que tienen diferentes puntos de emergencia, siendo iguales, tendrán componentes iguales en el sistema de re-

ferencia lineal. En una palabra, el espacio del *continuum* es lineal y afín.

Otra manera de definir este espacio lineal en el *continuum* es la que fluye de la consideración de un transporte vectorial paralelo entre dos puntos arbitrarios P y P′. Percibimos que si son integrables las ecuaciones del campo estacionario, correspondientes a este transporte, un vector infinitesimal unido a P llegará a P′ por cualquier camino o trayectoria sin experimentar variación. Esto es: el transporte es independiente del camino, interpretando esto como es debido.

Deducimos la siguiente conclusión de importoncia: que un *continuum* lineal se distingue entre los *continuums* a conexión afín por el hecho de ser integrable el transporte vectorial paralelo infinitesimal, como quien dijera que las ecuaciones (A) son diferenciales posibles de ser integradas.

La curvatura espacial de un *continuum* se mide — como la gaussiana — por el apartamiento del espacio de la condición de espacio plano euclideano.

Volviendo ahora al caso general, supongamos un punto P y un vector v infinitesimal en el mismo. Hagamos un transporte paralelo de v recorriendo P una trayectoria arbitraria cerrada. Manifiestamente que v será v' cuando vuelve a P, esto es: no vuelve a su posición inicial. Imaginemos varias trayectorias cerradas en P y hagamos un transporte paralelo de v haciendo que P recorra, una por una, estas líneas; resultarán v'', v''', etc., vectores al final del transporte en P. Aquí, pues, tenemos un efecto de curvatura. Un caso hay en el cual v vuelve a P sin alteración y este es, precisamente, el caso caracterizado por la integrabilidad geodésica ya considerado. Y es también el caso que distingue al espacio lineal euclideano.

Ahora bien, para conocer la naturaleza del espacio continuo no tenemos más que considerar una curva cerrada en P y un vector infinitesimal en este punto. Transportemos paralelamente el vector haciendo que P recorra el perímetro cerrado lineal anterior, entonces, si el vector vuelve a su posición inicial, diremos que el espacio es plano. Para esto no tenemos más que consultar la integración del transporte a lo largo del perímetro cerrado en P. Empleamos las palabras eligiéndolas con toda intención. Pensemos ahora en el teorema de Stokes. De golpe vemos que este admirable teorema geométrico nos facilita el método de conocer la curvatura en cada punto del *continuum,* como si se tratara de una curvatura específica gaussiana. Veamos ésto: apliquemos una superficie arbitraria á la curva cerrada en

P. Podemos substituir el transporte perimetral por el transporte reticulado del área encerrada por la trayectoria. Pero la rotación reticular nos da una expresión de « intensidad de rotación por unidad de superficie » y ésto, interpretado convenientemente, hará conocer la variación vectorial por unidad de superficie según un elemento de la misma en P, que en el límite es la variación en el punto P, por elemento infinitesimal plano, de determinada dirección; o sea la divergencia de la condición euclideana *plana en el punto* P según la dirección del elemento recorrido. Si esta variación es cero (rotación $= 0$) tendremos un elemento plano en P en la dirección del elemento superficial considerado. Si esta variación es cero (rotación $= 0$) para toda dirección de elementos infinitesimales recorridos en P tendremos un elemento de espacio continuo euclideano en P (curvatura $= 0$).

El lector, de por sí habrá interpretado los elementos de superficies por elementos de superficies paramétricas arbitrarias en el espacio continuo y habrá recordado el principio gaussiano de la invariación de curvatura relativamente a deformaciones continuas de superficies, lo cual hace que sea independiente la curvatura espacial del *continuum* paramétrico de las superficies paramétricas elegidas. Por fin, habrá interpretado la reticulación por una cuadriculación geodésica guiada por dos parámetros arbitrarios, etc.

¿Acaso puede haber algo más completo y admirable que este concepto de curvatura vectorial?

Falta ahora dar expresión matemática a la curvatura y esto es muy sencillo. Tenemos que expresar una variación vectorial por efecto de una traslación paralela al rededor del perímetro de un paralelogramo infinitesimal: un $\Delta x_{rs} = dx_r \delta x_s - \delta x_r dx_s$. Si $\mathbf{x}$ es un vector en P y ΔF una matriz de correspondencia lineal entre la variación $\Delta \mathbf{x}$ y el vector $\mathbf{x}$ mismo, vemos que primeramente

$$\Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{F} \,.\, (\mathbf{x}) \qquad \text{o} \qquad \Delta \xi^i = \Delta F_k{}^i \xi^k$$

y la correspondencia por recorrido exige que

$$\Delta F_k{}^i = f^i{}_{k.rs} dx_r \,.\, \delta x_s = \frac{1}{2} f^i{}_{krs} \,.\, \Delta x_{rs},$$

y de aquí:

$$f^i{}_{k.rs} = -f^i{}_{k.sr},$$

o también en forma de matrices lineales:

$$\Delta \mathbf{F} = F_{rs} dx_r \delta x_s = \frac{1}{2} F_{rs} \Delta x_{rs},$$

por lo tanto:

$$\Delta \mathbf{x} = f^{i}{}_{k.rs}\xi^{k}e_{i}dx_{r}\,.\,\delta x_{s}.$$

Si, pues

$$f^{i}{}_{k.rs} = 0$$

será

$$\Delta \mathbf{x} = 0$$

y el espacio en P es plano, infinitesimalmente se entiende. Existe un elemento infinitesimal de *continuum* plano euclideano en P.

Si $\Delta \mathbf{F} = 0$ resulta que el vector $\mathbf{x}$, después de un recorrido infinitesimal, etc., vuelve a su punto P sin variación y esto implica la condición plana por ese elemento plano. Haciendo intervenir la matriz (Δx_{ik}) abarcamos todos los elementos de superficie ($\square$) en P. $\Delta \mathbf{F}$, pues, es la expresión que caracteriza la curvatura en P del *continuum*. Vemos que es un tensor lineal de matrices, o sea, un tensor de cuarto orden.

Fácilmente

$$f^{i}{}_{krs} = -f^{i}{}_{ksr} \qquad \text{y} \qquad f^{i}{}_{k.rs} + f^{i}{}_{rsk} + f^{i}{}_{skr} = 0$$

todo lo cual se resume en las ecuaciones

$$f^{\alpha}{}_{\beta.ik} = \frac{d\Gamma_{\beta k}{}^{\alpha}}{dx_{i}} - \frac{d\Gamma_{\beta i}{}^{\alpha}}{dx_{k}} + \Gamma_{ri}{}^{\alpha}\Gamma_{\beta k}{}^{r} - \Gamma_{rk}{}^{\alpha}\Gamma_{\beta i}{}^{r},$$

que son las ecuaciones fundamentales riemenianas de la curvatura espacial. Resulta, pues, que se trata de un tensor de cuarto orden, dotado de simetría cíclica y levo-simetría, es decir:

$$f^{\alpha}{}_{\beta.ik} = -f^{\alpha}{}_{\beta ki}; \qquad f^{\alpha}{}_{\beta ik} + f^{\alpha}{}_{ik\beta} + f^{\alpha}{}_{k\beta i} = 0$$

como hemos escrito ya con otros índices. Demostraremos todo esto valiéndonos del método de doble recorrido de un paralelogramo infinitesimal en P. Ya conocemos este procedimiento de H. Weyl. Sea un vector infinitesimal X en P_{00} de componentes (ξ^{i}). Si transportamos el punto de emergencia P_{00} hasta P_{11} por los dos caminos posibles del paralelogramo $P_{00}P_{01}P_{11}P_{10}P_{00}$, resultará evidentemente:

$$\Delta\xi^{\alpha} = d\,.\,\delta\xi^{\alpha} - \delta\,.\,d\xi^{\alpha}$$

$$d\delta\xi^{\alpha} = \{\xi^{\alpha}(P_{11}) - \xi^{\alpha}(P_{01})\} - \{\xi^{\alpha}(P_{10}) - \xi^{\alpha}(P_{00})\}$$

$$\delta d\xi^{\alpha} = \{\xi^{\alpha}(P_{11}^{*}) - \xi^{\alpha}(P_{10})\} - \{\xi^{\alpha}(P_{01}) - \xi^{\alpha}(P_{00})\}$$

$$\Delta\xi^{\alpha} = d\delta\xi^{\alpha} - \delta\,.\,d\xi^{\alpha} = \{\xi^{\alpha}(P_{11}) - \xi^{\alpha}(P_{11}^{*})\}$$

que en el límite, cuando P_{11}, P_{11}^* y P_{00} se confunden, da el valor de $\Delta\xi^\alpha$ en P. De acuerdo, pues, con este resultado geométrico formemos las expresiones analíticas de $d\delta\xi^\alpha$ y $\delta d\xi^\alpha$, recordando que el transporte de los $(d\xi^i)$ puede efectuarse de cualquier manera, y luego imponer la condición paralela

$$d\xi^\alpha = -d\gamma_\beta{}^\alpha\xi^\beta = -\Gamma_{\beta i}{}^\alpha\xi^\beta dx_i,$$

y también será

$$\delta\xi^\alpha = -\delta\gamma_r{}^\alpha\xi^r,$$

así, pues, fácilmente

$$\delta d\xi^\alpha = -\delta\Gamma_{\beta i}{}^\alpha\xi^\beta \,.\, dx_i - (\Gamma_{ri}{}^\alpha\delta\xi^r \,.\, dx_i) - \Gamma_{\beta i}{}^\alpha\xi^\beta\delta \,.\, dx_i$$

$$\delta d\xi^\alpha = -\delta\Gamma_{\beta i}{}^\alpha\xi^\beta dx_i - d\gamma_r{}^\alpha\delta\xi^r - \Gamma_{\beta i}{}^\alpha\xi^\beta\delta \,.\, dx_i$$

en que hemos substituído

$$d\gamma_r{}^\alpha = \Gamma_{ri}{}^\alpha dx_i;$$

pero si el transporte es paralelo tendremos necesariamente

$$\delta\xi^r = -\delta\gamma_\beta{}^r\xi^\beta,$$

en que elegimos los índices como corresponden para indicar el transporte paralelo

$$\delta d\xi^\alpha = -\delta\Gamma_{\beta i}{}^\alpha\xi^\beta dx_i + d\gamma_r{}^\alpha\delta\gamma_\beta{}^r\xi^\beta - \Gamma_{\beta i}{}^\alpha\xi^\beta\delta dx_i,$$

$$\delta d\xi^\alpha = \{ -\delta\Gamma_{\beta i}{}^\alpha \,.\, dx_i + d\gamma_r{}^\alpha\delta\gamma_\beta{}^r - \Gamma_{\beta i}{}^\alpha\delta \,.\, dx_i \} \xi^\beta$$

y análogamente :

$$d\delta\xi^\alpha = \{ -d\Gamma_{\beta k}{}^\alpha\delta x_k + \delta\gamma_r{}^\alpha d\gamma_\beta{}^r - \Gamma_{\beta k}{}^\alpha d\delta x_k \} \xi^\beta.$$

Restando y observando la identidad de los dos últimos términos de los paréntesis :

$$\delta d\xi^\alpha = \{ -\delta\Gamma_{\beta i}{}^\alpha \,.\, dx_i + d\gamma_r{}^\alpha\delta\gamma_\beta{}^r - \Gamma_{\beta i}{}^\alpha\delta \,.\, dx_i \} \xi^\beta$$

$$d\delta\xi^\alpha = \{ -d\Gamma_{\beta k}{}^\alpha\delta x_k + \delta\gamma_r{}^\alpha d\gamma_\beta{}^r - \Gamma_{\beta i}{}^\alpha d\delta x_i \} \xi^\beta$$

$$\Delta\xi^\alpha = (\delta d - d\delta)\,\xi^\alpha = \{ d\Gamma_{\beta k}{}^\alpha\delta x_k - \delta\Gamma_{\beta i}{}^\alpha dx_i + d\gamma_r{}^\alpha\delta\gamma_\beta{}^r - \delta\gamma_r{}^\alpha d\gamma_\beta{}^r \} \xi^\beta$$

$$\Gamma_{\beta i}{}^\alpha (d\delta x_i - \delta dx_i) = 0$$

$$d\gamma_r{}^\alpha = \Gamma_{ri}{}^\alpha dx_i; \qquad \delta\gamma_\beta{}^r = \Gamma_{\beta k}{}^r\delta x_k, \text{ etc.};$$

$$\Delta\xi^\alpha = \{ d\Gamma_{\beta k}{}^\alpha\delta x_k - \delta\Gamma_{\beta i}{}^\alpha dx_i + \Gamma_{ri}{}^\alpha\Gamma_{\beta k}{}^r dx_i \,.\, \delta x_k - \Gamma_{rk}{}^\alpha\Gamma_{\beta i}{}^r dx_i\delta x_k \} \xi^\beta$$

$$\Delta\xi^\alpha = \left[\frac{d\Gamma_{\beta k}{}^\alpha}{dx_i} - \frac{\delta\Gamma_{\beta i}{}^\alpha}{\delta x_k} + \Gamma_{ri}{}^\alpha\Gamma_{\beta k}{}^r - \Gamma_{rk}{}^\alpha\Gamma_{\beta i}{}^r \right] \xi^\beta \,.\, dx_i\delta x_k,$$

pero

$$\Delta\xi^\alpha = (d\delta - \delta d)\,\xi^\alpha = \xi^\alpha(P_{11}) - \xi^\alpha(P_{11}^*) = \Delta F_\beta{}^\alpha \xi^\beta$$

$$\Delta F_\beta{}^\alpha = f^\alpha{}_{\beta ik} \,.\, dx_i \delta x_k$$

$$\Delta\xi^\alpha = \Delta F_\beta{}^\alpha \xi^\beta = f^\alpha{}_{\beta ik}\xi^\beta \,.\, dx_i \delta x_k$$

y

$$f^\alpha{}_{\beta ik} = \frac{d\Gamma_{\beta k}{}^\alpha}{dx_i} - \frac{d\Gamma_{\beta i}{}^\alpha}{dx_k} + \Gamma_{ri}{}^\alpha \Gamma_{\beta k}{}^r - \Gamma_{rk}{}^\alpha \Gamma_{\beta i}{}^r,$$

como sentamos al principio.

La única dificultad es la que ofrece la variación de la componente (ξ^β), que aparece como

$$d\xi^\alpha = -\,d\gamma_\beta{}^\alpha \xi^\beta \qquad \text{o} \qquad \delta\xi^\alpha = -\,\delta\gamma_\beta{}^\alpha \xi^\beta,$$

o con los índices que se han escrito

$$[-\,\delta\gamma_r{}^\alpha \xi^r],$$

y así $\delta\gamma_r{}^\alpha d\xi^r$, aplicando al $d\xi^r$ el criterio de transporte paralelo. Esto es:

$$\left.\begin{aligned} d\xi^r &= -\,d\gamma_\beta{}^r \xi^\beta = -\,\Gamma_{\beta i}{}^r \xi^\beta dx_i \\ \delta\xi^r &= -\,\delta\gamma_\beta{}^r \xi^\beta = -\,\Gamma_{\beta k}{}^r \xi^\beta \delta x_k \end{aligned}\right\}$$

El elemento será plano si los $\Delta\xi^\alpha = 0$. No puede haber confusión entre las letras d y δ si se distinguen por índices *ad hoc.*

El tensor riemeniano de curvatura vectorial es, pues, un tensor de cuarto orden.

Escribiendo R por f tenemos fácilmente

$$f^\alpha{}_{\beta ik} = R^\alpha{}_{\beta ik},$$

de aquí por contracción formamos:

$$R_{ik} = R^\alpha{}_{i\alpha k} \qquad R = g^{ik} R_{ik},$$

y si alteramos convenientemente los índices se tiene:

$$R_{ik} = \frac{d\Gamma_{ik}{}^r}{dx_r} - \frac{d\Gamma_{ir}{}^r}{dx_k} + \Gamma_{rs}{}^s \Gamma_{ik}{}^r - \Gamma_{ks}{}^r \Gamma_{ir}{}^s.$$

Este es el célebre tensor que bajo la letra R (Riemann) interviene en la ley Einstein de gravitación como escalar de curvatura.

Exactamente análogo es el procedimiento de obtener la variación

de $(\Delta\xi^\alpha)$ valiéndose de dos parámetros (r, s). No hay para qué perder tiempo en repetirlo.

Falta ahora, para completar, dar al *continuum* una conexión métrica y calibrarlo (1).

CAPÍTULO X

Campo métrico

Necesitamos formular una métrica, la más simple posible, mediante la cual nos sea posible relacionar magnitudes lineales en diferentes puntos del *continuum*. Fácil es ver que no basta la conexión proyectiva afín, ni tampoco basta la traslación congruente; esto ya lo vimos en el espacio euclideano. La solución exige, pues:

1° Poder hacer comparaciones de magnitudes en un punto P de emergencia : *medir;*

2° Adoptar un calibre : *un metro;*

3° Conocer la variación que experimenta el metro o calibre, por transporte de un punto a otro del *continuum.*

Pudiendo transportar un metro de un punto a otro y luego efectuar comparaciones en este punto, la conexión métrica queda resuelta satisfactoriamente. Este problema admite un número indeterminado de soluciones y el problema inicial es determinar el de máxima sencillez entre todos los posibles.

Riemann fué quien primero observó que una forma cuadrática pitagórica para apreciar magnitudes puede ser substituída por una bicuadrática, por ejemplo, o cualquier otra que se desee elegir, y que llena condiciones iniciales relativamente a signos, e invariación determinadas. Desde este punto puede decirse que arranca el estudio del campo métrico espacial en el *continuum.* Constituye un problema de importancia trascendental. Antes de abordar este estudio vamos a desarrollar matemáticamente la conexión métrica en un *continuum* postulando ser el mismo de naturaleza pitagórica infinitesimal. Quiere decir que podemos representar a

$$Q(xx) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2 \qquad (\varepsilon_i = \pm 1)$$

en el elemento infinitamente pequeño.

(1) Más adelante deduciremos la escalar R de curvatura empleando otro método.

Diremos, pues, que existe una determinación métrica en un *continuum* si en todo punto P los segmentos lineales, que cada vector del cuerpo vectorial en P determina, son comparables entre sí en cuanto a magnitud. Esto se traduce simplemente en lo siguiente: llamando l la longitud de un determinado vector, es decir:

$$l = X^2 = \sum g_{ik}\xi^i\xi^k,$$

si $Y^2 = l$ será $Y^2 = X^2$ y si $Y^2 \neq l$ será $Y^2 \neq X^2$. Esto es axiomático. Falta adoptar una unidad métrica, y en el momento que hacemos esta elección diremos que el *continuum* está calibrado en P.

Supongamos que $l = X^2$ en que $X = 1$, para fijar ideas; llamaremos a l la medida de este segmento. Si cambiamos el calibre en P, adoptando una $l = \lambda\bar{l}$ será

$$\lambda = \frac{\bar{l}}{l}$$

independiente del calibrado y una función de lugar.

Supondremos que λ es siempre positivo. Esto implica que si la forma cuadrática tiene p dimensiones positivas y q negativas, siendo $p + q = n$ tendrá que ser siempre $p > q$. Siendo convencional, así lo estableceremos.

Tratándose de productos escalares es evidente que si

$$(XY) = 0 \qquad \text{será} \qquad X \perp \text{a } Y.$$

En general, pues, se tiene:

$$(XX) = X^2 = \sum_{i=1}^{n} g_{ik}\xi^i\xi^k.$$

$$g_{ik} = g_{ki}$$

en P.

Numerando el *continuum* de manera que

$$P = (x_i) \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

calibramos al mismo en todos sus puntos, es evidente que en cada punto los g_{ik} de la forma fundamental cuadrática son funciones determinadas de los (x_i) y supondremos que éstas son continuas y derivables con derivadas, a la vez, continuas.

Será

$$|g_{ik}| \neq 0$$

en todo punto del espacio o *continuum*, y, por fin

$$p > q$$

como dejamos establecido.

En estas condiciones el problema está resuelto « puntualmente », o sea por puntos. Necesitamos ahora poder relacionar estas determinaciones métricas puntuales entre sí y procederemos exactamente como en el caso de la « conexión afín ». Formularemos una conexión métrica. Nos basamos en una continuidad métrica y diremos que la conexión métrica consiste en el conocimiento del valor de todo segmento desplazado de P a P′ infinitamente próximo en forma congruente: una propagación métrica congruente caracterizada por una « matriz » de transformación que toma la forma infinitesimal $d\varphi$. Esto es, si l varía en un dl por desplazamiento de P a P′

$$dl = -l d\varphi$$

transformando el calibrado en P, y tomando $l' = \lambda l$, siendo λ una función positiva del lugar, sigue fácilmente:

$$dl = -l d\varphi, \qquad l' = \lambda l,$$

$$dl' = \lambda dl + l \,.\, d\lambda = -\lambda l d\varphi + l d\lambda = -l(\lambda d\varphi - d\lambda);$$

pero

$$dl' = -l' d\bar{\varphi}$$

por transformación, por lo tanto:

$$-l' d\bar{\varphi} = -l(\lambda d\varphi - d\lambda) = -\frac{l'}{\lambda}(\lambda d\varphi - d\lambda) = -l'\left(d\varphi - \frac{d\lambda}{\lambda}\right)$$

y de aquí:

$$d\bar{\varphi} = d\varphi - \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Ahora bien, llamaremos sistema geodésico en P aquel para el cual $d\varphi = 0$, lo cual exige que

$$d\varphi = \frac{d\lambda}{\lambda},$$

o que

$$\varphi = \log \lambda;$$

pero

$$d\varphi = \varphi_i dx_i,$$

quiere decir que la única condición necesaria que debe llenar $d\varphi$ para que sea posible un sistema geodésico métrico en P es que sea *una*

forma lineal diferencial. Teniendo presente que λ es una escalar, función de lugar o del punto, basta tomar

$$d \,.\, \log \lambda = \varphi_i dx_i$$

para que

$$d\bar{\varphi} = 0$$

en P, etc.

Fluyen ahora dos consecuencias de la mayor importancia : que la conexión métrica y determinación métrica de un *continuum* exigen la presencia de dos formas fundamentales en toda relación, a saber :

$$x^2 = l = \sum_{ik}^{n} g_{ik} dx_i dx_k, \qquad g_{ik} = g_{ki},$$

$$d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i dx_i.$$

Si transformamos coordenadas resultan los g_{ik} multiplicados λ, esto es :

$$l' = \lambda l = \lambda g_{ik} dx_i dx_k$$

y $d\varphi$ disminuído en $\frac{d\lambda}{\lambda}$,

$$\varphi_i - \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dx_i}, \qquad \lambda > 0,$$

siendo λ una función escalar de los (x_i).

Quiere decir, que estas dos circunstancias deben tenerse muy en cuenta para los efectos de la invariación de las leyes. Las ecuaciones que expresan leyes deben ser tales que se mantengan invariantes por efecto de la transformación

$$\lambda g_{ik}$$

y por la transformación de

$$\varphi_i - \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dx_i}.$$

Pasemos ahora al concepto de la « curvatura métrica » del *continuum.* Ésta se descubre haciendo un doble transporte de un segmento al rededor de un elemento infinitamente pequeño de superficie, o sea, un paralelogramo. Resulta, sin necesidad de mayor comentario :

$$\Delta l = \delta dl - d \,.\, \delta l = \delta(-l d\varphi) - d(-l\delta\varphi)$$

$$= -\delta l \,.\, d\varphi - l\delta \,.\, d\varphi + dl \,.\, \delta\varphi + l \,.\, d\delta\varphi = l\Delta\varphi,$$

pues :

$$\Delta\varphi = d\delta\varphi - \delta d\varphi$$

$$= d(\varphi_i \delta x_i) - \delta(\varphi_k dx_k)$$

$$= \frac{d\varphi_i}{dx_k} dx_k \delta x_i - \frac{d\varphi_k}{dx_i} \delta x_i dx_k$$

$$= \left(\frac{d\varphi_k}{dx_i} - \frac{d\varphi_i}{dx_k}\right) dx_i \delta x_k = f_{ik} \,.\, dx_i \delta x_k$$

$$\Delta\varphi = f_{ik} dx_i \delta x_k = \frac{1}{2} f_{ik} \Delta X_{ik}$$

$$\Delta X_{ik} = dx_i \delta x_k - \delta x_i dx_k;$$

por lo tanto :

$$f_{ik} = -f_{ki} \qquad \frac{df_{kl}}{dx_i} + \frac{df_{li}}{dx_k} + \frac{df_{ik}}{dx_l} = 0.$$

Si $\Delta\varphi = 0$ la curvatura es nula y el transporte es invariable en P. Resumiendo :

$$\Delta l = l\Delta\varphi, \qquad \Delta\varphi = \frac{1}{2} f_{ik} \Delta X_{ik},$$

$$f_{ik} = -f_{ki}, \qquad f_{ik} = \frac{d\varphi_k}{dx_i} - \frac{d\varphi_i}{dx_k},$$

$$\Delta\varphi = 0 \qquad \text{si} \qquad f_{ik} = 0,$$

o sea rotación $= 0$, que implica una $f =$ grad, que es la condición de diferencial exacta o de integrabilidad. Basta elegir $d\varphi = d \,.\, \log \lambda$ en que $\lambda(x_i) > 0$ y obtendremos un sistema geodésico en P, etc.

Esta condición de $\Delta\varphi = 0$, que hace que $\Delta l = 0$, es la característica del espacio riemeniano. En este espacio es posible, en virtud de $\Delta l = 0$, transportar un metro a cualquier punto del *continuum*.

Por otra parte, se ve y se comprende que la curvatura métrica es independiente del calibrado.

Se llama « calibrado normal », en un espacio Riemann, aquel que hace

$$d\varphi = 0,$$

esto exige naturalmente $\Delta\varphi = 0$, rot $= 0$ y $f =$ grad, como ya indicamos, etc.

Resumiendo; podemos decir que la curvatura métrica de un *continuum* es un tensor lineal de segundo orden de componentes

$$f_{ik} = \frac{d\varphi_k}{dx_i} - \frac{d\varphi_i}{dx_k}, \qquad d\varphi = \varphi_i dx_i.$$

Cuando $f_{ik} = 0$, φ deriva de una potencial escalar, etc.

Calibrando normalmente un espacio Riemann a n dimensiones, será:

$$|g_{ik}| \neq 0, \qquad l = Q = \sum_{ik}^{n} g_{ik} dx_i dx_k, \qquad g_{ik} = g_{ki}$$

constante y determinado con excepción del factor numérico que distingue la unidad.

Llegamos ahora, como dice Weyl con entusiasmo, al pináculo de la geometría infinitesimal, o sea, la íntima relación entre campos métrico y afín. Esto se expresa así: todo transporte métrico congruente entre P y P′ es, *ipso facto,* un transporte paralelo. Lo cual significa que el transporte invariable de un segmento de P a P′ acarrea forzosamente el transporte invariable de la dirección del vector que determina al segmento en P. Podríamos interpretar esto más significativamente, así: la conexión métrica impone simultáneamente la conexión afín en el *continuum,* y es así cómo el lector comprenderá «el entusiasmo de Weyl», puesto que la harmonía de los resultados alcanzados es admirable.

Esto se demuestra fácilmente como sigue.

Si

$$\mathrm{X} = (\xi^i) \qquad \text{en} \qquad \mathrm{P} = (x_i)$$

y

$$(\xi^i + d\xi^i) \qquad \text{en} \qquad \mathrm{P}' = (x_i + dx_i),$$

será por traslación:

$$d\xi^i = -\, d\gamma_k{}^i \xi^k,$$

$$d\gamma_k{}^i = \Gamma_{kr}{}^i dx_r;$$

por otra parte:

$$l = g_{ik}\xi^i\xi^k, \qquad g_{ik} = g_{ki},$$

esto es, el tensor es simétrico en i y k, tenemos:

$$\begin{aligned} dl &= \xi^i\xi^k dg_{ik} + g_{ik} d(\xi^i\xi^k) \\ &= \xi^i\xi^k dg_{ik} + g_{ik}(\xi^k d\xi^i + \xi^i d\xi^k) \\ &= \xi^i\xi^k dg_{ik} + (g_{ik}\xi^k)\, d\xi^i + (g_{ik}\xi^i)\, d\xi^k \\ &= \xi^i\xi^k dg_{ik} + \xi_i d\xi^i + \xi_k d\xi^k \\ &= 2\xi_i\, d\xi^i + \xi^i\xi^k dg_{ik} \end{aligned}$$

pero

$$dl = -ld\varphi = -g_{ik}\xi^i\xi^k d\varphi = 2\xi_i d\xi^i + \xi^i\xi^k dg_{ik}$$

$$-2\xi_i \cdot d\gamma_k{}^i\xi^k + \xi^i\xi^k dg_{ik} = -g_{ik}\xi^i\xi^k d\varphi,$$

y

$$-2\xi_i\xi^k d\gamma_k{}^i = -2\xi^i\xi^k d\gamma_{ik}.$$

Resulta entonces :

$$2d\gamma_{ik} = dg_{ik} + g_{ik}d\varphi,$$

o, por simetría

$$d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki} = dg_{ik} + g_{ik}d\varphi,$$

o sea :

$$\Gamma_{i.kr} + \Gamma_{k.ir} = \frac{dg_{ik}}{dx_r} + g_{ik}\frac{d\varphi}{dx_r}.$$

Por rotación cíclica :

$$\Gamma_{i.kr} + \Gamma_{k.ir} = \frac{dg_{ik}}{dx_r} + g_{ik}\varphi_r, \qquad \varphi_r = \frac{d\varphi}{dx_r}, \tag{1}$$

$$\Gamma_{i.rk} + \Gamma_{r.ik} = \frac{dg_{ir}}{dx_k} + g_{ir}\varphi_k, \tag{2}$$

$$\Gamma_{k.ri} + \Gamma_{r.ki} = \frac{dg_{kr}}{dx_i} + g_{kr}\varphi_i. \tag{3}$$

Sumando (2) y (3) y restando (1) recordando que

$$\Gamma_{ab}{}^i = \Gamma_{ba}{}^i$$

y

$$\Gamma_{i.ab} = \Gamma_{i.ba},$$

tenemos :

$$2\Gamma_{r.ik} = \frac{dg_{kr}}{dx_i} + \frac{dg_{ir}}{dx_k} - \frac{dg_{ik}}{dx_r} + g_{kr}\varphi_i + g_{ir}\varphi_k - g_{ik}\varphi_r,$$

o sea, pasando el factor 2 :

$$\Gamma_{r.ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{dg_{kr}}{dx_i} + \frac{dg_{ir}}{dx_k} - \frac{dg_{ik}}{dx_r}\right) + \frac{1}{2}(g_{kr}\varphi_i + g_{ir}\varphi_k - g_{ik}\varphi_r),$$

y también vemos que se tiene

$$\Gamma_{ik}{}^s = g^{rs}\Gamma_{r.ik} = g^{sr}\Gamma_{r.ik} = g^{sr}\Gamma_{r.ki}, \text{ etc.}$$

$$\Gamma_{r.ik} = g_{rs}\Gamma_{ik}{}^s = g_{rs}\Gamma_{ki}{}^s = g_{sr}\Gamma_{ki}{}^s, \text{ etc.},$$

lo cual deja demostrado el teorema revelando que la conexión afín es indispensable para la conexión métrica.

Si, pues, tuviéramos en P:

$$d\varphi = 0 \qquad \text{y} \qquad g_{ik} = \text{constantes}$$

serían los $\Gamma_{irk} = 0$, y el sistema es métrica y afínmente geodésico en P, o lo que es lo mismo: condiciones euclideanas en P. En otras palabras, si elegimos en P un calibrado geodésico y un sistema afín geodésico, será:

$$d\varphi = 0 \qquad \text{y} \qquad \Gamma_{r.ik} = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{dg_{rs}}{dx_i} = 0$$

y, por lo tanto, los g_{ik} son constantes y el elemento espacial es plano en P.

Ahora podrá ver el lector cómo todo el cálculo tensorial desarrollado para el *continuum* afín pasa a pertenecer también al campo métrico.

Para terminar, vamos a demostrar una relación geométrica entre las curvaturas vectorial y métrica que es de importancia y sirve especialmente para aclarar conceptos:

$$\Delta\,(f_i\xi^i) = f_i\Delta\xi^i;$$

como sabemos:

$$\Delta = (d\delta - \delta d),$$

$$\Delta l = l\Delta\varphi = \Delta\,(\xi_i\xi^i) = (\xi_i\xi^i)\,\Delta\varphi,$$

$$\Delta\,(\xi_i\xi^i) = \Delta\,(g_{ik}\xi^i\xi^k) = g_{ik}\xi^i\,.\,\Delta\xi^k + g_{ik}\xi^k\,.\,\Delta\xi^i = 2\xi_i\Delta\xi^i = (\xi_i\xi^i)\,\Delta\varphi,$$

y por lo tanto:

$$\xi_i\Delta\xi^i = \frac{1}{2}\,(\xi_i\xi^i)\,\Delta\varphi,$$

o bien:

$$\xi_i\Delta\xi^i - \frac{1}{2}\,(\xi_i\xi^i)\,\Delta\varphi = 0.$$

Si nos fijamos en los productos escalares percibiremos la siguiente correspondencia vectorial:

$$(\mathbf{X}\,.\,\Delta\mathbf{X}) - \left(\mathbf{X}\cdot\frac{1}{2}\,\Delta\varphi\mathbf{X}\right) = 0,$$

y así:

$$(\mathbf{X}\,.\,\Delta\mathbf{X}) = 0 + \left(\mathbf{X}\,.\,\mathbf{X}\,\frac{1}{2}\,\Delta\varphi\right),$$

si $\Delta\mathbf{X}^*$ es un vector perpendicular a $\mathbf{X}$ podemos escribir:

$$(\mathbf{X}\,.\,\Delta\mathbf{X}) = (\mathbf{X}\,.\,\Delta\mathbf{X}^*) + \left(\mathbf{X}\,.\,\mathbf{X}\,\frac{1}{2}\,\Delta\varphi\right)$$

o sea, que deriva por proyección escalar de

$$\Delta \mathbf{X} = \Delta \mathbf{X}^* + \mathbf{X} \cdot \frac{1}{2} \Delta \varphi$$

en componentes:

$$\Delta \xi^a = \Delta^* \xi^a + \frac{1}{2} \xi^b f_{ik}\, dx_i \delta x_k,$$

y, por lo tanto, en tensores de curvaturas:

$$F^a{}_{bik} = F^{*a}{}_{bik} + \frac{1}{2} \xi f_b{}^a{}_{ik}$$

$$\Delta \mathbf{X}^* = F^{*a}{}_{bik} e_a \xi^b dx_i \delta x_k$$

en que reconocemos una curvatura de dirección F* normal a la vectorial.

La normalidad de F* se expresa fácilmente por medio de una componente normal (ξ^b), por ejemplo:

$$F^{a^*}{}_{b\,.\,ik} \xi_a \xi^b dx_i \delta x_k = F^*{}_{ab\,.\,ik} \xi^a \xi^b dx_i \delta x_k = 0$$

en que estos números constituyen un sistema doblemente simétrico, en ab y en ik.

Cuando el calibrado y sistema coordenado son geodésicos en P tenemos un elemento plano en P:

$$d\varphi = 0 \qquad dg_{ik} = 0;$$

quiere decir que los g_{ik} de la forma Q en P son estacionarios. De aquí fluye que un vector habrá sido propagado paralelamente de P a P′ infinitamente próximo si sus componentes en un sistema geodésico en P se mantienen inalterables o invariables.

Como en una traslación del punto $P = [x_i(s)]$, de P a $P' = [x_i(s + ds)]$ el vector velocidad $\left(\frac{dx_i}{ds} = u^i\right)$ es llevado paralelamente con P, tendremos la ecuación métrica evidente:

$$\frac{dl}{ds} + l \frac{d\varphi}{ds} = 0, \qquad \text{o} \qquad \frac{d(u_i u^i)}{ds} + (u_i u^i)(\varphi_i u^i) = 0,$$

$$u^i = \frac{dx_i}{ds},$$

o, si se quiere, como

$$u_i u^i = g_{ik} u^i u^k = g^{ik} u_i u_k = l,$$

tenemos:

$$\frac{d(g_{ik} u^i u^k)}{ds} + g_{ik} u^i u^k \cdot \left(\varphi_i \frac{dx_i}{ds}\right) = 0$$

cuando la cuadrática Q es indefinida puede ser $u_i u^i = 0$, en un instante cualquiera y vemos que si esto es así será $= 0$ en todo el recorrido de P, pues ésterecorre una geodésica de longitud nula. Si, pues, $u_i u^i = 0$, vemos que el segundo término de la geodésica desaparece, e igualmente el primer término si no alteramos la determinación métrica.

CAPÍTULO XI

Cálculo tensorial

Un tensor es una relación proyectiva y depende, por medio de sus componentes, del sistema coordenado en el *continuum*. Es independiente del calibrado. Para establecer una conexión métrica, diremos que toda forma lineal que pasa de un sistema de coordenadas a otro por medio de la transformación conocida y la multiplicación por λ^e, en que λ sale de

$$l' = \lambda l,$$

es un tensor de peso e. La razón está a la vista, puesto que

$$\xi^i = g^{ik}\xi_k, \qquad \xi_r = g_{rs}\xi^s,$$

y al transformar, o cambiar el calibrado, resultan los g_{ik} multiplicados por λ, etc.

Cuando multiplicamos a cualquier tensor por la densidad escalar $\sqrt{g}$ en que

$$g = |g_{ik}|$$

tomado con signo $+$ si q es par, y con signo $-$ si q es impar, en que $q =$ índices negativos de inercia y $p > q$, siendo

$$p + q = n,$$

obtenemos una densidad tensorial de peso más elevado que el original en

$$e = \frac{n}{2}$$

unidades, como es fácil comprobar.

Los

$$\sqrt{g} = \sqrt{|g_{ik}|}$$

y cada término de g tiene n elementos en g_{ik}, que al transformar cali-

brado cada uno resultará multiplicado por λ y el total por λ^n, que debido a la raíz cuadrada da

$$e = \frac{n}{2}$$

como queda indicado.

Se presenta, pues, un método cómodo de cálculo mediante un juego de índices. Esto es, si

$$\xi_s = g_{sr}\xi^r,$$

vemos que, bajando un índice contravariante, elevamos el peso en una unidad, en un tensor cualquiera, y

$$\xi^k = g^{ik}\xi_i = g^{ki}\xi_i$$

es la inversa, y subiendo un índice covariante disminuímos el peso en una unidad; restablecemos la cosa mediante los

$$g_{ik}\xi^k = g_{ki}g^{ki}\xi_i, \text{ etc.},$$

como es evidente.

Notemos una cosa: si el espacio es riemeniano, es decir:

$$f_{ik} = 0 \qquad d\varphi = \varphi_i dx_i$$

es lineal, podemos calibrar normalmente y entonces $d\varphi = 0$ y los g_{ik} toman valores estacionarios. Quiere decir que

$$Q = l = \sum_{ik}^{n} g_{ik}dx_i dx_k$$

tiene un valor perfectamente determinado en el *continuum*. Es evidente, en consecuencia, que todo tensor es a la vez densidad tensorial o que no existe diferencia entre tensores y densidades tensoriales. Como en el caso de vectores cuando el sistema es normal cartesiano, desaparece la distinción entre contra y covariación. Ahora la multiplicación por $\sqrt{g}$ es la multiplicación por un factor constante, etc.

Para abreviar y evitar confusiones los geómetras alemanes distinguen entre tensores y densidades tensoriales obtenidas por la multiplicación por $\sqrt{g}$, mediante una letra especial, letras negras, por ejemplo:

$$\mathbf{R} = \sqrt{g}\mathrm{R}; \qquad \mathbf{F} = \sqrt{g}\mathrm{F}, \text{ etc.}$$

Consideremos un *continuum* a cuatro dimensiones, tres positivas y una imaginaria, o sea, tres índices positivos y uno negativo:

$$p + q = 3 + 1 = 4,$$

$\sqrt{g}$ dará un aumento 2 de peso como se ve.

f_{ik} son las componentes de curvatura métrica, que es un tensor lineal de segundo orden. El tensor obtenido elevando los índices resulta ser contravariante y de peso negativo, o sea — 2, desprovisto de significado. Convirtiendo este tensor en densidad tensorial lineal de segundo orden por multiplicación de $\sqrt{g}$, elevamos el peso en dos unidades, así, pues, obtenemos una densidad tensorial de peso cero:

$$\sqrt{g} f^{ik} = \mathbf{f}^{ik}.$$

Por divergencia esta densidad nos da la densidad lineal de primer orden

$$\frac{d\mathbf{f}^{ik}}{dx_k} = \mathbf{f}^i,$$

que es una magnitud con aspecto de « densidad de corriente » en el caso general. Ya conocemos este aspecto de la divergencia:

$$\frac{d\mathbf{w}^{ik}}{dx_k} = \mathbf{w}^i, \text{ etc.}$$

Muy sencillo es caracterizar el espacio riemeniano, como ya explicamos. No hay más que tener en cuenta que

$$Q = g_{ik} dx_i dx_k$$

es invariante, o sea un tensor simétrico covariante de segundo orden. Además los

$$d\varphi = 0 \qquad \text{o} \qquad \varphi_i = 0.$$

Así, pues:

$$\Gamma_{r.ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{dg_{rk}}{dx_i} + \frac{dg_{ir}}{dx_k} - \frac{dg_{ik}}{dx_r}\right) + \frac{1}{2}(g_{rk}\varphi_i + g_{ir}\varphi_k - g_{ik}\varphi_r),$$

$$\Gamma_{r \cdot ik} = g_{rs}\Gamma_{ik}{}^s,$$

para el caso de *continuum* riemeniano es

$$\Gamma_{r.ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{dg_{rk}}{dx_i} + \frac{dg_{ir}}{dx_k} - \frac{dg_{ik}}{dx_r}\right).$$

Christoffel escribe los $\Gamma_{r.ik}$ en la forma simbólica siguiente adoptada en todas partes hoy día:

$$\Gamma_{r.ik} = \begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{dg_{rk}}{dx_i} + \frac{dg_{ir}}{dx_k} - \frac{dg_{ik}}{dx_r}\right)$$

$$\Gamma_{r.ik} = g_{rs}\Gamma_{ik}^{s}, \qquad \begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} = g_{rs} \begin{Bmatrix} ik \\ s \end{Bmatrix},$$

$$\Gamma_{ik}^{r} = g^{rs}\Gamma_{s.ik}, \qquad \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} = g^{rs} \begin{bmatrix} ik \\ s \end{bmatrix}.$$

Pasaremos a resolver, mecánicamente, algunos ejemplos útiles, como ejercicio del cálculo.

Sea la ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{d\sqrt{g}}{dx_i} - \begin{Bmatrix} ir \\ r \end{Bmatrix} = 0;$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{d\sqrt{g}}{dx_i} = \Gamma_{ir}^{r}, \qquad \frac{d\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \Gamma_{ir}^{r} dx_i,$$

pero

$$\frac{d\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{2} \frac{dg}{\sqrt{g}} = \frac{1}{2} \frac{dg}{g},$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dg}{g} = \frac{1}{2} \frac{d|g_{ik}|}{|g_{ik}|} = \frac{1}{2} \frac{\dfrac{d\Delta}{dg_{ik}}}{\Delta} dg_{ik} = \frac{1}{2} g^{ik} dg_{ik},$$

pues, sabemos que

$$g^{ik} = \frac{\dfrac{d\Delta}{dg_{ik}}}{\Delta}.$$

Así, pues:

$$\frac{1}{2} \frac{d\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \frac{1}{2} \frac{dg}{g} = \frac{1}{2} g^{ik} dg_{ik};$$

pero también sabemos que

$$g_{ir} g^{rk} = \delta_i^k,$$

$$g_{ir} dg^{rk} + g^{rk} dg_{ir} = 0,$$

$$g_{ir} dg^{rk} = - g^{rk} dg_{ir},$$

y como k recorre todos los valores y hay simetría entre i y k resulta:

$$g_{ik} dg^{ik} = - g^{ik} dg_{ik},$$

o

$$g_{ir} dg^{ir} = - g^{ir} dg_{ir}.$$

Así, pues:

$$\frac{d\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = - \frac{1}{2} g_{ir} dg^{ir} = \frac{1}{2} g^{ir} dg_{ir},$$

o siendo ab independientes, tenemos:

$$\frac{1}{2} g_{ab} \frac{dg_{ab}}{dx_i} = - g_{ab} \frac{dg^{ab}}{dx_i};$$

los índices ab varían como los ir, etc.

$$\frac{1}{2} g^{ab} \frac{dg_{ab}}{dx_i} - \Gamma_{ir}{}^{r} = 0; \qquad \frac{1}{2} \frac{dg_{ir}}{dx_i} - g_{ir}\Gamma_{ir}{}^{r} = 0;$$

siempre hay que notar la dependencia de índices, etc.:

$$\frac{1}{2} \frac{dg_{ir}}{dx_i} - g_{ir}\Gamma_{ir}{}^{r} = 0 = \frac{1}{2} \frac{dg_{ir}}{dx_i} - g_{ri}\Gamma_{ri}{}^{r}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{dg_{ir}}{dx_i} - \Gamma_{r.ri},$$

o sea:

$$\frac{1}{2} \frac{dg_{ir}}{dx_i} = \Gamma_{r.ir} = \begin{bmatrix} ir \\ r \end{bmatrix},$$

ecuación que ya hemos hallado al estudiar la relación entre conexión métrica y conexión afín. Por otra parte, no hay más que elegir un sistema normal geodésico en P para descubrir la evidencia de la ecuación, pues se anulan los términos.

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{d\left(\sqrt{g} \cdot g^{ik}\right)}{dx_k} + \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} g^{rs} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\sqrt{g} \cdot dg^{ik} + g^{ik} d\sqrt{g}}{dx_k} = \frac{dg^{ik} + g^{ik} \dfrac{d\sqrt{g}}{\sqrt{g}}}{dx_k} =$$
$$= \frac{dg^{ik} - \dfrac{1}{2} g^{ik} \cdot g_{ik} dg^{ik}}{dx_k} = \frac{1}{2} \frac{dg^{ik}}{dx_k}.$$

Así, pues:

$$\frac{1}{2} \frac{dg^{ik}}{dx_k} + g^{rs} \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} = 0;$$

pero sabemos que

$$2\Gamma_{k.ik} = \frac{dg_{ik}}{dx_k}; \qquad g^{ik}\Gamma_{k.ik} = \frac{1}{2} \frac{g^{ik} dg_{ik}}{dx_k} = - \frac{1}{2} \frac{g_{ik} dg^{ik}}{dx_k}$$

$$\Gamma_{ik}{}^{i} = - \frac{1}{2} \frac{g_{ik} dg^{ik}}{dx_k}$$

la dependencia de índices es manifiesta :

$$g^{ik}\Gamma_{ik}{}^{i} = -\frac{1}{2}\frac{dg^{ik}}{dx_k} = g^{rs}\Gamma_{rs}{}^{i} = g^{ik}\Gamma_{ki}{}^{i}.$$

Por fin, consideremos el siguiente caso :

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{d\left(\sqrt{g}\,.\,g^{ik}\right)}{dx_l} + \left\{ {lr \atop i} \right\} g^{rk} + \left\{ {lr \atop k} \right\} g^{ri} - \left\{ {lr \atop r} \right\} g^{ik} = 0,$$

el juego de índices es sencillo ; tenemos :

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{dg^{ik}}{dx_l} = g^{ik}\Gamma_{lr}{}^{r} - g^{ri}\Gamma_{lr}{}^{k} - g^{rk}\Gamma_{lr}{}^{i},$$

$$g^{ir}\,.\,g^{ik}\Gamma_{i\,.\,lr} = g^{ik}\Gamma_{lr}{}^{r},$$

$$\frac{1}{2}\frac{dg^{ik}}{dx_l} = g^{ik}\,.\,g^{kr}\Gamma_{k\,.\,lr} - g^{ri}\,.\,g^{rk}\Gamma_{r\,.\,lr} - g^{rk}\,.\,g^{ri}\Gamma_{r\,.\,lr}$$

$$= -\,g^{ir}g^{rk}\Gamma_{r\,.\,lr} = -\,g^{ir}\Gamma_{lr}{}^{k} = -\,g^{ik}\Gamma_{lr}{}^{r}$$

$$\frac{1}{2}\frac{g_{ik}dg^{ik}}{dx_l} = -\,\Gamma_{lr}{}^{r} = -\frac{1}{2}\frac{g^{ik}dg_{ik}}{dx_l};$$

por fin

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{d\sqrt{g}}{dx_l} = \Gamma_{lr}{}^{r} = \left\{ {lr \atop r} \right\}$$

resultado conocido.

Por otra parte, todas estas ecuaciones son evidentes.

Hemos visto cómo las componentes de curvatura vectorial tienen la forma :

$$\mathrm{F}_{bik}{}^{a} = \frac{d\Gamma_{bk}{}^{a}}{dx_i} - \frac{d\Gamma_{bi}{}^{a}}{dx_k} + \Gamma_{ri}{}^{a}\Gamma_{bk}{}^{r} - \Gamma_{rk}{}^{a}\Gamma_{bi}{}^{r}.$$

Si ponemos R por P y cambiamos índices :

$$\mathbf{R}^{a}{}_{i\,.\,ak} = \frac{d\Gamma_{ik}{}^{a}}{dx_a} - \frac{d\Gamma_{ia}{}^{a}}{dx_k} + \Gamma_{ra}{}^{a}\Gamma_{ik}{}^{r} - \Gamma_{rk}{}^{a}\Gamma_{ia}{}^{r};$$

empleando r en vez a, y s en vez de r :

$$\mathbf{R}^{r}{}_{irk} = \mathbf{R}_{ik} = \frac{d}{dx_r}\left\{ {ik \atop r} \right\} - \frac{d}{dx_k}\left\{ {ir \atop r} \right\} + \left\{ {ik \atop s} \right\}\left\{ {sr \atop r} \right\} - \left\{ {ir \atop s} \right\}\left\{ {ks \atop r} \right\};$$

permutando índices en el penúltimo término y contrayendo :

$$\mathbf{R}_{ik} = \frac{d}{dx_r}\left\{ {ik \atop r} \right\} - \frac{d}{dx_k}\left\{ {ir \atop r} \right\} + \left\{ {ik \atop r} \right\}\left\{ {rs \atop s} \right\} - \left\{ {ir \atop s} \right\}\left\{ {ks \atop r} \right\}.$$

Esta es la célebre expresión de componentes contraídas, de segundo orden, de Einstein : espacio Riemann.

Hemos dicho que el tensor de curvatura de componentes ($\mathbf{R}_{bik}{}^{a}$) tiene doble simetría, esto es, se entiende un espacio Riemann en que

$$f_{ik} = 0 \qquad (\mathbf{R} = \mathbf{R}^{*}),$$

$$\mathbf{R}_{ab\,.\,ik} = -\mathbf{R}_{abki} = -\mathbf{R}_{ba\,.\,ik} = \mathbf{R}_{ba\,.\,ki},$$

y por la misma razón de igualdad entre curvaturas vectorial y direccional, resulta

$$\mathbf{R}_{abik} + \mathbf{R}_{aikb} + \mathbf{R}_{akbi} = 0.$$

Riemann liga este tensor con dos elementos de superficie :

$$\frac{1}{4}\mathbf{R}_{ab\,.\,ik}\Delta x_{ab}\,.\,\Delta x_{ik} = \frac{1}{4}\mathbf{R}_{ab\,.\,ik}\frac{\Delta x_{ab}}{\Delta x_{ik}}(\Delta x_{ik})^2.$$

Einstein obtiene el tensor de segundo orden por contracción, o sea :

$$\mathbf{R}^{a}{}_{iak} = \mathbf{R}_{ik} = g_{ik}\mathbf{R}$$

$$\mathbf{R} = g^{ik}\mathbf{R}_{ik} = g_{ik}\mathbf{R}^{ik}, \text{ etc.},$$

en que $\mathbf{R}$, la escalar de curvatura, es la gaussiana. El lector ve que el orden de este tensor depende del carácter del dominio que se considera. Ya lo hemos visto en definiciones.

Más adelante haremos una deducción de la escalar R de curvatura riemeniana, partiendo de la ecuación de curvatura esférica general, expresada por :

$$ds^2 = \frac{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)\sum_i^n dx_i^2 - a\left(\sum_i^n x_i dx_i\right)^2}{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)^2};$$

(x_i) = parámetros gaussianos; a = constante de curvatura esférica.

Fácilmente podrá el lector hallar la siguiente expresión para la escalar $\mathbf{R}$ suponiendo un sistema normal geodésico en P :

$$\mathbf{R} = g_{ii\,.\,kk} - g_{ik\,.\,ik},$$

en que

$$g_{ik\,.\,rs} = \frac{d^2 g_{ik}}{dx_r dx_s}.$$

CAPÍTULO XII

Trayectorias geodésicas. Función hamiltoniana

Concentraremos nuestra atención sobre las trayectorias estacionarias o geodésicas. Ya las conocemos por las aplicaciones del cálculo de variaciones.

Weyl dice, con cierto humor, que una trayectoria geodésica es «un valor en sal». Esto es, no sabemos si es un mínimo *minimorum* o no. Un círculo máximo sobre una esfera, segmentada por dos puntos, nos permite apreciar esto: la geodésica es, precisamente, un círculo máximo sobre la esfera, pero podemos marchar de un punto a otro del mismo de dos maneras: sea directamente o por las antípodas. Corresponde, pues, la designación hamiltoniana de «estacionarias» a estas trayectorias en virtud de su variación infinitesimal nula, cuando desviamos a las curvas o líneas paramétricamente.

Consideremos la historia de un punto P del *continuum* que densifica una acción guiada por el parámetro extraño s, o sea una densificación unidimensional en el *continuum* o trayectoria lineal. Esta densificación nos permite distinguir o percibir la línea puntual del resto de los puntos del *continuum*. El punto P se traslada de $P = [x_i(s)]$ a otra posición P′ por un camino que tiene una longitud L determinada. La trayectoria $\overline{PP'}$ será estacionaria si

$$\delta L = 0,$$

o sea, variando infinitesimalmente el camino seguido de P a P′ no se produce alteración de longitud. Bien conocido del cálculo de variaciones es todo esto.

Observemos ahora que si el espacio continuo es riemeniano a calibrado normal, tendremos:

$$\varphi_i = 0, \qquad dl + l d\varphi = 0;$$

pero

$$d\varphi = 0.$$

Así, pues:

$$dl = 0,$$

y como

$$l = \xi_i \xi^i = g_{ik} \xi^i \xi^k$$

resulta:

$$d(\xi^i\xi_i) = 0,$$

o

$$\xi_i d\xi^i = -\xi^i d\xi_i.$$

Recordando lo ya explicado tendremos:

$$-\xi_i\Gamma_{ab}{}^i\xi^a dx_b = -\xi^i\Gamma_{ib}{}^a\xi_a dx_b,$$

$$g_{ik}\xi^k\Gamma_{ab}{}^i\xi^a = \xi^i\Gamma_{ib}{}^a\xi_a,$$

$$\Gamma_{k.ab}\xi^k\xi^a = \Gamma_{ib}{}^a\xi^i\xi_a,$$

y, en virtud de simetría en i, k resulta:

$$\Gamma_{kab}\xi^k\xi^a = \Gamma^a{}_{kb}\xi^k\xi_a.$$

Vemos, en consecuencia, que tratándose del transporte paralelo de un vector covariante en P (ξ_i) tenemos:

$$d\xi_i - \begin{bmatrix} i\beta \\ \alpha \end{bmatrix}\xi^\alpha dx_\beta = 0 \quad \Big\} \; \Gamma_{\alpha.i\beta} = \begin{bmatrix} i\beta \\ \alpha \end{bmatrix},$$

$$d\xi_i - \left\{ \begin{matrix} i\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\}\xi_\alpha dx_\beta = 0 \quad \Big\} \; \Gamma_{i\beta}{}^\alpha = \left\{ \begin{matrix} i\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\}.$$

Si, pues, $\xi_i = u_i$ son las componentes covariantes del vector velocidad en P, se tiene:

$$\xi_i = u_i = g_{ik}u^k = g_{ik}\frac{dx_k}{ds},$$

$$\frac{du_i}{ds} - \begin{bmatrix} i\beta \\ \alpha \end{bmatrix} u^\alpha u^\beta = 0,$$

$$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2}\frac{dg_{\alpha\beta}}{dx_i}\cdot u^\alpha u^\beta = 0,$$

en virtud de que

$$\Gamma_{\alpha.i\beta} = \frac{1}{2}\frac{dg_{\alpha\beta}}{dx_i}, \qquad (\varrho^i = 0).$$

Pero la longitud l de un elemento de trayectoria es, como sabemos:

$$l = Q = g_{ik}\frac{d\xi^i}{ds}\cdot\frac{d\xi^k}{ds},$$

en que $x_i(s)$ es la historia de P y

$$\xi^i = \xi^i(s)$$

el vector velocidad en P, siendo por definición

$$\xi^i = \frac{dx_i}{ds}$$

como se ve.

La longitud de la geodésica fluye directamente de la simple consideración elemental de que si P describe una historia libremente será:

$$Q = g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds} = \text{constante},$$

o sea que:

$$\begin{cases} d(u_i u^i) = 0, \\ u_i u^i = \text{constante}. \end{cases}$$

La longitud entre $a \leq s \leq b$, sería pues:

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{Q} \,.\, ds,$$

y siendo geodésica tendremos:

$$\delta L = \delta \int_a^b ds = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\delta Q}{\sqrt{Q}} ds = 0,$$

que es la condición fundamental.

Eligiendo el arco como parámetro, será $Q = 1$ y tenemos:

$$\delta L = \frac{1}{2} \int_a^b \delta Q \,.\, ds,$$

en que hay que calcular a δQ. Esto es elemental y directo, como sigue:

$$Q = (x_i), \qquad x_i = x_i(s),$$

$$dx_i = \frac{dx_i}{ds} \cdot ds = u^i ds,$$

y la variación:

$$\delta x_i = \frac{\delta x_i}{\delta s} ds = \xi^i ds \qquad \text{o} \qquad (\delta s),$$

o bien, es lo mismo apreciar $\frac{\delta x_i}{\delta s}$ en un trecho ds como en uno δs, etc.:

$$\xi^i = \frac{\delta x_i}{\delta s}.$$

Teniendo presente estos detalles, pasemos a la variación de Q :

$$Q = g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds},$$

$$\delta Q = \delta g_{ik} \cdot \frac{dx_i}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds} + g_{ik} \delta \left(\frac{dx_i}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds} \right) =$$

$$= \frac{\delta g_{ik}}{\delta s} \cdot \delta s \cdot \frac{dx_i}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds} + 2 g_{ik} \frac{dx_k}{ds} \cdot \delta \frac{dx_i}{ds};$$

pero fácilmente, cambiando índices para la variación de los g_{ik} relativamente a δx_i, tenemos:

$$\frac{\delta g_{ik}}{\delta s} \cdot \delta s \frac{dx_i}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds} = \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta x_i} \cdot \frac{\delta x_i}{\delta s} \cdot \frac{dx_\alpha}{ds} \cdot \frac{dx_\beta}{ds} = \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta x_i} \xi^i \cdot \frac{dx_\alpha}{ds} \cdot \frac{dx_\beta}{ds}.$$

Además:

$$\delta \frac{dx_i}{ds} = d \frac{\delta x_i}{\delta s} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\delta x_i}{\delta s} \right) ds = \frac{d\xi^i}{ds} \cdot ds.$$

Substituyendo hallamos en seguida:

$$\delta Q = \left[\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta x_i} \xi^i \frac{dx_\alpha}{ds} \cdot \frac{dx_\beta}{ds} + 2 g_{ik} \frac{dx_k}{ds} \cdot \frac{d\xi^i}{ds} \right] ds$$

$$= \left[\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta x_i} \xi^i \frac{dx_\alpha}{ds} \cdot \frac{dx_\beta}{ds} + 2 g_{ik} u^k \frac{d\xi^i}{ds} \right] ds$$

$$= \left[\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta x_i} \xi^i u^\alpha u^\beta + 2 u_i \frac{d\xi^i}{ds} \right] ds,$$

$$\frac{1}{2} \delta Q = \left[\frac{1}{2} \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta x_i} \xi^i u^\alpha u^\beta + u_i \frac{d\xi^i}{ds} \right] ds$$

$$\delta L = \int_a^b \left[\frac{1}{2} \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta x_i} \xi^i u^\alpha u^\beta + u_i \frac{d\xi^i}{ds} \right] ds = 0.$$

Como

$$\int_a^b u_i \frac{d\xi^i}{ds} ds = \Big| u_i \xi^i \Big|_a^b - \int_a^b \xi^i \frac{du_i}{ds} ds$$

en que $\Big| u_i \xi^i \Big|_a^b = 0$, porque los límites son fijos y no participan de la variación, los δ se anulan en los límites y la divergencia es 0 :

$$\delta L = \int_a^b \left(\frac{1}{2} \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta x_i} u^\alpha u^\beta - \frac{du_i}{ds} \right) \xi^i ds = 0,$$

que es la expresión buscada y exige como condición que

$$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} u^\alpha u^\beta = 0.$$

¿ Pero qué ecuación es esta ? La misma ya hallada e interpretada varias veces : *la trayectoria, o historia del punto P entre dos posiciones, será geodésica si el vector « velocidad » transportado por P conserva su magnitud y su dirección en todo instante.*

Así, pues, la integración de está ecuación entre dos límites determinados nos dará la trayectoria estacionaria correspondiente.

Deducimos que : una traslación paralela de un vector invariable describe en el *continuum* una geodésica. En otras palabras, una traslación rectilínea uniforme entre dos puntos es una distancia mínima o estacionaria.

$$L = \int_a^b \left[\frac{1}{2}\frac{dg_{\alpha\beta}}{dx_i} u^\alpha u^\beta - \frac{du_i}{ds}\right] \xi^i ds$$

es la función hamiltoniana, o más brevemente, es *una invariante integral en el continuum.*

Fundadamente decimos que este concepto de Hamilton, de « acción estacionaria », es la base más sólida sobre la cual descansa toda la física moderna, lo fué en la mecánica clásica.

DIGRESIÓN 0.65

La teoría de Mie

No cabe duda que la teoría de Mie fué el esfuerzo matemático más eficaz para adelantar camino hacia una solución del problema indeterminado de la materia. Si el edificio geométrico hubiese sido eficiente, el avance de Mie, como el de Einstein, hacia la solución del gran problema, habrían sido cosas de la historia hoy día. Pero el instrumento era defectuoso, y no fué posible llegar a la meta. Había un « enemigo físico » oculto en los mismos cimientos de la construcción geométrica. Mie, penetrado de la ineficacia de la teoría de los electrones de Lorentz, decidió resolver el problema eléctrico y material en sentido inverso. En vez de partir de «cargas» y obtener campo se afirmó en «un campo» y dedujo las «cargas». El resultado sorprendió a todo el mundo, puesto que, se veía una solución inmediata al problema si se lograba vencer la in-

determinación del campo. Precisamente en esto estriba la dificultad. Hacer hipótesis acerca de «un campo» se parece al problema de adivinar el pensamiento por la fisonomía, ni más ni menos. Materia y campo son *repeticiones en dos órdenes de magnitudes.*

Mie hizo la siguiente sencillísima reflexión : el campo electromagnético comprende dos condiciones primordiales de equilibrio : una con aspecto de continuidad y otra con aspecto mecánico (notación de Weyl) :

$$\frac{d\mathbf{s}^i}{dx_i} = 0,$$

$$\frac{d\mathrm{F}_{ik}}{dx_l} + \frac{d\mathrm{F}_{kl}}{dx_i} + \frac{d\mathrm{F}_{li}}{dx_k} = 0,$$

estas dos condiciones entrañan la existencia de

$$\frac{d\mathrm{H}^{ik}}{dx_k} = \mathbf{s}^i$$

y

$$\mathrm{F}_{ik} = \frac{d\varphi_i}{dx_k} - \frac{d\varphi_k}{dx_i},$$

en que φ es un potencial escalar. En este sencillo proceso lógico de razonamiento matemático se llega a la distinción de dos órdenes de magnitudes : uno de intensidad y otro de extensión.

Ahora bien, considerado cuatridimensional el universo y dividido según el método de Minkowsky en tiempo y espacio, reconocemos en estas invariantes todas las ecuaciones del campo electromagnético — las de Lorentz y de Maxwell, — con una particularidad, que, distinto del de Lorentz, existe diferencia entre (H^{ik}) y (F_{ik}).

Esta distinción entre H y F, tiene una importancia, que el mismo Mie no alcanzó a abarcar en su totalidad, *puesto que en ésta estriba la «relación íntima entre la electricidad y la mecánica, demostrando que se trata solamente de dos puntos de vista, nada más»*. Mie, intuitivamente, reconoció que existía una diferencia entre H y F y se fundó en ésta para deducir su invariante hamiltoniana.

Las ecuaciones del campo lorentziano comprenden dos potenciales, uno escalar y otro vectorial ; éstos se hallan involucrados en la ecuación ya clásica :

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} + \operatorname{grad} \varphi = \mathbf{e} \ \ldots \ (\alpha)$$

en la que, como se sabe:

$$-4\pi\varphi = \int_v \frac{[\rho]}{r}\, d\mathbf{v},$$

$$-4\pi\mathbf{f} = \frac{1}{c}\int_v \frac{[\rho\mathbf{v}]}{r}\, d\mathbf{v},$$

indicando el paréntesis potencial retardado, o sea tiempo $\left(t - \frac{r}{c}\right)$ en el punto del campo en que existe el elemento de carga, o corriente.

Mie, con un golpe de talento fenomenal, halló una explicación natural y satisfactoria para esa ecuación extraña (α) de potenciales. Esa ecuación, anteriormente, no hallaba acomodo.

He aquí cómo explicó la misma: en un campo constante o estático tenemos ($\mathbf{v} = 0$), por lo tanto:

$$\mathbf{e} - \text{grad}\, \varphi = 0,$$

quiere decir que existe equilibrio entre la fuerza eléctrica $\mathbf{e}$ y una potencia «grad φ», que siendo *normal* tiene aspecto de «presión». Esto es: ¡la fuerza eléctrica $\mathbf{e}$ está equilibrada por una presión eléctrica! Esto fué realmente admirable, pues, reveló cómo se «mantenía intacto el sistema eléctrico».

Decimos, pues, matemáticamente: cuando la fuerza eléctrica $\mathbf{e}$ *no* es equilibrada por la presión «grad» se produce una divergencia con magnitud de fuerza que es $\frac{d\mathbf{f}}{dt}$, es decir, la impulsión en acción. Puede acaso haber algo más sencillo o natural que esto?

En seguida Mie, basándose en la forma general de una ecuación de equilibrio, que es la forma de continuidad:

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} + \text{div}\, \mathbf{s} = 0.$$

Siendo $\mathbf{w}$ una densidad de energía y $\mathbf{s}$ una densidad de corriente, dedujo la invariante (notación Weyl):

$$\mathbf{L} = \mathbf{w} - \mathbf{e}\,.\,\mathbf{d} - \rho\varphi,$$

y de aquí

$$\partial\mathbf{L} = \frac{1}{2}\mathbf{H}^{ik}\partial\mathrm{F}_{ik} + \mathbf{s}^i\partial\varphi_i,$$

llegando a formular las componentes de impulsión y energía mecánica:

$$\mathrm{T}_i^k = \mathbf{F}_{ir}\mathrm{H}^{kr} + \varphi_i\mathbf{s}^k - \delta_i^k\mathbf{L}.$$

Siendo conocida la forma hamiltoniana

$$\int_G \mathbf{L} \,.\, dx$$

y la variación

$$\partial \int_G \mathbf{L} dx = \int_G \partial \mathbf{L} \,.\, dx = 0$$

que da las leyes por medio de la ecuación de condición

$$\mathbf{s}^i - \frac{\partial \mathbf{H}^{ik}}{\partial x_k} = 0.$$

De aquí no pudo pasar Mie puesto que la indeterminación de L se defendía con « infinitos fásicos » imposibles de vencer ni con las más elementales hipótesis.

En otra digresión se muestra cómo la ecuación fundamental invariante de propagación, basada sobre la repetición, conduce a la teoría de Mie, abarcando la de gravitación einsteiniana al mismo tiempo :

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^i \,.\, f_i = v^i \mathbf{p}_i$$

$$\int_G \mathbf{c} \,.\, dx = \int_G (\mathbf{s}^i \,.\, f_i)\, dx = \int_G (v^i \,.\, \mathbf{p}_i)\, dx$$

y la condición de estacionaria

$$\partial \int_G \mathbf{c} dx = 0.$$

En un apéndice consignaremos el teorema relativista de Einstein-Lorentz y la deducción de L de Mie.

DIGRESIÓN 0 . 66 ·

Número

Número, símbolo de repetición y, por lo tanto, símbolo de continuidad. Pero es necesario observar que esta continuidad se refiere al pasado, única y exclusivamente, no al futuro. Si existe el número 1.000.000 por haberlo percibido conscientemente nuestros órganos de inteligencia, es porque ha existido toda la sucesión continua anterior que lo liga con la focalización de 1.

Vemos, pues, que es tan sólo en el presente que *puede producirse la interrupción o discontinuidad; únicamente en el presente.* Ahora bien : repetición es acción y es propagación. El número simboliza en-

tonces la propagación. No es todo; es menester recordar que nuestras percepciones son continuas y se inician en el punto del *continuum*, o límite cero, lo cual implica que no hay geometría abstracta. La consecuencia de esto fluye directamente, es decir, el número simboliza toda la fenomenalidad del *continuum* perceptible. ¡No hay propiedad que posea el número que no simbolice un fenómeno de la naturaleza!

Es por esto que tiene importancia el estudio de esta rama de las matemáticas, quizá el más difícil de toda la ciencia. Volvamos a recorrer el proceso lógico mental para cerciorarnos que no hemos incurrido en error:

La repetición es *fons et origo* de toda la fenomenología en nuestro *continuum* mayor;

El número es el símbolo de la repetición;

Repetición es propagación;

Toda fenomenología estriba en nuestra perceptibilidad. Nuestras percepciones son continuas y se inician en el límite inferior o « punto existente », o sea, cero del *continuum*.

No hay, pues, geometría abstracta. Nuestro cerebro al percibir todo lo existente, engendra fácilmente los espacios, superficies, etc., de todas las maneras paramétricas posibles, como una función natural. Esto es, siendo posible unir los puntos de un espacio o superficie, en forma continua, por líneas paramétricas (generatrices), etc., el cerebro hace esto, nada más. Por esto es que tenemos la concepción paramétrica; no por abstracción, como creyó Cayley.

Pasemos ahora a considerar alguna de las propiedades más generales y conocidas del número, dejando indicado al lector el camino para seguir y profundizar este interesantísimo estudio.

Los números se suceden continuamente.

Los números se « apilan » en grupos y se propagan los grupos, viz:

$$1, 1, 1, \ldots; \qquad 2, 2, \ldots; \qquad 3, 3, \ldots.$$

y por ejemplo:

$$1, 2, \ldots, 10$$

$$10^1, 10^2, \ldots, 10^{10}$$

$$100^1, 100^2, \ldots$$

La característica de un apilamiento o un grupo es su base.

Las bases pueden ser cualquier número mayor que *uno*.

La base es característica de una *densidad escalar* y la llamaremos

así por consideraciones futuras. Una densidad escalar se repite y pueden repetirse a su vez las densidades que contiene como grupos menores: grupos y subgrupos.

Comprendemos perfectamente los infinitos fásicos en este género de repetición, o propagación, simbolizada por números. Si existe el grupo o la densidad 10^n (n = peso de la densidad), por ejemplo, es porque *existen, o han existido todas las densidades menores.*

Una densidad cualquiera siempre se distingue de otra menor en la posesión de todas las propiedades de esta menor y de otras «más avanzadas» que no posee esa menor.

Si nos fijamos bien, observaremos en este proceso matemático grupal de repetición, una singular analogía con otro proceso físico que nos rodea en este planeta y que llamamos *evolución.* Pero para comprender perfectamente esto sugerimos el siguiente esquema abstracto: Una focalización propaga por repetición una densidad grupal que simbolizaremos con la base 10^n; la observación nos hace saber que este fenómeno tiene lugar cuando sobreviene una resonancia térmica cuyo término medio en el termómetro es 12° centigrado, a título de simple ejemplo esquemático.

Decimos, pues, a los 12° C crecen por repetición los 10^n y el proceso es tanto más uniforme cuanto menores son las oscilaciones del lado inferior a los 12° C. Cada vez que la temperatura baja de este nivel se detiene gradual y progresivamente la focalización.

Una causa *exterior* eleva la resonancia térmica haciendo que la temperatura ascienda de 12° C hasta los 28° C en el termómetro y conjuntamente con este fenómeno notamos lo siguiente:

A 12° C se repiten los 10^n (se propagan);
A 15° C se repiten los 10^{n-l} (se propagan);
A 20° C se repiten los 10^{n-m} (se propagan);
A 25° C se repiten los 10^1 (se propagan);
A 28° C se repiten los $10^0 = 1$ (se propagan).

Notemos ahora que la repetición de los 10^n, *conservando su ambiente,* persiste siempre mientras la temperatura exceda de 12° C, la de los 10^{n-l} también, conservando su ambiente, mientras exceda de los 15° C, la de los 10^1 igualmente, mientras exceda de 25° C, etc.

Compliquemos ahora el esquema con una harmonización diciendo que durante una rotación tenemos:

Media noche a amanecer termómetro	12° C
Amanecer hasta las 8 horas — Este	15° C
8 horas hasta 10 horas	20° C

10 horas hasta 12 horas medio día — N-S . . .	25° C
Medio día hasta 13 horas.	28° C
13 horas hasta 15 horas.	25° C
15 horas hasta 17 horas (W poniente)	20° C
17 horas hasta 19 horas.	15° C
19 horas hasta 24 horas media noche — N-S.	12° C

En consecuencia, si nos fijamos bien en este esquema hipotético y representamos físicamente su importe tendremos perfectamente delineado el proceso de desarrollo, por ejemplo, de una planta o un árbol. Para completar exactamente el esquema debemos añadir la rotación angular orbital :

Invierno.	0° C
Primavera.	12° C
Verano.	20° C
Otoño.	13° C

Cualquiera puede deducir las consecuencias y ver el «proceso». Llenamos un vacío al mencionar el sol como focalización que engendra la resonancia térmica y que tiene la virtud de provocar la densificación, y la tierra con sus constantes planetarias (inclusive luna) como proveedora de los $10° = 1$. presidiendo la harmonía y la evolución.

Si nuestro universo perceptible es un *continuum* de repetición y el número es un símbolo de repetición, la inferencia es muy clara : debemos poder expresar por medio de propiedades numéricas todos los fenómenos métrico-proyectivos posibles. Hagamos unos simples parangones, dejando para inteligencias más hábiles la elaboración y profundización. Llamemos peso de una densidad al exponente de su base escalar ; por ejemplo :

$$10^n \qquad 10 = \text{base escalar}$$

$$n = \text{peso}$$

digamos ahora : una base de peso *n se dividirá por resonancia térmica hasta degenerar en*

$$10° = 1$$

y al llegar a esta métrica *se disolverá en el continuum ambiente a curvatura esférica determinada.* Tenemos, pues, cuatro grandes grupos, a saber :

Pesos que tienen la forma $2n$;

Pesos que tienen la forma $(2n - 1)$;

Bases escalares que tienen la forma $2n$;

Bases escalares que tienen la forma $(2n - 1)$.

Y dentro de los grupos impares tenemos *los números primos indivisibles.* Por un fácil discurrimiento verá el lector la analogía matemática de los procesos en la botánica:

Dicotiledóneas, o sea, tallo, ramerío, hojas;

Monocotiledóneas : tallo, hojas;

que corresponden a las dos grandes divisiones de «pares e impares».

Si tenemos:

$$n^{\circ} = 1 \qquad \text{(peso cero)}$$

$$1^{m} = 1$$

¿Cómo no ver simbolizada ahí la familia de las *gramináceas,* los vulgares pastos? Pero también verá que cuando

$$n = \text{número primo (indivisible)}$$

tendremos en

$$n^{\circ} = 1$$

una familia de pastos cuyas «hojas» son *conos agudos* terminados en punta-espinas (pasto puna). ¿Qué quiere decir esto? Simplemente, que una base par o impar, pero no primo, y un peso $n =$ número primo, simboliza la familia de los *euforbios* o *cactus* y de los árboles espinosos (urticáceas) y de los equisitíneos o «cola de caballo», etc.

¿Por qué? Porque siendo indivisible el número primo la propagación única posible es por unidades «unos» y, así, una resonancia térmica, obrando con simetría radial pero con intensificación vertical, produce la forma conicoidal, cuya expresión matemática diferencial todos conocemos, y cuya ley de formación revela «un modo de variación esférica» del espacio ambiente.

¿Para qué seguir? Si el vínculo entre naturaleza y matemáticas está a la vista: Repetición-Número.

¿Puede acaso haber algo más simple que esto?

Comprendemos ahora lo que significa repetición y su símbolo el número. Un proceso de sencilla generalización intuitiva conduce a nuestra tesis sobre la densificación del cuerpo humano ya descrita. Un verdadero *quantum* de repeticiones. Ahora nos falta hacer alusión a lo principal; lo más asombroso y admirable. ¿Cómo podemos, mate-

máticamente, explicar el proceso de crecimiento y nutrición, o distribución del material « grupal » ?

Ha sido por esto que hemos designado al grupo con el nombre de densidad.

Sencillamente: un grupo es un *quantum* y *un quantum conserva su curvatura espacial esférica.* Quiere decir que un *quantum* no sale de su espacio ambiente, *libremente,* porque para penetrar en otro *quantum* menor tiene forzosamente que *deformarse* para conformar con *una curvatura esférica espacial diferente.* La deformación es una deformación de su forma métrica fundamental, y esto afecta *todos sus órdenes de magnitudes,* es decir, afecta la densidad o densificación, *a fortiori,* pues, para cambiar de ambiente continuo tiene que *cambiar de estructura* o deformar por *transformación.* Por esto es que Natura *non facit saltum.* En otra digresión hacemos el proceso analítico de este fenómeno y demostramos la invariación de la repetición, a la par de la invariación de densificación y de curvatura espacial riemeniana. Es recién ahora que el lector puede apreciar el asombroso alcance de las matemáticas !

Dejamos así establecido lo que hemos deseado exhibir: el significado de repetición, número y propagación, a la par de grupos, densidades, resonancia de gravitación (térmica) y curvatura esférica espacial.

No podemos terminar sin hacer alusión a W. K. Clifford, quien « comprendió intuitivamente todo ésto », pero... sólo vivió 34 años. No tuvo tiempo (1).

DIGRESIÓN 0.67

¿ Por qué la repetición es invariante como la curvatura ?

El lector habrá interpretado ya el significado de la repetición cuyo símbolo es el número y se habrá convencido que con su introducción desapareció el último vestigio de « magnitudes globales o integrales »

(1) En el ejemplo abstracto : « conservar su ambiente » significa que la focalización de los 10ª y 12° C se desplaza (crece ?) conservando los 12° C, resistiendo una variación de curvatura esférica por efecto de gravitación térmica. Si no hiciera esto tendría el foco que deformarse y cambiar de « forma métrica fundamental » o densidad. Se comprende así « matemáticamente » por qué se propagan los subgrupos, etc.

que tan escrupulosamente el profesor H. Weyl trató de eliminar de la geometría infinitesimal riemeniana. Ya no nos conciernen los (dx_i), o los desplazamientos globales, excepto como propagaciones puntuales en una dimensión. Trabajamos ahora con los puntos constituyentes básicos de una magnitud. Nuestro edificio harmónico tensorial infinitesimal es de « puro contacto y de pura continuidad ».

Pensamos ahora dejar establecida y demostrada la invariación de la repetición. No permitiremos que se corte la « hilación » de ideas, una vez llegados a la meta, sino que seguiremos avanzando hasta donde la lógica matemática y la física nos permitan alcanzar.

Para estos fines necesitamos remontar a la consideración analítica de lo que se denomina « curvatura ». Primero de una línea plana, después de una gaussa, en seguida de una superficie y, por último, de un espacio. Tenemos, pues, que repetir lo que se ha tratado en otra parte.

Adoptando el método de Clifford, de generación de líneas planas, supondremos un punto que se mueve rectilíneamente y una causa extraña, de orden mayor de magnitudes, que hace girar continuamente la trayectoria recta al rededor del punto mismo. La curvatura aparece de esta manera como la rotación por elemento puntual recorrido, cuando este último disminuye indefinidamente. También se comprende directamente la definición, que fluye como simple consecuencia, es decir, « la curvatura de una línea plana es su divergencia de la condición rectilínea ».

Es preciso tener presente que la condición rectilínea es una condición circular límite (radio infinito), y que *toda curva se considera circular en sus elementos infinitesimales, variando la constante de circularidad (radio) escalarmente.* Después se verá la exacta analogía y correspondencia en el caso de espacios continuos arbitrarios paramétricos:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d\theta}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\omega}{v} \qquad \text{(Clifford).}$$

Si se trata de una gaussa elegimos una esfera de radio unitario y trazamos planos diametrales paralelos a los osculadores de la gaussa, éstos envolverán la característica esférica, etc. La característica esférica nos permite analizar las dos curvaturas o rotaciones.

En el caso de una superficie procedemos, como indicó Gauss, a calcular la curvatura mediante una esfera unitaria que nos permite avalorar la divergencia de normales sobre la superficie. Esto es, trazamos

por el centro de la esfera radios paralelos a las normales levantadas en cada punto de un elemento infinitesimal de área sobre la superficie. Estos radios marcarán una característica $d\omega$ de área esférica. Si $d\sigma$ es el área sobre la superficie tenemos como expresión gaussiana de curvatura la relación $\frac{d\omega}{d\sigma}$. Ya sabemos que si ρ y ρ' son los radios principales de curvatura de dos secciones normales en un punto P de la superficie, entendiéndose las dos secciones normales principales:

$$\frac{1}{\rho\rho'} = \frac{d\omega}{d\sigma} = \text{curvatura};$$

y si la superficie tiene la forma

$$z = \varphi(x, y)$$

y si cos (nz) es el coseno del ángulo que forma la normal en P con OZ

$$\frac{1}{\rho\rho'} = \mathrm{H} \,.\, \cos^2(nz),$$

en que H es la hessiana de la función, etc.

Por fin, si expresamos paramétricamente la superficie, y ponemos atención en que

$$ds^2 = \sum_{ik}^{2} g_{ik} dx_i dx_k,$$

en que (x_i) y (x_k) son los parámetros:

$$(x_1), (x_2)$$

y

$$g_{ik} = \sum \frac{dx_m}{dx_i} \cdot \frac{dx_m}{dx_k},$$

en que:

$$n = 1, 2, 3,$$

$$ik = 1, 2,$$

descubrimos que la curvatura gaussiana puede expresarse en función de las segundas derivadas de los coeficientes del elemento ds^2. Por otra parte, como el plano tangente en un punto de la superficie y el plano tangente en el punto correspondiente de la esfera unitaria son paralelos, vemos que existe una linealización común que hace que una

área elemental geodésica se relacione con su correspondiente esférica por medio de la curvatura, o sea, un módulo que es invariante relativamente a toda deformación continua de la superficie que deja inalterada al elemento geodésico, es decir, *que no altere la estructura puntual de la superficie en P.*

Esta invariación geodésica es de la más trascendental importancia, pues nos demuestra que se trata de una escalar de curvatura o tensor de orden cero, y vamos vislumbrando una relación entre *curvatura* y *repetición* por ese concepto de « la estructura puntual = propagación puntual en dos dimensiones ».

Fácil es ver que *la curvatura de superficie es una divergencia de la condición esférica límite de radio infinito* o, si se quiere, la divergencia de la condición plana.

Resulta, pues, que aquellas deformaciones que no alteran a la forma fundamental de Gauss:

$$ds^2 = \sum_{ik}^{2} g_{ik} dx_i dx_k,$$

$$g_{ik} = g_{ki},$$

no alterarán la curvatura y, por lo tanto, *no alterarán la estructura puntual* de la superficie, o digamos de una vez: *no alterarán la densidad puntual de la superficie.* Para alterar la densidad puntual es necesario alterar el carácter de la continuidad puntual que distingue la superficie como un *quantum* sumergido en un *continuum* mayor. Esto es, *un quantum perceptible.* En otras palabras: *hay que alterar la ley de la repetición puntual generatriz,* o sea la propagación puntual bidimensional en P:

$$\mathbf{C}_p = \nu_1 \lambda_1 + \nu_2 \lambda_2,$$

en que los términos representan las dos propagaciones paramétricas generatrices. Resumiendo: *alterar la curvatura de Gauss, es alterar la densidad puntual.* Esto es lo mismo que decir: *densificar;* y aparece de golpe el concepto « dinámico » del fenómeno o presencia de una acción de fuerza. *Alterar la ley de repetición es alterar una ley de acción.* Es, pues, acción.

Pasamos al espacio, con Riemann, Clifford y Einstein, de la manera más simple: generalizando. El *continuum* espacial de *n* dimensiones, « chato en sus elementos infinitesimales », en el que un punto se sitúa relativamente a otro por una dirección geodésica y una distancia mínima (geodésica) cuya forma fundamental es:

$$ds^2 = \sum_{ik}^{n} g_{ik} dx_i dx_k \qquad i, k = 1, 2, ..., n$$

y

$$g_{ik} = g_{ki}$$

como en el caso paramétrico de Gauss. Medimos *la curvatura espacial como una divergencia de la condición esférica límite* (radio infinito): euclideana plana. Quiere decir que en un *continuum* de n dimensiones será necesario calcular la curvatura gaussiana de superficie paramétrica en $\frac{1}{2} n (n - 1)$ direcciones arbitrarias o independientes, entendiéndose en las direcciones normales de superficies. Vemos, en consecuencia, que se trata de un tensor de curvatura espacial. El significado de este procedimiento aparece cuando englobamos el caso « plano euclideano » como un caso especial del espacio continuo general. No hay más que tomar la forma fundamental

$$ds^2 = \sum_{ik}^{n} g_{ik} dx_i dx_k,$$

$$g_{ik} = g_{ki},$$

y aplicar una transformación arbitraria al *continuum* que afecta las n coordenadas. Esta transformación nos permitirá determinar a n coeficientes de los $\left[n + \frac{1}{2} n (n - 1)\right]$ coeficientes de la fundamental cuadrática, quedando $\frac{1}{2} n (n - 1)$ indeterminadas *que son los que caracterizan precisamente, la curvatura Riemann espacial. Determinan la métrica espacial.*

La misma invariación de curvatura relativamente a deformaciones arbitrarias continuas que no alteran la estructura puntual del *continuum* subsiste en este caso generalizado de Riemann.

Un espacio homogéneo (puntual) es un espacio esférico y *si no es homogéneo será esférico en sus elementos infinitesimales,* de acuerdo con el principio Leibnitz de órdenes de magnitudes. Quiere decir que en un espacio arbitrario podemos admitir *una curvatura espacial constante en la vecindad inmediata de cualquier punto y dentro de este elemento espacial* aplicar los principios de traslaciones congruentes o propagaciones uniformes, etc. (Levi-Civita, Ricci, etc.) El carácter de este espacio así concebido comprende precisamente el del *continuum* a conexiones afín y métrico. Recordar que una superficie es esférica en sus elementos infinitesimales (plano tangente como límite y esfera

en caso de una umbilical; los demás casos, esfera de menor curvatura).

Interesa, pues, especialmente conocer la forma analítica de esta curvatura esférica y ésta se obtiene sencillísimamente, generalizando la correspondencia paramétrica plana de una esfera, como lo hizo Riemann:

$$ds^2 = \frac{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)\sum_i^n dx_i^2 - a\left(\sum_i^n x_i dx_i\right)^2}{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)^2}$$

$a =$ curvatura esférica.

Decimos que si $a = 0$ tenemos el caso euclideano plano:

$$a = 0 \qquad ds^2 = \sum_i^n dx_i^2 = ds_0^2.$$

Admitamos una variación de curvatura esférica da y limitándonos a un orden de magnitudes podemos tomar la unidad por denominador, así:

$$P = (x_i) \qquad ds^2 = \sum_i^n dx_i^2 - da\left\{\sum_{ik}^n x_i x_i dx_k dx_k - \sum_{ik}^n x_i x_k dx_i dx_k\right\}$$

$$= ds_0^2 - \mathbf{R}\,.\,da,$$

poniendo

$$\mathbf{R} = \sum_{ik}^n x_i x_i dx_k dx_k - \sum_{ik}^n x_i x_k dx_i dx_k,$$

vemos, pues, que si *sentamos la ley de continuidad para la curvatura espacial, como dijo Clifford en 1870,* la expresión

$$ds^2 = ds_0^2 - \mathbf{R}da$$

contiene la ley de variación de curvatura esférica de un elemento espacial a otro vecino. Esto implica que *la condición euclideana plana no es absoluta sino relativa* y que el 0 *límite* es simplemente *un origen de referencia convencional,* que podemos elegir *ad libitum.* Más claramente, nosotros sumergidos en un espacio esférico constante, u homogéneo, carecemos « en absoluto » de los *medios* de poder decidir si se trata de un espacio euclideano plano (radio infinito) o uno esférico; exactamente como en el caso de movimientos uniformes en un espacio newtoniano-galileano (1).

(1) No podemos avalorar la esfericidad de un espacio homogéneo porque nuestras visuales son geodésicas y nos es imposible medir con metros. El único medio a mano sería apreciar la relación entre diámetro y círculo. Sobre nuestro plane-

La simple observación de los términos que componen la forma fundamental métrica de Riemann revela que son invariantes relativamente a transformaciones ortogonales, esto es: invariantes relativamente a rotaciones continuas. Precisamente éstas son las transformaciones que conservan la densidad, etc.

Fácil es ver que podemos linealizar en un sistema normal geodésico y hacer que

$$\mathbf{R} = \sum_{ik}^{n} x_i x_i dx_k dx_k - \sum_{ik}^{n} x_i x_k dx_i dx_k$$

corresponda a

$$\mathbf{R} = g_{ii.kk} - g_{ik.ik}$$

en que

$$g_{ik.rs} = \frac{d^2 g_{ik}}{dx_r dx_s} = g_{ik.sr}$$

con Einstein. Reconocemos en R la conocida escalar de curvatura de Riemann. Esto es de paso, pero nos hemos desviado del camino y tenemos que retroceder para tomar el hilo que nos conduce a la repetición como invariante a la par de curvatura.

Se ha establecido ya que toda deformación que deja inalterada la clase de continuidad puntual, o sea, la estructura puntual de una superficie paramétrica gaussiana, deja también inalterada la curvatura gaussiana. Esto se aplica también al caso espacial, como es evidente. No puede haber dificultad alguna, en virtud de este principio de invariación, en comprender lo que sigue, y su alcance:

La invariación de curvatura espacial depende de la densidad puntual, esto es, mientras no varía la densidad puntual en un elemento espacial tampoco variará su curvatura esférica.

Mientras no varía la densificación no variará la curvatura espacial. Una variación de curvatura espacial es una variación de densidad puntual; es una variación de clase de la continuidad y, por lo tanto, *es una variación de estructura espacial.*

ta podemos, como Gauss, ensayar con éxito este sistema. ¿Pero en el espacio a visuales geodésicas?

¿Un ser plano en un universo plano de Klein se daría cuenta acaso de la variación (euclideana) de su metro a medida que se extendiera en una dirección rectilínea cualquiera?

Volvemos, pues, al problema fundamental metafísico que es en las desigualdades que originan las percepciones y sobre las cuales se funda el raciocinio, como si dijéramos: el número simboliza la igualdad en la naturaleza, y el lenguaje simboliza las desigualdades.

Se presenta aquí, pues, el problema de la posibilidad de existencia de una invariante relativamente a alteraciones, como la curvatura? Buscando ésta fué que descubrimos la repetición, cuyo símbolo es el número.

Brevemente y sin mayor comentario, *repetir es densificar*. De golpe se reconoce que estamos en presencia del *fons et origo*.

La repetición es como la curvatura: independiente de toda transformación continua, etc. ¿Que es repetición? Sencillamente: *repetición es acción*.

Una densidad emana de una repetición de cualquier cosa, en absoluto. El misterio es: acción.

Si la religión nos dice que Dios hizo todo a su semejanza, entonces Dios repite, y así hallamos una razón matemática en el dogma. Pero la repetición obra sobre «material existente»; podemos, en consecuencia, decir que la repetición engendra un orden de magnitud por medio de otro menor. Sí existen, pues, en un *continuum* dimensiones de orden *imperceptible*, la repetición engendrará nuevos órdenes, sujetos a la continuidad, que entran a ser perceptibles conscientemente.

Al sentar que carecemos, en un espacio homogéneo, del medio de poder determinar la clase de esfericidad constante existente, o sea, si es o no euclideano plano el espacio, hemos tenido en cuenta lo siguiente:

$$ds^2 = \frac{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)\sum_i^n dx_i^2 - a\left(\sum_i^n x_i dx_i\right)^2}{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)^2}$$

que para

$$a = 0 \qquad \text{da} \qquad ds^2 = ds_0^2$$

y para

$$a = \pm\infty \qquad \text{da} \qquad ds^2 = 0,$$

entrevemos inmediatamente que la curvatura esférica afecta todas las magnitudes de una manera homogénea o igual, de suerte que siempre se conserva la relación de magnitudes, etc.

Lo que podemos apreciar o percibir son «las variaciones de curvatura esférica». Este es el punto capital, y vemos la exacta analogía, con «la aceleración» en cinemática. Esta simple referencia ya puede servir como indicatriz de la senda que conduce a la gravitación de Einstein, como también puede servir para reducir a la realidad las predicciones de Clifford, o sea, «que nuestra fenomenología perceptible es variación continua de *curvatura*».

DIGRESIÓN 0.675

Repitiendo

Haremos un breve resumen de lo expuesto en la digresión 0.67, y repetiremos los argumentos encarando el problema desde un punto de vista diferente.

Podemos deformar, continua y arbitrariamente, una superficie sin alterar la longitud de geodésicas, ni ángulos, ni áreas. En una palabra, podemos deformar continuamente sin alterar « la curvatura escalar » de la superficie. Hay que comprender esto completamente.

La característica de un movimiento uniforme es una traza geodésica, que conserva la dirección y la velocidad. La velocidad es la distancia recorrida en la unidad de tiempo, es, pues, « una propagación », una repetición básica. El fenómeno caracteriza un espacio libre en la forma conocida : no hay « fuerza » o « acción ». Es también característico de espacio plano afín euclideano.

Hagamos intervenir la noción de « densidad » y observamos que la característica anterior puede definirse así : una densificación kinética, de traza uniforme o constante, o sea una propagación, o repetición de la posición espacial, de carácter constante en un *continuum* espacial plano, o de esfericidad espacial nula.

Aparece ahora relacionado el *quantum* con el *continuum* y vamos comprendiendo intuitivamente el significado de una alteración del « estado espacial » como variante del « estado del *quantum* ». Notemos que la traza geodésica puede estar sobre una superficie (paramétrica) cualquiera, que persiste la característica del estado « libre » conocido y que ésta se conserva siempre que « se conserve la curvatura », o sea la estructura de la superficie.

Aplicamos todo esto al *continuum* espacial, como obra de generación paramétrica, y vemos que el espacio conserva su curvatura si conserva su estructura.

Ahora se ve claramente que estamos « jugando con órdenes de dimensiones ». Un *quantum* que repite su posición espacial uniformemente describe una geodésica en el *continuum* y esta geodésica será integralmente rectilínea si el *continuum* es un espacio esférico de curvatura $= 0$. Rectilínea, quiere decir « circular de curvatura cero ». La relación entre *quantum* y *continuum* es perfecta y está a la vista.

Se perfila admirablemente el fenómeno de « refracción » por efecto de alteración del estado espacial : alteración de la curvatura esférica. Todo espacio continuo puede concebirse esférico en sus elementos espaciales infinitesimales, tal como un elemento infinitesimal de curva, etc.

Decimos : alterar el carácter del fenómeno de movimiento, o densificación kinética del *quantum*, implica una alteración de la « densificación » en un orden mayor de dimensiones, o sea, alterar la estructura del *continuum* espacial, o alterar su curvatura. A esto queríamos llegar, pues de aquí ha de salir la explicación que no pudo formular W. K. Clifford.

« Densificar », analizado hasta su más simple expresión, es « alterar la distancia entre dos puntos del *continuum* ». Se desprende, pues, que una variación de « densidad » es una variación de estructura — o de curvatura, — es, pues, una variación de la forma métrica fundamental : una densificación infinitesimal. Toda variación de la disposición puntual que deja inalterada la forma básica métrica dejará inalterada la curvatura y, por lo tanto, a la densidad. Y ahora comprendemos el por qué de esas « rotaciones » que el sabio profesor H. Weyl estudia con el auxilio de matrices infinitesimales y que constituyen la característica de un espacio métrico pitagórico. Aparece claramente el significado de ese raciocinio matemático magistral.

Fluye, pues, que como un punto puede conservar « una distancia » por una rotación, puede así conservar una densidad y, por lo tanto, « un espacio puede conservar su curvatura ».

Pero todo esto lo está diciendo la forma métrica fundamental de Riemann :

$$ds^2 = \frac{\left(1 \pm a \sum_i^n x_i^2\right) \sum_i^n dx_i^2 \mp a \left(\sum_i^n x_i dx_i\right)^2}{\left(1 \pm a \sum_i^n x_i^2\right)^2}$$

$a =$ curvatura esférica espacial

$$a = 0 \qquad ds^2 = ds_0^2 = \sum_i^n dx_i^2$$

y si

$$a = \pm \infty \qquad ds^2 = 0.$$

Visto esto, y comprendido su significado, comprendemos también lo que quiso decir W. K. Clifford cuando sentó lo siguiente : *On the space theory of matter*. (Leído el día 21 de febrero de 1870, en Cambridge y publicado en 1876.)

« Que esta variación de curvatura espacial es lo que realmente sucede en ese fenómeno que llamamos movimiento de materia, sea ponderal o eteriana.

« Que en el mundo físico nada más que esta variación tiene lugar sujeta *a la ley de continuidad.*

« Estoy, decía Clifford, ocupado en la tarea de explicar las leyes de doble refracción basándome en estas hipótesis, pero aún no he llegado a resultados determinados. » No podía formular su intuición, pero su intelecto comprendía que allí estaba la solución.

Clifford falleció a los 34 años.

Nosotros, gracias a Einstein, hemos podido continuar la obra y ahora tenemos conquistada una nueva altura, pero temblamos ante la nueva cumbre que se nos presenta por delante.

Siendo la repetición invariante y siendo el número su símbolo, vemos que propagación = velocidad de repetición por acción, o cosa densificada, es la piedra angular de todo el edificio geométrico-físico de nuestro universo perceptible y es preciso acoplar esto con nuestra percepción pura kinética, o visión (contar), y nuestra percepción pura dinámica, o tacto (medir). Repetir es densificar.

Densificar es dimensionalizar.

La fenomenología íntegra depende de la repetición como origen de la densidad, y esta densidad, como origen de la curvatura.

¡ Variaciones de curvatura ! he aquí encerrado el infinito fásico de la naturaleza, o universo perceptible.

Queda demostrada la invariación de la repetición (1).

DIGRESIÓN 0.68

Especulación pura

Resulta claramente que un estado espacial es obra de una repetición : una propagación. Comprendemos así que nuestro *continuum*

(1) Comprendemos ahora que en la posibilidad de alterar la curvatura parcialmente en un *quantum* es donde estriba toda la fenomenología fásica que caracteriza al « *quantum* », especialmente (color, contextura, formación cristalina o amorfa, etc., o sea, las propiedades físicas del *quantum*). Pero alterar la curvatura íntegra del *quantum* es lo mismo que alterar la curvatura espacial del *continuum* que lo contiene, en su vecindad, o contacto.

mayor es obra del sol como generador, o « focalización ». He aquí, pues, como densificar es repetir una acción.

La curvatura espacial depende de la densificación infinitesimal y cualquier variación de ésta implica una variación de curvatura. Una variación de acción. Llamemos gravitación a esta acción.

Decimos ahora con Riemann que lo que no altera a ds^2 no alterará a la curvatura. *Mutatis mutandis,* la ley de variación de ds^2 por efecto de variación de curvatura es una ley de variación de densidad y, por lo tanto, es una ley de gravitación. Teníamos:

$$ds^2 = ds_0^2 - \mathbf{R}da$$

$$ds^2 - ds_0^2 = -\mathbf{R}da,$$

cambiando signo:

$$ds_0^2 - ds^2 = \mathbf{R}da$$

$$\delta(ds^2) = \mathbf{R}da,$$

si suponemos ds_0 unitario en P, podemos escribir:

$$\delta(ds^2) = 2\delta(ds),$$

o, si se quiere:

$$d^2s = \frac{1}{2}\mathbf{R}\,.\,da,$$

como ley de variación de curvatura. *Reconocemos una ley de « aceleración ».*

Si tenemos en cuenta el carácter radial simétrico esférico y estático, o estacionario, de la focalización solar, comprendemos inmediatamente como, dependiendo la aceleración de la variación de curvatura, y ésta de la variación de distancia al foco, será:

$$a = \frac{1}{\rho}$$

$$da = -\frac{1}{\rho^2}\cdot d\rho$$

que da la clave de la singular exactitud de la ley newtoniana de aceleraciones centrales: la ley de variación de curvatura espacial esférica aproximada.

Fácil es extender todo esto al concepto einsteiniano de relativismo

general y descubrir que la hamiltoniana de acción material del campo de gravitación tiene que poseer la forma, sub-integral:

$$G = \frac{1}{2}\sqrt{g} \,.\, \mathbf{R} + \alpha$$

$$\mathbf{R} = g_{ii\,.\,kk} - g_{ik\,.\,ik} \qquad \alpha = \text{div}$$

en un sistema normal geodésico.

DIGRESIÓN 0.69

Curvatura espacial esférica

Pensamos relacionar lo dicho en la digresión sobre número con lo establecido en las digresiones 0.67 y 0.675 sobre curvatura esférica, densificación y relativismo.

Con Riemann:

$$ds^2 = \frac{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)\sum_i^n dx_i^2 - a\left(\sum_i^n x_i dx_i\right)^2}{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)^2}$$

si

$$a = 0 \qquad ds^2 = ds_0^2 \text{ (euclideano)}$$

$$= \sum_i^n dx_i^2$$

si

$$a = \pm\infty \qquad ds^2 = 0$$

y no hay *quantum* posible.

Si $a = da$ es infinitamente pequeño

$$ds^2 = ds_0^2 - \mathbf{R}da$$

$$\mathbf{R} = \sum_{ik}^n x_i x_i dx_k dx_k - \sum_{ik}^n x_i x_k dx_i dx_k,$$

o con Einstein, linealizando en un sistema normal geodésico en $P(x_i)$

$$\mathbf{R} = g_{ii\,.\,kk} - g_{ik\,.\,ik}$$

en que reconocemos la conocida escalar de curvatura Riemann, y la hallamos así directamente por la sencilla razón de que, en general, todo

espacio continuo arbitrario es esférico en sus elementos espaciales infinitesimales. Así como toda línea es infinitesimalmente circular y toda superficie infinitesimalmente esférica. Etc.

De manera, pues, que un *quantum* cuyo campo métrico es el de

$$ds^2 = ds_0^2$$

para pasar a un espacio de esfericidad da tiene que experimentar la deformación estructural definida por la escalar:

$$\mathbf{R}da,$$

esto es:

$$(g_{ii.kk} - g_{ik.ik})\, da,$$

siendo la parte determinante del fenómeno de alteración de densificación:

$$\mathbf{R} = (g_{ii.kk} - g_{ik.ik}).$$

Consecuencia: un *quantum* en libertad conserva su curvatura espacial esférica.

No puede cambiar libremente su ambiente espacial un *quantum* por otro de diferente curvatura, porque tiene que cambiar de estructura, es decir, alterar su densificación, o si se prefiere, *cambiar de gravitación cohesiva.*

Esto es lo que significa cambiar de forma métrica fundamental.

Queda, pues, descubierta la ley a la cual se hizo referencia en la digresión sobre el número, o sea, la ley de distribución grupal en una propagación.

Aventuramos añadir que es en la variación relativa de curvatura espacial superpuesta a pura rotación que se halla la explicación del fenómeno llamado movimiento. Sin rotación, tendríamos el fenómeno perceptible de « distancia », o el fenómeno espectral conocido, etc.

La curvatura esférica borra los órdenes de magnitudes, como evidencia la expresión matemática. Aquí, pues, reside la explicación íntegra de la óptica. Ejemplo: una esfera desaparece « visualmente » como un punto.

Un plano desaparece « visualmente » como una esfera cuando conserva la posición normal al radio visual, y así es un caso particular del anterior.

En una superficie esférica cuyo centro es nuestro órgano visual y cuyo radio aumenta indefinidamente desaparecen simultáneamente todos los puntos a la vez.

Dos puntos, según el orden de su magnitud y de su distancia, desaparecerán como dos puntos, o como uno solo. Aquí tenemos la explicación del desmembramiento, o la desaparición de *quanta,* por las orillas, etc., etc.

Se desprende, pues, y siempre deberá tenerse en cuenta que nuestra visión engloba: órdenes de magnitud visible, órdenes en el límite de visión y órdenes que se borran. Profundizando esto es que se comprenden las características ópticas de los *quanta.*

Biología matemática. — Una célula es un *quantum* y, como tal, conserva su ambiente espacial esférico. Para cambiar tiene que alterar su estructura o densificación.

Dejamos esto acá (1).

DIGRESIÓN 0.70

Einstein

Una de las pruebas que más nos asombran del talento matemático de Einstein está en su descubrimiento de la función

$$G = \frac{1}{2}\sqrt{g} \,.\, \mathbf{R} + \lambda,$$

en la que **R** es la escalar de curvatura Riemann y λ una divergencia.

Quiere decir, que G es la única función que contiene los coeficientes de la forma métrica fundamental, expresadas por primeras y segundas derivadas, y las últimas linealmente.

(1) Es preciso tener siempre presente que en la forma fundamental riemaniana

$$ds^2 = \frac{ds_0^{\,2} + da \left\{ \sum_i^n x_i x_i dx_k dx_k - \sum_i^n x_i x_k dx_i dx_k \right\}}{(1 + da \sum x_i^2)^2}$$

los (x_i) son « parámetros », que pueden equipararse por analogía, para los efectos de fijar ideas solamente, a los (u_i), en la forma esférica

$$ds^2 = \frac{(1 + u_1^{\,2} + u_2^{\,2})\,(du_1^{\,2} + du_2^{\,2}) - (u_1 du_1 + u_2 du_2)^2}{(1 + u_1^{\,2} + u_2^{\,2})^2},$$

donde (u_1 y u_2) son parámetros que sirven para formular la correspondencia plana, etc.

Los (x_i) como los (u_i) son arbitrarios y elegibles, *ad libitum, y son infinitesimales.*

¡ Puro raciocinio matemático !

Ya se ha hecho constar en otro lugar que es difícil rehuir la convicción de que Einstein llegó a la meta, empezando por « el fin buscado » y remontando en sentido inverso, en la demostración de su exactitud.

Quiere decir, que, admitiendo un espacio esférico constante en sus elementos infinitesimales y, por lo tanto, que :

$$\mathbf{R} = g_{ii\,.\,kk} - g_{ik\,.\,ik}$$

en que

$$g^{ik}g_{ik} = g_{ik}g_{ik} = 1$$

y

$$\frac{d^2 g_{ik}}{dx_r dx_s} = g_{ik\,.\,rs} = g_{ik\,.\,sr}, \text{ etc.,}$$

remontó por linealizaciones, normales geodésicas, a

$$\mathrm{J} = \sum \lambda_{ik\,.\,rs} g_{ik\,.\,rs} + \lambda,$$

en que los λ son construídos con los g_{ik} y sus primeras derivadas.

DIGRESIÓN 0.71

Curvatura espacial. Espacios esféricos

Teníamos con Riemann :

$$ds^2 = \frac{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)\sum_i^n dx_i^2 - a\left(\sum_i^n x_i dx_i\right)^2}{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)^2},$$

y para una forma esférica infinitesimal :

$$ds^2 = \sum_i^n dx_i^2 - da\left\{\sum_{ik}^n x_i x_i dx_k dx_k - \sum_{ik}^n x_i x_k dx_i dx_k\right\} = ds_0^2 - \mathbf{R}\,.\,da.$$

Descomponiendo la cuadrática en sus factores escalares

$$(ds\,.\,ds) = (ds_0\,.\,ds_0) - \mathbf{R}\,.\,da$$

$$\mathbf{R} = \sum_{ik}^n (x_i dx_k)(x_i dx_k) - \sum_{ik}^n (x_k dx_i)(x_i dx_k) = \sum_{ik}^n (x_i\,.\,dx_k)\left[(x_i dx_k) - (x_k dx_i)\right].$$

Vemos, en consecuencia, que $\mathbf{R} = 0$, si se tiene :

$$x_i dx_k - x_k dx_i = 0$$

$$x_i dx_k = x_k dx_i$$

$$\gamma_{ik} = \gamma_{ki}.$$

La condición de esfericidad nula es, pues, que no haya rotación, esto es : espacio plano euclideano.

Cuando hay rotación, hay curvatura esférica y hay deformación estructural en el *quantum.*

Se ve, pues, que cuando no hay rotación no hay curvatura espacial perceptible, y el *quantum* se confunde con el *continuum* espacial que lo contiene. Llamemos esto *una disolución eutéctica,* por la sencilla razón que es independiente del *da.*

Si la curvatura espacial es nula y $da = 0$, entonces, el *quantum,* o los *quanta,* existen en un estado de « indiferencia », sumergidos en un espacio sin cohesión y es sobre esta base que Einstein desarrolla su teoría de gravitación solar, esto es : *el espacio continuo, sin cohesión,* responde exacta y directamente a la acción de cualquier *quantum* (sol) que contiene.

Cuando hay rotación y

$$\mathbf{R} \neq 0$$

estamos en el caso maravillosamente interesante de « nuestro mundo perceptible ». *¡ Nuestras percepciones respondiendo al factor da !* Y el doctor David Hartley, a mediados del siglo XVIII, predicaba al mundo científico que : las sensaciones obedecen a simples vibraciones que, focalizadas en el cerebro, determinan *un cambio de temperatura !* La resonancia térmica asomaba intuitivamente en la mente del sabio médico inglés, como origen de deformaciones, *que alteraban una densidad básica,* es decir, una estructura *quántica* espacial, o sea, una curvatura esférica; y alterada la forma métrica, una deformación continua mayor espacial *provoca la eferencia* y la estratificación precaria. ¿ Cuál es esa deformación continua mayor espacial ? Simplemente, el campo solar ambiente. ¿ Cuál es la densidad escalar básica ? El *cerebro ;* llámesele *neurón,* o cualquier otra cosa.

Quiere decir, sencillamente, que la observación induce a sentar que *da* es un factor de resonancia, y R la « divergencia de estabilidad » del *quantum.* Teniendo R aspecto de « acción centrífuga unitaria ».

Cualquiera puede ver que si un *quantum* perceptible existe sumer-

gido en un espacio esférico constante, existirá reaccionando contra el ambiente, por efecto de densificación o diferencia de curvatura. Llamemos presión este efecto. Si ahora, una causa altera la curvatura espacial, es natural que el *quantum,* interior, responderá matemáticamente; esto es, si la causa es dirigida, el *quantum se moverá,* tratando de conservar « un estado » de equilibrio, que vectorialmente podría representarse como una equipotencial

$$\text{grad}\ \varphi = \text{constante}.$$

Es así, cómo Clifford quería explicar el fenómeno perceptible de movimiento y, es así, cómo trabaja la naturaleza en la obra de evolución, etc.

Distancia. — Para poder formar un concepto claro de lo que significa esta percepción, sugerimos el siguiente efecto esquemático.

Un *quantum* sumergido en un espacio esférico, produce una impresión visual, como ya se ha explicado. Al moverse (uniforme) el *quantum no cambia su estado espacial, lo que cambia es la curvatura esférica en la focalización cerebral* y este fenómeno es el que origina la *sensación de distancia.* Quiere decir, muy simplemente, que un *quantum* podría estar en reposo « dinámico » respecto a nuestra persona, y una causa alterar la impresión óptica de tal manera que tendríamos toda la sensación de distanciamiento, o sea alejamiento o acercamiento, etc. No habría más que añadir: rotación axial de nuestra persona para producir *todo el efecto de movimiento espacial.* Tal es el significado de « nuestra perceptibilidad » y su relación con el exterior.

DIGRESIÓN 0.72

La materia

Especulación matemática. — Curvatura esférica o densificación infinitesimal. — Triunfo de Riemann y W. K. Clifford. — Sir Isaac Newton. — Alberto Einstein. — Niels Bohr.

Hemos cansado al lector con fraseología matemática y filosofía. Pasamos ahora a la consideración de la verdad absoluta, o sea, la descripción matemática de una dimensionalización.

Para resolver el problema de la materia como *quantum* perceptible o densificación infinitesimal, en un *continuum* mayor, partimos de la

ecuación fundamental de Riemann, tan conocida ya, y tan fácil de deducir por generalización de una paramétrica plano-esférica :

$$ds^2 = \frac{\left(1 + a \sum_i^n x_i^2\right) \sum_i^n dx_i^2 - a \left(\sum_i^n x_i dx_i\right)^2}{\left(1 + a \sum_i^n x_i^2\right)^2}.$$

Surgiendo de una condición euclideana plana la densificación, y siendo un proceso infinitesimal de « apilamiento puntual » en ese espacio homogéneo, sin cohesión, tenemos fácilmente :

$$ds^2 = \frac{\left(1 + da \sum_i^n x_i^2\right) \sum_i^n dx_i^2 - da \left(\sum_i^n x_i dx_i\right)^2}{\left(1 + da \sum_i^n x_i^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\sum_i^n dx_i^2 - da \left\{ \sum_{ik}^n x_i x_k dx_i dx_k - \sum_{ik}^n x_i x_i dx_k dx_k \right\}}{\left(1 + da \sum_i^n x_i^2\right)^2}.$$

Si partimos del espacio plano, se tiene

$$ds^2 = \sum_i^n dx_i^2 = ds_0^2.$$

Así, pues :

$$ds^2 = \frac{ds_0^2 - \mathbf{R} \,.\, da}{\left(1 + da \sum_i^n x_i^2\right)^2},$$

$$\mathbf{R} = \sum_{ik}^n x_i x_k dx_i dx_k - \sum_{ik}^n x_i x_i dx_k dx_k.$$

Si ahora tenemos presente que un *quantum* sólo puede densificarse en una forma infinitesimal y continua, esto es, pasar en el espacio del estado plano euclideano al estado esférico infinitesimal *constante* por deformación continua estructural de densidad, y así pasar de una forma métrica a otra forma métrica diferente, vemos inmediatamente que el proceso analítico tiene que reducirse al « módulo **R** », así :

$$\text{límite}\,(1 + da \sum x_i^2)^2 = 1$$

$$ds^2 = ds_0^2 - \mathbf{R} da$$

$$\frac{ds_0^2 - ds^2}{da} = \frac{\partial\,(ds^2)}{da} = \mathbf{R},$$

y si aplicamos una densidad básica del *continuum* espacial homogéneo, y unitario:

$$|g_{ik}| = g \qquad \text{la Jacobiana}$$

$$\sqrt{g} \cdot \frac{\partial (ds^2)}{da} = \sqrt{g}\mathbf{R} = \mathrm{R},$$

lo cual quiere decir que R tiene aspecto de un módulo transformador de densidad escalar. Siempre hay que tener presente que operamos en un elemento infinitesimal espacial, y que dentro de este elemento *la transformación es uniforme, o constante.* Quiere decir, que la curvatura esférica varía sólo de un elemento espacial al vecino y es *constante* en todas direcciones dentro de un elemento determinado, o en un punto $\mathrm{P} = (x_i)$.

Es muy sencillo hacer el proceso mental que nos conduzca al concepto de propagación paralela de Levi-Civita y después, con el auxilio del teorema de Stokes, obtener una forma analítica para este módulo escalar R de curvatura. Ya hemos visto en otro lugar como se hace, y no hay para qué repetirlo acá. Pasemos ahora a estudiar el significado de un espacio euclideano plano, desde el punto de vista de densificación cero, o mínima. El procedimiento es sencillo.

Escribamos:

$$\frac{\partial (ds^2)}{da} = \mathbf{R},$$

si buscamos un máximo tendremos:

$$\frac{\partial (ds^2)}{da} = 0 \qquad \text{o} \qquad \mathbf{R} = 0$$

$$\sum_{ik}^{n} x_i x_i dx_k dx_k = \sum_{ik}^{n} x_i x_k dx_i dx_k$$

y

$$ds^2 = ds_0{}^2 = \sum_{i}^{n} dx_i{}^2;$$

la segunda derivada se obtiene fácilmente si

$$\mathrm{P} = \sum_{i}^{n} x_i{}^2; \qquad \mathrm{Q} = \sum_{i}^{n} dx_i{}^2; \qquad \mathrm{S} = (\sum x_i dx_i)^2;$$

$$ds^2 = \frac{(1 + a\mathrm{P})\,\mathrm{Q} - a\mathrm{S}}{(1 + a\mathrm{P})^2}$$

$$ds^2 (1 + a\mathrm{P})^2 = (1 + a\mathrm{P})\,\mathrm{Q} - a\mathrm{S}$$

$$\frac{\partial (ds^2)}{da}(1 + a\mathrm{P})^2 + 2ds^2 (1 + a\mathrm{P})\,\mathrm{P} = \mathrm{PQ} - \mathrm{S}$$

$$\frac{\partial^2 (ds^2)}{da^2}(1 + a\mathrm{P})^2 = -2ds^2\,\mathrm{P}^2 - 2\frac{\partial (ds^2)}{da}(1 + a\mathrm{P})\,\mathrm{P};$$

si

$$\frac{\partial (ds^2)}{da} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 (ds^2)}{da^2}\right)_0 = -2\left(\frac{ds\,.\,\mathrm{P}}{1 + a\mathrm{P}}\right)^2 < 0,$$

quiere decir que

$$ds_0{}^2 = \sum_i^n dx_i{}^2$$

es un máximum; que ya lo sabíamos geométricamente.

Comprendemos, por este resultado, que en un espacio plano euclideano de esfericidad cero no sería posible fijar la forma métrica fundamental y, por lo tanto, predomina *la condición absoluta de indeterminación métrica,* o sea *el continuum homogéneo*

$$ds^2 = ds_0{}^2,$$

pudiendo ser ds^2 cualquier cosa.

El límite opuesto de curvatura esférica infinita nos conduce al *solidum puntual,* o a la *absoluta rigidez* de la mecánica clásica, y *dentro del cual no hay forma métrica posible.* Esto es:

$$ds^2 = 0 \qquad \text{para} \qquad a = \pm\infty.$$

El paso, pues, de una curvatura esférica infinitesimal a la curvatura cero, es seguida por la deformación de densificación estructural:

$$\frac{\partial (ds^2)}{da} = \mathbf{R} = \sum_{ik}^n x_i x_i dx_k dx_k - \sum_{ik}^n x_i x_k dx_i dx_k,$$

o linealizando:

$$\mathbf{R} = g_{ii\,.\,kk} - g_{ik\,.\,ik}.$$

Una densidad $\sqrt{g}$ se transforma, pues en

$$\sqrt{g}\,\mathbf{R} = \mathrm{R},$$

que nos da la expresión de densificación infinitesimal.

Dejando de lado el signo de suma, que queda sobreentendido, podemos escribir:

$$\mathrm{R} = \sqrt{g}\,(x_i x_k dx_i dx_k - x_i x_i dx_k dx_k),$$

en que ajustamos el signo convenientemente al proceso de densificación:

$$\mathrm{R} = \sqrt{g}\,(x_i dx_k)\,(x_k dx_i - x_i dx_k).$$

Consideremos ahora lo siguiente:

$$\frac{\partial\,(ds^2)}{da} = \mathbf{R},$$

omitiendo densidad $\sqrt{g}$.

$$ds^2 = ds_0{}^2 - \mathbf{R}da$$

$$\frac{ds^2}{ds_0{}^2} = 1 - da\left\{\sum_{ik}^{n} x_i x_k \frac{dx_i}{ds}\cdot\frac{dx_k}{ds} - \sum_{ik}^{n} x_i x_i \frac{dx_k}{ds}\cdot\frac{dx_k}{ds}\right\}$$

$$\mathbf{R}_1 = \left(x_i \frac{dx_k}{ds}\right)\left(x_k \frac{dx}{ds} - x_i \frac{dx_k}{ds}\right).$$

Vemos ahora, inmmediatamente, que si

$$\left(x_i \frac{dx_k}{ds}\right) = 0$$

o

$$\left(x_k \frac{dx_i}{ds} - x_i \frac{dx_k}{ds}\right) = 0$$

no habrá densificación y dejamos al lector interpretar el significado manifiesto de esto. Pero si

$$x_k \frac{dx_i}{ds} - x_i \frac{dx_k}{ds} \neq 0$$

tendremos *densificación infinitesimal.*

Vemos, pues, cómo nacen las dimensiones espaciales en un *continuum* homogéneo puntual euclideano. Sabemos que en el elemento espacial infinitesimal tendremos un módulo escalar R, que es constante. Así, pues:

$$\left(x_i \frac{dx_k}{ds}\right)\left(x_k \frac{dx_i}{ds} - x_i \frac{dx_k}{ds}\right) = \text{constante},$$

pero, si nos fijamos, esta suma se resuelve en una canónica cuadrática de elementos

$$\left(x_\alpha \frac{dx_\beta}{ds} - x_\beta \frac{dx_\alpha}{ds}\right)^2$$

y si aplicamos en el elemento infinitesimal espacial la condición hamiltoniana estacionaria, tendremos:

$$\delta\left(x_\alpha \frac{dx_\beta}{ds} - x_\beta \frac{dx_\alpha}{ds}\right)^2 = 0$$

para cada término, o sea:

$$x_\alpha \frac{dx_\beta}{ds} - x_\beta \frac{dx_\alpha}{ds} = \text{constante},$$

que es la conocida *ley de áreas.* Esta, pues, es la transformación que hace nacer el *quantum.* Por otra parte tenemos

$$da = \text{div. de curvatura}$$

$$= \text{div. de densidad de } (a = 0),$$

por lo tanto, podemos escribir:

$$da = \text{resonador},$$

esto es, *da* es el elemento que traduce el efecto espacial exterior *al quantum,* o viceversa, del *quantum* al ambiente espacial.

Un *quantum* perceptible (imaginariamente) es, pues, un sistema solar infinitesimal. Quiere decir que, efectivamente, *la gravitación dimensionaliza, o densifica.*

Es así que comprendemos que nuestro universo perceptible es un *continuum* de repetición y que la diferenciación fásica estriba en el principio de focalizaciones, o «apilamientos». Quiere decir, que la continuidad está sujeta a órdenes de densificación, que podríamos denominar «pesos de la base» en el sentido de ser

$$10^n,$$

n = peso, y 10 el «apilamiento». Hay, pues, diferentes clases de continuidad, como hay diferentes clases de afinidad en un espacio euclideano, o como hay diferentes clases de curvatura esférica, etc.

El *quantum* posee una base con una característica de peso, y si se ha podido penetrar el alcance de lo establecido en la digresión «número», se verá cómo sucede el fenómeno de desintegración de la materia por efecto de «resonancia de gravitación» y cómo *un quantum se disuelve en el continuum espacial esférico que lo contiene,* que puede ser un *quantum* a su vez en otro *continuum* mayor, etc.

Se observará la analogía completa entre el significado de «peso

de la base» y el «peso de una densidad tensorial» de H. Weyl, naciendo este concepto matemático con Cayley y Sylvester en sus «pesos de invariantes».

Podríamos muy bien hacer un parangón entre el resonador de curvatura esférica espacial *da* y la psicología orgánica, diciendo que *da* es el sentido y R_1 el *sensorium* del sér consciente.

Resumiendo: Riemann y Clifford nos han conducido al encuentro de Newton y Einstein, e incidentalmente hallamos a Niels Bohr, Moseley y Planck en la vecindad. A Bertrand Russell lo vimos en el camino.

El principio de transporte paralelo de Levi-Civita no es más que una perífrasis matemática del principio general de «la esfericidad constante espacial en sus elementos infinitesimales».

La teoría del relativismo general de Einstein, y su admirable término cosmológico, no es más que la expresión de la transformación de los *quanta*

$$\frac{ds^2}{ds_0{}^2} = 1 - \mathbf{R}_1 da,$$

y

$$\mathbf{R}_1 = \text{constante}$$

encierra toda la teoría de gravitación.

Nuestras percepciones nacen de la imperceptibilidad (igualdad), de la misma manera que los astros en el firmamento.

Terminamos, como hemos empezado, sentando que, todo, absolutamente todo, es repetición. ¡Somos un *continuum* de repetición!

El misterio es el siguiente: podemos decir y concebir:

Uno, uno, uno, ..., *ad infinitum*

y también podemos decir y comprender:

Dos, dos, ..., *ad infinitum.*

¡Densificamos! Reconocemos lo asombroso de este fenómeno mental. *Apilamos. El dos sale de golpe de nuestro cerebro. ¡Mirabile dictu!*

Si, pues, nuestro cerebro puede engendrar ese *dos,* entonces, en su desintegración está el fenómeno de la materia y de la evolución. ¿Qué es, pues, nuestro cerebro? Una focalización; como si dijéramos: un sol (1).

(1) Opinión humilde del autor: una densidad puntual huye ante una deformación esférica espacial, por resistir el cambio de su forma métrica fundamental. Huye ante una acción de repetición que emana de una focalización y así consti-

DIGRESIÓN 0.73

Tensores. Propagaciones. Luz blanca

Rememoremos un poco las « linealizaciones ».

Si tenemos:

$$X = \xi^1 l_1 + \xi^2 l_2 + \ldots + \xi^h l_h + \ldots = \sum_i^n \xi^i l_i$$

se ve que para asimilar una linealización a una propagación, o repetición, tenemos que suponer:

$$(\xi^i) = \text{repetición temporal} = \text{frecuencia};$$

$$l_i = \lambda_i = \text{repetición espacial} = \text{longitud de onda};$$

podríamos decir $\xi^i = v^i =$ densidad unitaria de la repetición en tiempo, y $\lambda_i =$ densidad unitaria de la deformación espacial. Aparece así X como una densidad escalar de propagación, de base X; tratándose de un *continuum* homogéneo, o isótropo.

Pero podemos hacer corresponder a cualquier linealización X otra arbitraria, valiéndonos de las conocidas propiedades de funciones homogéneas. Si L representa una función cualquiera, y L (X) toma todos los valores reales, resultantes de hacer recorrer a X todos los valores posibles, tendremos una forma lineal en L (X) si

$$L(x + y) = L(x) + L(y), \qquad L(\alpha x) = \alpha L(x),$$

como bien sabemos. Reconocemos, pues, en L (X), una forma lineal, exactamente como una componente ξ^i de un vector en la forma

$$\sum_i^n \xi^i l_i = X.$$

Llamemos, pues, esto: *una linealización a base de la frecuencia de repetición.*

tuye « la eferencia espacial ». ¿ Por qué ? Por la ley de conservación del espacio, o conservación de la curvatura, etc. *Natura non facit saltum.* Está a la vista el por qué ; la aplicación es universal. ¿ Qué es, pues, un neurón ? ¿ Cómo se explica la focalización en el cerebro de « las sensaciones » ? ¿ Cómo se explica la densificación de nuestro cuerpo ? Matemáticamente, de la manera más sencilla, pero... queda el misterio de la repetición.

Pasemos ahora a considerar una linealizaclón a base de los (e_i) fundamentales. Si

$$L(X) = \xi^i L(e_1) + \xi^2 L(e_2) + \ldots + \xi^i L(e_i) + \ldots$$

por definición; poniendo $a_i = L(e_i)$;

$$L(X) = \sum_i^n \xi^i a_i,$$

y tenemos un tensor de componentes (a_i), como ya hemos visto con Weyl. Descúbrese así el mecanismo del «tensor». Apliquemos esto ahora, en la forma harmónica, para descubrir la naturaleza de la luz blanca y así terminar con el dilema de Gouy, Schuster, Gorlasso, Rayleigh, etc.

Pero nos olvidamos de repetir que si

$$\lambda_1 L_1(X) + \lambda_2 L_2(X) + \ldots + \lambda_n L_n(X) \neq 0$$

no se anula, excepto para $\lambda_i = 0$ tendremos *una forma lineal.* Los (λ_i) son componentes de un tensor, etc.

Obsérvese ahora que $L_i(X)$ varía de una manera continua cuando X varía de una manera continua. Quiere decir que si

$$A = \sum_i^n \lambda_i L_i(X)$$

$$B = \sum_i^n \lambda_i \mathbf{L}_i(X)$$

$$C = \sum_i^n \lambda_i \Lambda_i(X),$$

son tres formas ligadas por el vínculo de (λ_i) común (un tensor), tenemos simbolizadas tres formas de propagaciones *a densidad espacial común, pero de diferentes frecuencias.* Podríamos bien decir que en un *continuum* homogéneo estas tres propagaciones difieren por «la frecuencia», teniendo común la longitud de onda. Implica, pues, tres propagaciones de densidades básicas, A, B, C, diferentes por diferencia de frecuencia solamente. Si quisiéramos interpretar eléctricamente, diríamos que estas propagaciones difieren por concepto de densidad de corriente.

Fijémonos ahora en lo siguiente: si

$$A = \xi\lambda$$

en un *continuum* homogéneo, tendremos naturalmente por isotropía :

$$A = \xi^1\lambda_1 + \xi^2\lambda_2 + \ldots + \xi^h\lambda_h + \ldots$$

en que

$$\text{val. abs.} \,|\lambda_1| = |\lambda_2| = \ldots = |\lambda_h| = \ldots,$$

o sea, las densidades básicas son iguales en valor absoluto en todas direcciones (curvatura constante). Ahora, si

$$A = \text{número primo}$$

es evidente, que siendo

$$A = \xi\lambda$$

será

$$A = \sum_i^n \xi^i\lambda_i \qquad |\lambda_i| = |\lambda_k|.$$

Ahora, si suponemos *una frecuencia unitaria única común en el continuum homogéneo, será a fortiori :*

$$\xi^i = 1 = \text{constante}$$

y

$$\text{val. abs.} \,|\lambda_i| = |A| = \text{constante} = \text{número primo},$$

y esto nos dice que : en un *continuum* homogéneo las propagaciones a densidades, o *bases indivisibles*, o sea *números primos, difieren entre sí por concepto de potencia dinámica, cuando la frecuencia es común, o constante.*

Siendo debida la diferencia de velocidad de propagación a diferencia de longitud de onda, *en igualdad de frecuencia.* Decimos, pues, que estas propagaciones son *monocromáticas*, o sea, *indescomponibles por prismas,* etc.

Ahora, supongamos que una propagación tenga una base, o densidad escalar, que puede ser descompuesta en factores varios, primos, o sea, un número divisible en factores primos. A una frecuencia común 1 en un *continuum* isótropo, u homogéneo, corresponderán tantas linealizaciones como factores primos, a saber :

$$A = \sum_i^n \xi^i (A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n)_i$$

$$A_1 = \sum_i \xi^i (A_1)_i \ \ldots$$

$$A_2 = \sum_i \xi^i (A_2)_i \ \ldots \ A_n = \sum_i \xi^i (A_n)_i$$

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_i \xi^i (A_1)_i + \ldots + \sum_i \xi^i (A_n)_i = \sum_{ik} \xi^i (A_k)_i,$$

$$k = 1, 2, \ldots, m, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

donde reconocemos la división espectral en ondas monocromáticas, o indivisibles, a frecuencia de focalización común. ¿Puede haber algo más sencillo que esto? ¿Por qué? Porque nuestro *continuum* mayor perceptible es un *continuum* de repetición y el símbolo de repetición es número.

Comprendido lo anterior, sugerimos su aplicación a los «pesos atómicos» como *números primos indivisibles.*

El misterio es la repetición. Esto es, la acción mediante la cual podemos decir: dos, tres, mil, ..., o sea focalización y apilamiento.

Reflexiónese: podemos de un solo golpe decir y tener conciencia de ¡mil! o, si se quiere, ¡dos! *¡Mirabile dictu!* Quiere decir que nuestro cerebro tiene la propiedad de un sol.

Por aferencia focalizamos y, por eferencia lanzamos ese mil. Al decir mil hemos apilado mil unidades en sucesión continua. La discreción es, pues, *mil,* en el concepto Riemann.

Filosofía. — Hemos observado que la materia aparece densificándose de la misma manera que un astro, es decir:

$$\frac{ds^2}{ds_0{}^2} = 1 - \mathbf{R}_1 \,.\, da$$

$$\mathbf{R}_1 = \sum_{ik}^{n} x_i x_k \frac{dx_i}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds} - \sum_{ik}^{n} x_i x_i \frac{dx_k}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds},$$

de donde

$$x_\alpha \frac{dx_\beta}{ds} - x_\beta \frac{dx_\alpha}{ds} = \text{constante}$$

nos da el plano orbital, etc., y descubrimos que el cerebro focaliza como lo hace un sol; es natural hacer la inferencia que *nuestro sol focaliza por aferencia estelar y densifica por eferencia luminosa,* o sea la gravitación luminosa, o densidad escalar constante *c,* de Einstein. Decimos, pues, en vista de esto, que si nuestra tierra se densifica, o disuelve, bajo el efecto solar, entonces, *su superficie debe ser una réplica recíproca de la aferencia solar, y así conserva una relación con la configuración estelar del continuum mayor, exactamente como el cuerpo*

humano relativamente a las acciones exteriores que penetran y se focalizan en el cerebro, produciendo en seguida la densificación por eferencia esférica, lo cual hace que el cuerpo sea la historia perceptible de nuestro universo perceptible. Esto es repetición *ad infinitum.*

DIGRESIÓN 0.735

Punto

Es bueno recordar la definición que da Riemann de un *quantum,* o sea un *continuum* limitado. También conviene recordar lo dicho acerca de órdenes de magnitudes, esto es : que nuestras percepciones son continuas, y que sólo el orden conciente de las mismas es limitado, al que llamamos « orden finito ».

¿ Qué es un punto ? Si encaramos la cuestión desde la base establecida de órdenes de magnitudes y nos concretamos al fenómeno cerebral físico-geométrico, tendremos, *a fortiori*, que modificar muchísimo la enseñanza del aula : la clásica definición de « ausencia de dimensiones ». Tiene considerable importancia este nuevo concepto, y podríamos decir, tanta importancia como la definición de número como símbolo de repetición. Es necesario, pues, profundizar y dejar resuelto el problema sobre la base invariante de la repetición. Dejaremos de lado el estudio detallado de la composición de una dimensionalización, que ya se ha tocado en otro lugar, y sólo nos concentraremos sobre el fenómeno de repetición que caracteriza a nuestro universo perceptible. Cuando un *quantum* desaparece como orden finito consciente de percepción, desaparecen todas sus dimensiones a la vez, y no aisladamente. *Mutatis, mutandis,* cuando un *quantum* asoma al orden finito consciente de percepción lo hace con todas sus dimensiones, sin distinciones, etc.

Recordemos lo siguiente :

1° Nuestro universo perceptible es un *continuum* de repetición, en que los fenómenos se repiten en todos los órdenes posibles de magnitudes ;

2° Que las variaciones fásicas que observamos en estas repeticiones, entre dos órdenes diferentes de magnitudes, se deben al principio conocido de indeterminación, introducida por integración desde un orden infinitesimal a un orden finito consciente de magnitudes, las cuales englobamos en constantes de integración ;

3° Que la repetición excluye la posibilidad de coincidencia y así, obliga al apilamiento, o la propagación;

4° Que en vista de todo esto, nuestras percepciones son continuas, y se inician en un límite inferior « cero », de existencia puntual; aumentando de intensidad hasta asomar al orden finito consciente de magnitudes.

Definimos, pues, un punto diciendo: un punto es la traza límite, u horizonte divisorio entre dos órdenes consecutivos de magnitudes.

Quiere decir que un punto es el *quantum* mínimo en un orden cualquiera de perceptibilidad consciente de magnitudes y el *maximum* dimensional en el orden inmediato inferior de perceptibilidad inconsciente. Esto es, siendo un cero dimensional en un orden de magnitudes, es un *continuum* ilimitado en el orden infinitesimal inmediato inferior de magnitudes. La repetición es manifiesta.

Pero nosotros numeramos con coordenadas simbólicas de repeticiones a todo punto de un *continuum,* con lo cual dejamos claramente establecido (intuitivamente hasta ahora) su carácter de ser una focalización. Si

$$P = (x_i) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

o sea

$$P = (x_1, x_2, x_3, ..., x_h, ..., x_n).$$

Vemos que los números arbitrarios x_1, x_2 ..., son símbolos de repeticiones, lo cual implica que P es una focalización de repeticiones, caracterizadas en densidad escalar (o peso) por los x_1, x_2, ..., x_n. Cuando transformamos coordenadas, alteramos el carácter del punto, o focalización, como es evidente, lo cual es lo mismo que decir: *deformamos al punto.*

¡ Deformar un punto ! Fácilmente nos damos cuenta que el significado se descubre, precisamente, en el hecho de ser un punto un *continuum,* a su vez, en un orden determinado inferior de magnitudes. La repetición está a la vista, nuevamente. Si suponemos al *continuum,* cualquiera que sea el orden de sus magnitudes máximas, poblado de cerebros humanos imaginarios, podemos sentar la existencia, siempre, de un orden finito consciente de percepciones dentro del mismo. Este concepto es muy práctico y útil. Manifiestamente, la deformación de un punto está dirigida por acciones exteriores, desde cero hasta el mismo orden de magnitudes que aquel que comprende a su finito consciente *sui generis.* Quiere decir que en un *quantum* cualquiera se repiten los fenómenos cerebrales del nuestro mayor.

Si, pues, un punto puede tener todas las formas imaginables, conceptuado como un *continuum*, y estas formas pueden variar indefinidamente guiadas por acciones exteriores, comprendemos que un apilamiento de puntos, o sea una densificación, es obra exclusiva de dos órdenes de magnitudes de acciones exteriores, a saber: 1° un orden igual al de «perceptibilidad finita consciente», *sui generis,* del *continuum*-punto; y 2° un orden inmediato superior al anterior.

Quiere decir que, en virtud de un orden de acciones, *adquiere forma el punto* y en virtud del orden inmediato superior de acciones *adquiere forma el apilamiento puntual, o densificación integral.* Esto está ilustrado en aquel clásico ejemplo de la marcha en línea recta sobre un elemento plano en un orden de magnitud y la descripción de una geodésica orbital en otro orden superior, etc.

Fijémonos ahora con especial atención en el hecho siguiente: las acciones que penetran dentro del punto son de un orden inferior de magnitudes a las que obran sobre el punto como entidad global, entendiéndose dos órdenes sucesivos de magnitud. De esto sigue que tenemos dos fenómenos geométricos que considerar — solamente dos — a saber: 1° la densificación dentro del punto, como focalización, por efecto de aferencias de acciones de un orden máximo determinado de magnitud; 2° el efecto de *las eferencias compuestas* sobre los puntos vecinos, o focalizaciones vecinas. Son, pues, las eferencias compuestas de la focalización, que por pertenecer a un orden inmediato superior de magnitudes *(a fortiori), determinan los fenómenos de dimensionalización,* o de comportamiento general. Vemos que a toda variación de aferencia corresponderá una variación de eferencia en algún orden de magnitud y, por lo tanto, una alteración de configuración del *quantum;* y a esto lo hemos ya llamado: *infinita sensibilidad, o perceptibilidad continua.*

Una propagación tiene lugar como resultado de una eferencia compuesta, y esto equivale a decir que una densificación sobreviene por efecto de una aferencia compuesta, etc. Nuestro universo aparece nuevamente como un *continuum* de repetición, y de una manera que asombra. Vemos que un punto, siendo una focalización de repeticiones, desempeña el mismo rol básico que un *continuum* cerebral. Sólo difiere por orden de magnitud del nuestro, finito perceptible consciente, y por este concepto es que difiere fásicamente. Como si dijéramos por arbitrariedad de una constante de integración.

Al numerar un punto

$$P = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_h, \ldots, x_n),$$

no hacemos más que fijar sus « sentidos », simbolizando los números: densidades escalares. Pues la densificación interna del punto, la eferencia, la deformabilidad e infinita perceptibilidad, no son otra cosa que: una repetición del fenómeno básico cerebral en otro orden de magnitudes. Llegamos así a la noción de *la continuidad de existencias,* o sea, *de los diferentes órdenes de conciencia.* Quiere decir que la vida, en un orden cualquiera de *quantum* sensible, origina en una focalización y evoluciona por medio de aferencia y eferencia continua hasta un límite determinado de densificación, cesando el proceso por interrupción de la continuidad dentro del *continuum;* pudiendo producirse esta interrupción en cualquier instante presente. Decimos, en consecuencia, que los órdenes de conciencia arrancan desde un cero límite inferior y crecen hasta llegar al « finito consciente humano », que es el máximo aparente, pero no real.

Así se explica que el cerebro concibe un orden inmediato superior de conciencia y nace la idea religiosa, como es natural.

Reflexionando sobre esto y comprendiendo a fondo el principio de la relación entre dos órdenes consecutivos de magnitudes, se vive en un estado de continuo asombro.

Un punto tiene, pues, como un *quantum,* una característica de orden de magnitud, para nuestro cerebro. Consiguientemente, un punto se comporta, relativamente a puntos de órdenes inferiores de magnitudes, exactamente como un cuerpo material visible se comporta relativamente al medio atmosférico ambiente, o sea, « los puntos de aire ».

Diremos, finalmente, que si un punto posee movimiento de rotación axial *se densificará infinitesimalmente en forma de doublet simétrico por inversión.* Si no posee rotación axial tampoco habrá división, y podríamos simbolizar el punto por un número primo. Si a la rotación axial añadimos harmonización orbital, se producirán nuevos *doublets* simétricos de orden mayor de magnitudes, y así sucesivamente.

Diremos, también, que los fenómenos originan en una focalización por aferencias convergentes, del cual emana « el punto coordenado » $P = (x_1, x_2, ..., x_h, ..., x_n)$ siendo $(x_1, x_2, ..., x_n)$ los símbolos de densidades, o propagaciones focalizadas. Es así que una transformación

$$P = (x_i); \qquad i = 1, 2, ..., n; \qquad \bar{x}_i = f_i(x_k);$$

$$k = 1, 2, ..., n; \qquad d\bar{x}_i = \sum_k^n \frac{df_i}{dx_k} dx_k, \text{ etc.};$$

$$\left|\frac{df_i}{dx_k}\right| \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \alpha_k{}^i = \frac{df_i}{dx_k}$$

con la condición rotativa

$$d\bar{x}_i = \sum_k^n \alpha_k{}^i dx_k; \qquad dx_i = \sum_k^n \alpha_i{}^k d\bar{x}_k;$$

en que $\alpha_k{}^i$ es la recíproca de $\alpha_i{}^k$, etc., nos dice simplemente *que la focalización* $P = (x_i)$ *cambia, por rotaciones,* bajo el efecto de deformaciones del *continuum* mayor *que no alteran la curvatura espacial.*

Es ahora que aparece claramente el concepto de W. K. Clifford, acerca del fenómeno cerebral que llamamos movimiento. Fácil será comprender que se trata de una propagación de curvatura espacial. Este fenómeno podría resumirse analíticamente en una variación continua de curvatura esférica con rotación, o movimiento angular, *notándose que el movimiento angular es independiente de la deformación esférica espacial.*

CAPÍTULO XIII

Filosofía pura liviana

Nos hemos permitido tocar algunos puntos interesantes en digresión 0. Volvamos ahora sobre los mismos con insistencia.

¡El *continuum* mayor a *n* dimensiones se asemeja a la clásica *tabula rasa* de Locke! Lo hemos observado ya. Contiene todas las dimensiones en una forma puramente puntual tal, que excluye toda posibilidad de percepción consciente para nosotros. Este *continuum* es «una traza densificada infinitesimalmente» de una acción única repetida que se llama «gravitación». La repetición se apiló y se densificó en forma de un espacio puntual. Este procedimiento de «densificación repetida» es el más universal posible; es el único procedimiento en evolución, y lo vemos en el firmamento, lo vemos en cualquier materia, sólida, líquida, etc.; lo vemos en las células, en los insectos, en los animales y en los hombres. Todo, absolutamente todo, es un proceso de repetición regido por una ecuación de sencillez elemental que expresa el fenómeno de propagación: esa colosal consecuencia de la repetición.

La repetición excluye la posibilidad de coincidencia. El dos desaloja al uno, en espacio y en tiempo, cuando es una realidad absoluta.

Nosotros no podemos *ver* los puntos del *continuum* mayor porque pertenecen a un orden de magnitud que no es el nuestro; y es por esto que no podemos percibirlos conscientemente ni comprenderlos. Sólo los concebimos como existentes, por percepción inconsciente, y es por esto, precisamente, que podemos «concebirlos mentalmente».

Nuestro *continuum* puntual es, pues, absolutamente homogéneo; todos sus puntos son idénticos e imposibles de ser diferenciados uno de otro, por concepto determinado alguno, y así también están comprendidas todas las dimensiones en forma «indistinguible». Podríamos definir este estado de cosas como una «homogeneidad estática», caracterizándola de equilibrio y susceptible de deformación homogénea continua, *ad infinitum.*

La dimensionalización en el *continuum* se debe a un agente extraño. Este agente, según Einstein, es la gravitación, y su acción ha sido definida por nosotros como una densificación infinitesimal. Esta densificación integrada es, para nosotros mortales, «la historia perceptible consciente de la acción». Constituye una realidad absoluta desde el momento que todos tenemos conciencia de ella de la misma manera.

Nosotros no podemos percibir el futuro. Tampoco podemos percibir el «exacto presente». Percibimos el *inmediato pasado.* Esto es evidente y se debe a que carecemos de la virtud del «ajuste simultáneo» o «ajuste instantáneo» de parte de nuestros órganos de percepción. En realidad, estas formas límites de ajuste entrañan un concepto de velocidad infinita, ya derribado por Einstein. No podemos admitir en el finito esta velocidad infinita, lo cual excluye la «simultaneidad», ni podemos admitir la acción a distancia y esto excluye la «espontaneidad».

¿Cuál es el efecto inmediato de esta falta de simultaneidad en el ajuste de nuestras percepciones? Simplemente, un retraso entre la percepción consciente y la acción. Prácticamente, podemos aproximar nuestra percepción al presente, sin poder alcanzarlo. La importancia de este fenómeno es trascendental.

Ya hemos visto cómo una acción extraña penetra al *continuum*, guiada por un parámetro. Ahora no tenemos duda acerca de la naturaleza de este parámetro: *es temporal.* Dirige una densificación, y la esencia invariante de una densificación es un movimiento infinitesimal puntual; esto es, la variación de posición de puntos en el *continuum* entre sí. Esta acción, en virtud de la exclusión del concepto de simultaneidad, o del infinito, en una palabra, introduce «el tiempo» al *continuum,* naciendo en consecuencia la historia.

Excluída la acción a distancia y con ésta la espontaneidad, tenemos, *a fortiori,* que sentar que: la acción de gravitación penetra al *continuum* desde el exterior, progresiva y continuamente. La acción inicia la densificación y así, *ipso facto,* introduce la llamada dimensión temporal. Nace la historia como una estela de la acción, guiada por ese misterioso parámetro.

Que un parámetro guiará una densificación unidimensional, dos parámetros una superficie, tres un volumen, etc., no requiere comentario. Una salvedad es necesaria y es, que no todas las acciones gravitantes densifican su historia en forma conscientemente *perceptible para nosotros.* Por ejemplo, el movimiento de un cuerpo en el espacio continuo. Aquí tenemos que recurrir al relativismo en la forma que nos ha enseñado Einstein.

Ahora bien; observamos claramente, sin ambigüedades, ni confusiones, que las infinitas acciones posibles, por todo concepto, que se manifiestan para nosotros en el *continuum* como «realidades absolutas», pueden sólo ser fases distintas de una acción única: «la gravitación einsteiniana». La prueba de ello está en el simple hecho de que todas estas acciones perceptibles determinan en el *continuum* un solo y único fenómeno, a saber: *la densificación.*

Las diferencias fásicas de densificación son infinitas, correspondiendo a cada una una fase de acción.

Repetimos que: la densificación en el *continuum* se hace perceptible para nosotros en virtud de la *dimensionalización,* y así es que llegamos al grandioso concepto de ser *el continuum espacial perceptible para nosotros: ¡ La historia de la gravitación !*

Esta historia se desarrolla guiada por un parámetro complejo temporal, que corresponde a una resultante de acciones en evolución, las cuales densifican sus estelas (o trazas) con la independencia que Newton define en *Lex II, Principia.*

En consecuencia, vemos que nuestra existencia obedece a una acción única en su origen, *diversificada por fases, ad infinitum.* La resultante de todas estas fases es la que ha escrito en forma, *sui generis,* su historia y esa historia *somos,* a todo instante y en la forma magistral que formuló Hamilton, o sea, *¡ estacionaria !*

¿ Será posible que se deje de ver que: *una densificación periódica es una reproducción de especie?* Seguramente que no. La fase, la amplitud o intensidad, la frecuencia y la época, son los cuatro parámetros dimensionales.

¿ Cómo puede escapar la observación de que «la fase» es la caracte-

rística fundamental, invariante, de una función harmónica? Sólo falta, pues, combinar lo dicho para formular que: el parámetro complexo que guía la historia de la gravitación einsteiniana tiene el aspecto de una serie harmónica (1).

Recuérdese a Laplace y Fourier.

En otras palabras, podemos formular todo esto como sigue: *la reproducción es la característica fundamental, invariante, de la acción de densificación de la gravitación einsteiniana.*

Es preciso pensar en la inmensidad de esta verdad, pura y exclusivamente matemática.

Pero aún nos falta completar esta digresión, tocando el punto de máximo interés, el que se relaciona con nuestro propio sér. El sér humano. Algo hemos dicho ya en digresión 0, suficiente quizá para permitir a un lector la inducción de lo demás. Veamos esto.

El astrónomo inglés, A. S. Eddington, hace muy pocos meses, comentando sobre el « contenido desconocido » del *continuum,* dijo que « parecería ser compuesto de la misma « cosa » que nuestra conciencia ». ¡ Qué admirable observación !

Analizando nuestras percepciones descubrimos que, efectivamente, nuestro cerebro manifiesta tener todas las propiedades de un *con-*

(1) Trataremos aquí de explicar muy ligeramente lo aseverado acerca del carácter « periódico » de la acción de gravitación. Primeramente el *continuum* mayor se compone de puntos *repetidos* y es supuesto homogéneo desde que no contiene « dimensiones perceptibles » conscientemente.

El parámetro que dirige la acción es temporal, siendo el tiempo una repetición de instantes. *A fortiori,* pues, la densificación, obra de la acción, tiene que ser un proceso infinitesimal y en el límite es una repetición de densidades unitarias especiales elementales.

Este método de obtener « conocimiento » por lo infinitesimal es obra de Riemann, ese coloso de la ciencia. Pero debemos recordar que no es más que una generalización del método discreto, inaugurado por Leibnitz, de conceptuar a toda curva como compuesta de elementos infinitesimales rectos y así « una repetición infinitesimal rectilínea », o de elementos rectos. Aparece, pues, claramente el sistema de razonamiento empleado acá, mediante el cual se llega a establecer la « periodicidad infinitesimal de acción densificante de cualquier gravitación (fase) ». Esto concuerda exactamente con la realidad absoluta que percibimos, *ad infinitum,* en la naturaleza. Hemos tocado la base de este estudio, pero después profundizaremos más aún, hasta eliminar toda posibilidad de duda.

Todo nuestro mundo de percepciones descansa sobre el principio del doctor D. Hartley (filósofo inglés del año 1740-50). Esto es: la repetición, o propagación. Todo es propagación, o repetición, variado, por la reciprocidad o concomitancia, en una multiplicidad de infinitos fásicos, entre un límite superior kinético, luz y visión, y otro límite inferior dinámico, materia y tacto.

tinuum. La impresión de un objeto produce una imagen, o réplica, densificada en una forma especial en nuestro cerebro. Esta densificación tiene una existencia efímera, en el sentido de que, desaparecido el objeto, desaparece la impresión o acción, algo como el magnestimo en un hierro dulce (inducción). Pero la existencia efímera de la densificación corresponde exactamente al carácter de la acción. En cambio «la memoria» es prueba de la persistencia de la densificación, o «historia».

El hecho básico, irrefutable, es que nuestra conciencia es un *continuum menor,* dentro del cual penetran las acciones por conductos especiales históricos. Cada uno de estos conductos admite un grupo de fases determinadas, caracterizadas matemáticamente por parámetros temporales.

Es absolutamente imposible dejar de ver que si una acción densifica su historia dentro de un *continuum,* guiada por un parámetro temporal, entonces nuestro *cuerpo responde exacta y matemáticamente a la historia de las acciones que penetran al continuum de nuestro cerebro.*

Brevemente: nuestro cerebro contiene el valioso material puntual; y nuestro cuerpo registra una historia de acciones que tienen acceso al *continuum* de nuestro cerebro, *por densificación del material.*

Es ahora que nos damos cuenta de cómo nuestra evolución conserva el compás del mundo exterior, o *continuum* mayor.

Comprendemos exactamente la razón de nuestra simetría lateral, debida a acciones exteriores a nuestro planeta, y nuestra simetría radial por efecto de acciones de ambiente local (temperatura).

Comprendemos por qué los conductos históricos por los cuales penetran las acciones exteriores a nuestro planeta, harmonizadas por nuestra *rotación periódica axial,* son dobles, y simétricos *por inversión* respecto a un plano meridiano que corresponde al medio día de la acción. Mientras que los conductos históricos que dan acceso a las acciones de nuestro planeta son asimétricos, o de simetría dudosa, desconocida.

En una palabra, comprendemos que la dirección de la densificación reside en el cerebro y que es allí donde habría que dirigirse para estudiar los fenómenos de nuestro desarrollo, y corregirlos mediante una intensificación de las acciones determinantes correspondientes, o una supresión de éstas, etc.

Se palpa la imposibilidad de una simetría de Zenit-Nadir en la densificación de nuestra existencia.

Por último, y esta es la culminación: es debido al carácter perió-

dico, harmónico, de los términos que contiene la serie paramétrica que guía la evolución de nuestra historia densificada que se producen las múltiples reproducciones de especie, *empezando con la célula y terminando con el sér humano.*

No hay para qué seguir, pues el camino está trazado; resta solamente, aplicar la observación, sagacidad, etc., y los conocimientos adquiridos, interpretando adecuadamente la parte geométrica.

Y es así, cómo *las matemáticas han triunfado.*

¡Tiene visos de milagroso este triunfo! Triunfo de la «percepción continua».

Descubrimos que las matemáticas en sí, como los puntos del *continuum,* poseen esa misma cualidad de «requerir una acción extraña para *producir una interpretación*». Nosotros en lo anterior sólo hemos hecho uso de una fase de interpretación; faltan las fases kinemáticas, dinámicas, biológicas. químicas, etc.

RESUMEN

Vamos a resumir lo dicho en este capítulo. «La dimensionalización» en el *continuum* es obra de una acción sola: la gravitación einsteiniana. Esta acción es *infinitesimal.*

Percibimos conscientemente esta acción por su historia, o sea, la acción realizada, de dos maneras:

1ª Como movimiento integral en el espacio continuo, o integración kinética;

2ª Como *densificación,* esto es: *una integración dinámica.*

La densificación de una historia es una realidad absoluta para nosotros, pues todos la percibimos de la misma manera.

Cada acción posee un parámetro temporal (periódico).

Una densificación periódica es una reproducción de especie en el *continuum,* y responde a una acción harmónica. La historia de una tal acción, *a fortiori,* sólo puede consistir en una integración por *repetición de densificaciones infinitesimales.*

La acción de gravitación einsteiniana es una *acción periódica, o harmónica.*

Decimos, en consecuencia, que la característica fundamental de la gravitación einsteiniana es una reproducción infinitesimal de densificaciones. Una historia integral, compuesta de *repeticiones perceptibles puntuales.*

Nuestro cerebro constituye un *continuum* menor dentro del *continuum* universal, o mayor.

Las acciones del *continuum* mayor penetran a nuestra conciencia y *densifican su historia,* infinitesimalmente, en *el cuerpo humano.*

Correspondiendo las acciones a las historias «densificadas», es evidente que si aquéllas son « periódicas », estas historias revelarán el hecho en forma *real absoluta. Nuestro cuerpo lo revela hasta en sus más mínimos detalles.*

Es menester tener presente todo lo dicho para seguir ahora avanzando a fondo.

El hecho básico fundamental de ser un *continuum* una multiplicidad de puntos, iguales unos a otros, revela la historia de *una acción esencialmente periódica extraña.* Esto es, *una densificación puntual.*

Pero la acción de gravitación de Einstein *es periódica. A fortiori,* pues, la única diferencia que puede haber entre la acción generatriz del *continuum* puntual y la acción Einstein consiste en « las posibles diferencias entre dos funciones harmónicas ».

Recordemos que la característica « invariante » de una función harmónica es *la fase.*

La característica fundamental e invariante de toda función periódica es *la repetición de la fase.* Digamos, *in abstractum, la repetición.*

La geometría encuentra su base fundamental, única y exclusiva, en la noción de *número.*

Nuestros *continuums* sólo se hacen comprensibles cuando los *numeramos puntualmente.* Coordenadas numéricas sin significado especial físico alguno, según dice Einstein. Pero aquí, humildemente, presentamos nuestras excusas al sabio por divergir. Decimos : *¡ el número es símbolo de repetición !*

Comprendemos de golpe la razón de la correspondencia entre geometría *abstracta y la realidad absoluta. ¡ No hay geometría abstracta !* El cerebro es infinitamente perceptible.

Weyl busca de destruir el carácter *postulante* que tiene la forma cuadrática que caracteriza un campo métrico pitagórico. Y es admirable cómo explora al *continuum* espacial con el auxilio de la teoría de los grupos continuos y las rotaciones infinitesimales. El resultado no es absolutamente concluyente, deja una duda que el mismo Weyl señala. Trataremos este punto, *in extenso,* a continuación. Por otra parte, esta duda la hemos disipado *por la teoría de la invariación de densidad a la par de invariación de curvatura,* que ya desarrollamos analíticamente en otro lugar.

CAPÍTULO XIV

Simetría cerebral. Forma cuadrática pitagórica y dos lóbulos Forma bicuadrática y cuatro lóbulos

Terminamos el capítulo XIII llamando la atención a la forma magistral en que Weyl explora el espacio continuo con el auxilio de la teoría de Lie Engel, de grupos continuos, a fin de demostrar que la forma métrica debe tener la característica pitagórea cuadrática. Nosotros pensamos atacar este problema basándonos en el terreno de «la densificación», y así *resolver la duda* que queda como resíduo del estudio de Weyl. ¡ Pura lógica!

Desde ya advertimos, que sólo hemos de tocar, filosóficamente, la cuestión, evitando «las fases». Nos fundamos sobre la «densificación» como «historia de una acción», y en especial de la acción de gravitación de Einstein. Añadiremos, *a fortiori,* que esta acción infinitesimal posee como característica fundamental, invariante y única, *la repetición,* la cual se hace perceptible como una realidad absoluta para nosotros en la *reproducción por densificación.* Esto ya lo probamos.

Hagamos ahora una hipótesis. Supongamos que nuestro sol es una acción en evolución, en el *continuum* mayor, dirigida por un parámetro temporal de magnitud tal que, para nosotros, tiene el carácter de *acción estática.* Así pues, con Einstein, la acción solar densifica un campo en su vecindad espacial continua (puntual), en una forma «radial esférica, o a simetría radial esférica» y, relativamente a nosotros, *estáticamente,* o independiente del tiempo. Claro está que esto es completamente «ideal» y no corresponde sino «aproximadamente» a la verdad. Pero basta para fijar ideas, pues contiene «la parte invariante» de verdad. Esto es lo que Einstein describe como «el campo estático a simetría radial esférica».

Ahora, elijamos un punto de este campo estático y situemos en el mismo a «la historia ya densificada» que representa nuestro planeta. Un *continuum* menor, ni más ni menos. No nos preocuparemos de su origen, etc., sólo le atribuiremos una forma esférica, un eje fijo y una rotación uniforme, como la que posee actualmente. No hay para qué suponer que describe una órbita al rededor del sol. Supondremos que existe fijo en un punto del campo. Rehuímos investigar las dife-

rentes categorías de *continuums,* sólo sabemos que responden a acciones mayores y son sus historias.

Tenemos, pues, condiciones ideales uniformes, constantes, o si se quiere « estacionarias ». Nuestro planeta, en virtud de « una rotación axial », diurna, uniforme, guiada por un parámetro temporal, *ad hoc,* harmoniza la acción estática del sol sobre su superficie continua densificada.

Es preciso ahora introducir una salvedad notable: que los puntos que componen el *continuum* planetario « no pueden *volar* en sentido opuesto a la rotación axial » (sin excluir de notar que llegará el día en que *descubrirán* la manera de hacerlo. Ya tenemos aeroplanos).

Huyendo siempre de las fases, diremos lo que ya hemos explicado, que si el sol densifica su acción en nuestro *continuum* planetario, este *processus* tiene, *a fortiori,* que revelarse infinitesimalmente en una invariante, a saber: la simetría lateral por inversión meridiana, y que éste procede guiado por un parámetro temporal que varía constante mente *en un solo sentido,* gracias a la rotación axial. Resultará, pues, que la « *densificación solar* » *es guiada por un parámetro temporal que sólo tiene un sentido.* Decimos, en consecuencia, *que el tiempo varía en un solo sentido.* (Después aparecerá sin sentido ni dirección).

Vamos, ahora, a suponer que por alguna causa misteriosa, nuestro planeta *invierte su rotación* y gira en sentido opuesto con la misma velocidad angular de antes. ¿ Qué sucede ? ¡ Absolutamente nada ! El *processus* marcha exactamente como antes, *para nosotros,* en virtud de ser *la simetría : una simetría por inversión meridiana.* Esto quiere decir simplemente que el parámetro temporal que dirige la densificación de *nuestro continuum* menor es independiente de *sentido positivo, o negativo,* si es que así caracterizamos dos *direcciones opuestas.*

Téngase esto en cuenta, o presente. Ahora bien: fijémosnos en nuestro *continuum* cerebral, *que es obra de una acción exterior sobre nuestro planeta.* Nuestro planeta es el que provee los puntos a nuestro *cerebro* (y no pensamos investigar cómo lo hace, hasta más adelante); la acción solar los « densifica ». La prueba más irrefutable de esto la tenemos en nuestro cuerpo humano. Pero ahora tenemos que añadir *nuestra misma conciencia al processus,* o sea, *nuestro mismo cerebro,* lo cual quiere decir que nuestra propia « conciencia » *no escapa a la acción harmonizante de nuestra rotación axial.* Esto se verá inmediatamente notando que la densificación solar determina una simetría por inversión meridiana, a saber: *de oriente a medio día* y de

medio día a poniente, correspondiendo una absoluta anulación del procedimiento a *media noche.*

Decimos ahora: nuestro cerebro densifica según esta fórmula y nuestra conciencia está *regulada por la misma.* Esto último es evidente como los conductos históricos revelan.

Resulta pues, en este caso ideal que estamos tratando, que podemos elegir un punto, *centrum centrorum,* en la acción de *medio día,* en el plano meridiano que nos corresponde, como un origen, o un cero, de manera que *las direcciones que irradian del mismo, son caracterizadas por « simetría de inversión » en la densificación,* y decimos ahora *que las dos direcciones de densificación se pierden a uno y otro lado en el infinito.* Siendo la realidad absoluta, que *se pierden* en el *centrum centrorum* de *media noche.* (Klein, Lobatchefsky, Cayley, Taurinus, etc.). El infinito de media noche.

Pero hemos dicho que « la densificación » es para nosotros la « dimensionalización » en el *continuum* amorfo, y es la que nos permite distinguir o percibir las dimensiones. Aquí, pues, tenemos en juego *una acción guiada por un parámetro, que es independiente de sentido* ($\pm$), *a fortiori, pues « la densificación » tiene que ser independiente de sentido.* Pero Einstein nos ha mostrado que los fenómenos perceptibles son del dominio exclusivo del campo métrico, simples variaciones de una cosa llamada: *distancia entre dos puntos.* No hay más, pues. Como esta distancia es el *fons et origo* de todo, ésta tiene necesariamente que hallar su expresión geométrica general e invariante en una forma *cuadrática pitagórica.* Lo mismo que si dijéramos: nuestra conciencia distingue dos sentidos en virtud de su propia formación, pero la acción determinante no los posee; para inmunizar, pues, el concepto « distancia entre dos puntos », contra semejante vicio *doble* de la conciencia, debemos adoptar una forma *simétrica doble,* o sea la que emana de *una proyección escalar paralela,* que es una *pitagórea cuadrática.* Así habremos conformado las matemáticas exactamente *con la realidad absoluta que existe densificada en nuestro continuum cerebral,* que es como una proyección escalar paralela.

Si las constantes planetarias fueran tales que nuestra densificación cerebral se manifestase dividida en *cuatro lóbulos a simetría invertida* (doblemente simétrica), la forma que correspondería sería la llamada bicuadrática.

¿ Será posible que haya quien no se aperciba del « inmenso significado » que contiene todo esto ?

Hemos supuesto una tierra fija en un punto del campo solar. Esto

es lo mismo que suponer que describe una órbita geodésica circular, y que el sol es perfectamente homogéneo, o sin manchas, etc.

Decimos, por lo tanto, que nuestra existencia, tal como la percibimos, no es otra cosa que la historia densificada de una única acción, para nosotros estática, *modificada por nuestras constantes planetarias,* y el autor tiene la convicción profunda, intuitiva, sin poderla formular (!), de que debemos a la luna la diferenciación en *sexos* del género humano y reino animal, viendo la manera de comprobar esto en el estudio detenido de la mineralogía, o geología, y la botánica. Quiere decirse con esto, que es en los bordes, por donde se pasa de una de estas *ciencias a la otra,* donde se descubrirá la « transición » que obedece al « nacimiento de la luna », nuestro satélite. Alguien preguntará seguramente, ¿ en qué puede uno fundarse para esta « intuición » ? En efecto, y respondemos como sigue : nosotros iniciamos *nuestra existencia en otra anterior* y nuestro parámetro temporal contiene un término a largo período de repetición. En consecuencia, aparecería que este último término aludido intervino en la serie harmónica de nuestro « parámetro director », como resultado de esa acción perturbadora de disociación. Ahora bien : el *continuum* lunar marca una época de densificación puntual planetaria crítica, y su acción de *densificación cerebral* se ejerce desde un plano *casi coincidente con el de la eclíptica,* siendo *el período harmonizante de esta acción el más largo de los que* pertenecen al sistema tierra-luna, conceptuados como *uno.* Nada extraño, pues, que *esta densificación* se reproduzca con el *período mayor,* y que, por lo tanto, corresponde a nuestro satélite, la reproducción de nuestra especie en la forma que se verifica.

En otras palabras, como una propagación sólo puede descomponerse en componentes recíprocas : la luna es una forma recíproca de la tierra, y la masculinidad guarda la misma relación con la feminidad, sin perder de vista que el cero de una reciprocidad es la igualdad absoluta. De aquí resulta que debemos atribuir a la uniformidad de la *rotación* del movimiento axial diurno de nuestro planeta *la razón de ser de la igualdad de las dos mitades simétricas de nuestro cuerpo* y debemos atribuir a la elipticidad de la órbita lunar la razón de ser de la *desigualdad* perceptible, o reciprocidad, entre hombre y mujer, o sea, masculinidad y feminidad. Por esto interesa estudiar las constantes planetarias, para poder relacionar todos los fenómenos conscientemente perceptibles en la naturaleza, etc., etc. Cualquiera comprende ahora que la tierra y la luna, siendo formas recíprocas y *atrayéndose,* deben ser *desiguales.*

Aquel que conoce la teoría de Darwin, de las mareas, podrá deducir una serie de consecuencias « iluminantes », aplicando la interpretación que corresponde a la misma, como dejamos señalado. Daremos un simple ejemplo: la acción solar densifica infinitesimalmente a nuestro *continuum* cerebral, y por su intermedio forma el cuerpo humano, procediendo la materia prima del planeta terrestre. Ahora bien: la tierra por su rotación axial determina la simetría invertida lateral que observamos como realidad absoluta. Nótese además que la tierra gira gobernada por un tensor lineal que es « la velocidad angular ». Decimos, en consecuencia: la distancia de los conductos históricos del plano de simetría « medio día a media noche » *está gobernada por este tensor.*

Tenemos en esto un medio de leer la historia de la evolución y de interpretar el significado de la misma. Ejemplo: un insecto cuyos ojos están en las extremidades de dos antenas, parece revelar una consonancia especial entre períodos de densificación y de acción solar, variada por otras causas perturbadoras existentes, y que nos incumbe averiguar. Las aplicaciones de este criterio son infinitas, y las consecuencias son de la más alta importancia para el bienestar futuro humano.

Las fases, pues, están escritas en forma indeleble, por donde quiera que miremos. No hay más que leer e interpretar.

Los ojos oblícuos de altas latitudes y la diversidad de razas entre trópicos, etc.

En conclusión, decimos: si la tierra cambia de período de rotación, y la luna se aleja, alargándose su mes hasta los 55 días de los actuales, que dice Darwin en su hipótesis lunar ser el límite, la humanidad tenderá en alguna época, a harmonizar su gran período « densificante » (inercia de densificación por falta de ajuste simultáneo) con el período de rotación, y tendremos un *maximum de capacidad intelectual humana;* la culminación del hombre. Después, si sigue el *processus,* el cerebro terminará por tender a dividirse en dos partes, separados desde la boca, que descenderá al cuerpo. Nada raro sería que terminase la humanidad siendo « insectos a dos cabezas ciclópeas » y completamente embrutecida, como el insecto, etc., o divididos en dos mitades, separadas completamente, e iguales, y reproduciéndose vegetativamente como planta, etc., etc. Pero aquí hemos soltado la rienda a la imaginación, y esto se traduce en nuestro cerebro por un efecto correspondiente a otro sobre nuestro planeta, a saber: un viento.

DIGRESIÓN δ

Cuerpo humano

Se ha visto cómo en un *continuum* puntual homogéneo, o sea, de densidad uniforme constante, es imposible diferenciar conscientemente una dimensión por razón de la « igualdad » que lo caracteriza.

La dimensión nace, como fenómeno perceptible, diferenciable de una densificación puntual infinitesimal. Sabemos que una densificación está caracterizada por una curvatura esférica especial, que puede ser uniforme en el orden finito consciente de magnitudes perceptibles, o uniforme en el orden infinitamente pequeño de elemento espacial. Esto es, si:

$$\frac{ds^2}{ds_0^2} = 1 - \mathbf{R}_1 da \qquad \text{y} \qquad \mathbf{R}_1 \neq 0.$$

Entonces cualquier variación de da hará variar la densificación del *quantum,* o alterará su estructura, haciéndolo divergir del estado incoherente euclideano de

$$da = 0, \qquad \frac{ds^2}{ds_0^2} = 1, \qquad \mathbf{R}_1 \,.\, da = 0.$$

Nos damos cuenta, por lo tanto, que un *continuum* puntual libre, sin cohesión, euclideano, es « infinitamente sensible » y responde por alteración de curvatura esférica a cualquier acción, por infinitesimal que sea. De esta manera podríamos decir que $\mathbf{R}_1 \neq 0$ caracteriza el *peso de un quantum unitario,* o sea, un punto denso.

Una manera de fijar ideas acerca de la naturaleza de un *continuum* euclideano es figurarse una materia que, por resonancia térmica, ha pasado al estado líquido incoherente y, en seguida, hacer el esfuerzo mental de suponer suprimida la gravitación terrestre. Tendremos así el estado

$$\frac{ds^2}{ds_0^2} = 1; \qquad \mathbf{R}_1 da = 0;$$

$$da = \text{curvatura esférica} = 0$$

$$\mathbf{R}_1 = \text{peso quántico} \neq 0,$$

sabemos bien que $\mathbf{R}_1$ encierra un sistema planetario infinitesimal y es una focalización a la vez. En

$$P(x_i) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

se tiene :

$$\mathbf{R}_1 = \sum_{ik}^{n} x_i x_k \frac{dx_i}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds} - \sum_{ik}^{n} x\, x_i \frac{dx_k}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds}$$

$$i, k = 1, 2, ..., n.$$

Si quisiéramos simbolizar matemáticamente nuestro cerebro como un *continuum* puntual denso, infinitamente sensible a acciones exteriores, escribiríamos simplemente la ecuación

$$\frac{ds^2}{ds_0{}^2} = 1 - \mathbf{R}_1 da$$

para

$$da = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{R}_1 \neq 0,$$

en la hipótesis de ser $\mathbf{R}_1$ variable de determinada manera (escalarmente), explicaría el escalonamiento fásico de nuestros órganos de percepción.

Percibimos, pues, al cuerpo humano en el *continuum* mayor ambiente como orden finito consciente de magnitud, simplemente porque posee una densidad diferente del espacio puntual que lo rodea. Por diferencia de estructura puntual, o, si se quiere, por diferencia de curvatura espacial. La obra de densificación está en plena actividad. Todas las acciones fásicas exteriores son conducidas por aferencia al cerebro, esto es, focalizadas en el cerebro, donde se produce la combinación en cada foco y la descomposición en dos componentes, una de carácter kinético y otra de carácter dinámico, siendo esta última la que densifica por eferencia. Quiere decir que nuestro cerebro está en constante y continua actividad por efecto de la percepción continua aferente. Vivimos en el más absoluto e íntimo contacto con el *continuum* espacial ambiente, focalizando todas las acciones, absolutamente todas.

Fácil será para el lector explicarse en una forma elemental cómo los hombres que hablan un mismo idioma viven en un mismo paraje, o perciben una misma topografía. Cómo, las personas de una misma familia, densificándose igualmente, producen ese fenómeno llamado característica de familia, etc. Cómo influye el orden en la persona, esto es, un sér que se densifica en un medio ordenado será muy dife-

rente de otro que se integra en un medio desordenado. La densificación fonética también ofrece estas fases : un hombre desarrollado en medio del «ruído y sonidos discordantes» será diferente de otro densificado en un medio silencioso, o armonioso, etc.

¿Acaso es motivo de sorpresa que la difracción luminosa en un monte de árboles densifique por percepción cerebral en el pájaro las *cónicas luminosas* sobre la cáscara del huevo que pone? Y qué estas manchas circulares sobre el huevo se traduzcan en «sombras aferentes» dentro del mismo, cuando la gallina (pájaro) empolla? Digamos «sombras térmicas», pues se trata de gravitación térmica. Debiendo notarse que la acción de difracción es mas intensa y continuada en el preciso intervalo en que la gallina (pájaro) emplea en poner el huevo, etc. Todos los fenómenos miméticos tienen así su explicación, pues *el color* no es más que una fase de percepción kinética y, por lo tanto, obedece a una característica de curvatura esférica, o densidad. Pero cualquiera, sin mucho esfuerzo, puede por sí elaborar este punto, *ad libitum,* y deducir muchísimas consecuencias prácticas y de gran utilidad.

Relativamente a la densificación fonética que observamos en los animales, pájaros y en el hombre, podemos llegar a sentar que se trata de un fenómeno de correspondencia entre dos órdenes de magnitudes diferentes. Quiere decir que si *a una deformación infinitesimal determinada podemos hacer corresponder un infinito de deformaciones en el orden inmediato superior de magnitudes, entonces, la densificación de traza de una correspondencia arbitraria admitirá su repetición, y así la reproducción de densificación sucesiva y su perpetuación como realidad absoluta en nuestro cuerpo.* Esto explica *la arbitrariedad básica* de un idioma que es en todo análoga a la arbitrariedad básica de la numeración coordenada de los puntos de un *continuum;* exactamente análoga y por la misma razón matemática explicada. Vemos, pues, que *una vez* que se ha producido una correspondencia entre una aferencia, o deformación focalizada, infinitesimal, y la deformación eferente, dilatada por propagación hasta el orden finito consciente inmediato de magnitud, queda establecida la reciprocidad por la densificación de traza, o sea: queda establecida *la posibilidad de inversión del fenómeno.* Es así, que la geometría nos permite resolver este problema interesante. Repetimos, que *la indeterminación* entre la densificación infinitesimal, o deformación focalizada, y la deformación finita por eferencia, es destruída por acciones o percepciones infinitesimales continuas del *continuum* ambiente. La falta de conciencia, y la con-

tinuidad del proceso se traducen en el fenómeno que llamamos, libre albedrío, o acto de voluntad, etc., como ya se ha notado en otra parte.

Resumiendo, pues, una percepción kinética o visual proyectiva, es una repetición, y es motivo de una deformación continua infinitesimal focalizada en un centro cerebral. Esta deformación continua es transformada por «eferencia de repetición» en deformación continua de otro orden de magnitudes, por ejemplo, en deformaciones pulmonares y vocales, etc., traduciéndose el fenómeno en un *sonido vocal y una aferencia auricular,* o una percepción auricular. Así queda establecida la *reversibilidad* del fenómeno mental a una repetición de la percepción visual inicial, o una repetición del sonido vocal final; indistintamente, se reproduce el proceso, siguiendo la traza ya densificada. Todo consiste, pues, *en las percepciones accidentales que predominan en el momento del fenómeno y que gobiernan la primera correspondencia entre las deformaciones.* Fácil es ver que es en virtud de la ausencia de estas primeras circunstancias de ambiente que se hace necesaria la educación, o «instrucción», *para guiar esa primera correspondencia* y así densificar la traza inicial, como si dijéramos, fijar el camino. Igualmente fácil es observar que, una vez *densificado un idioma* de correspondencias proyectivas, se pasa a otro idioma por un simple mecanismo de «transformación de coordenadas». Matemáticamente:

$$P = (x_i) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

$$\bar{x}_i = \varphi_i (x_k) \qquad i, k = 1, 2, ..., n,$$

esto es, un diccionario. Fluye inmediatamente de lo anterior que *un lenguaje nace de la desigualdad métrica de nuestras percepciones,* y que el concepto de *número* nace de la igualdad de las mismas, como si dijéramos, de la igualdad global en todo orden de magnitud. Sabemos ya que relacionamos percepciones, que son propagaciones de carácter recíproco, valiéndonos del absoluto, o sea como cuando pasamos de relaciones proyectivas a métricas, en geometría. Podríamos fácilmente formular una hipótesis del procedimiento valiéndonos del fenómeno de difracción luminosa, ya mencionado en el caso del huevo y el pájaro, pero no hay para que profundizar el punto. Cualquiera fácilmente podrá hacerlo, valiéndose de *una doble proyección* de las cónicas similares en que se proyectan cualquier forma intersticial que da paso a una propagación, etc.

Todo esto se resume en el principio de linealizaciones por cambio

de orden de magnitudes, o por paso del orden finito consciente al infinitesimal, tan conocido. A esto hay que añadir las observaciones fundamentales siguientes:

Nuestro universo perceptible es un *continuum* de repetición: *Observación;*

Nuestras percepciones son continuas y *varían en intensidad* desde un límite inferior, tendiente a cero: *Observación y lógica;*

Percibimos por la repetición y, así, sólo tenemos *una forma básica invariante de percepción: Observación y lógica;*

No existe geometría abstracta: *Axioma;*

Número es un símbolo de repetición: *Axioma.*

Por fin, percibimos por focalización de propagaciones, o repeticiones, en nuestro cerebro, exactamente como un astro *percibe* propagaciones en el *continuum* mayor, o un átomo en un *quantum* cualquiera, o un punto en el *continuum: Observación y lógica.*

Terminamos esta digresión atendiendo a la explicación matemática de *la dimensionalización,* o densificación de una traza en un *continuum.*

Hemos visto que un *continuum* euclideano tiene como expresión analítica la fundamental cuadrática:

$$\frac{ds^2}{ds_0{}^2} = 1 - \mathbf{R}_1 da$$

de peso puntual:

$$\mathbf{R}_1 \neq 0,$$

curvatura:

$$da = 0,$$

por lo tanto:

$$ds^2 = ds_0{}^2,$$

quiere decir, que el estado espacial euclideano es un estado incoherente, o sea, *sin cohesión.* Digamos: cohesión nula. Este estado es el que llamamos vulgarmente *líquido,* y es sólo aproximado por causa de la gravitación terrestre. Un líquido es, pues, un *continuum* puntual de puntos (*quanta*) densos determinados, *sin cohesión.* La naturaleza geométrica de estos puntos, o *quantas* elementales, está encerrada en la expresión

$$\mathbf{R}_1 \neq 0.$$

Deducimos, *como consecuencia directa, que toda densificación, o dimensionalización, nace en un continuum euclideano,* o sea, en un estado euclideano incoherente. Se revela inmediatamente que todo el fenó-

meno de densificación depende del resonador esférico *da*, el cual, variando en un sentido determina *una propagación convergente* (materia) y en otro sentido *una propagación divergente* (disolución).

Esto es de mucha importancia, pues nos hace conocer una condición básica de toda densificación, *o realidad absoluta.* En esta condición básica está la explicación geométrica del proceso de *nutrición* como fenómeno inverso del de densificación. Quiere decir que es *la nutrición* que produce el estado euclideano incoherente sobre el cual obran las acciones exteriores y *densifican.*

Refiriéndonos al sér humano, podemos sentar que *la nutrición produce lo que llamamos cerebro* (no tejido como se creía). Cada órgano digestivo provee de los *quanta* elementales especiales a cierta *zona cerebral euclideana.* Cada zona constituída, como se ha dicho, por puntos de determinado peso, responde a determinadas fases de percepción, etc. Los señores médicos tendrán forzosamente que tener este principio básico muy en cuenta y dedicar sus meritorios esfuerzos en el sentido de descubrir las relaciones entre órganos digestivos y zonas euclideanas cerebrales para poder así atacar eficientemente cualquier enfermedad. Esto es: *una enfermedad es un simple desorden cerebral, producido por aferencias nocivas,* sea cualquiera que sea el carácter de éstas. Es por esto que conviene un tratamiento que tenga por objeto « parar la obra de densificación ».

Suprimir las percepciones, o acciones exteriores. La obscuridad, el silencio, la inmovilidad y la igualdad de resonancia térmica conveniente (temperatura) son armas formidables para combatir una enfermedad. Si a estos añadimos *la desintegración* por dietética conveniente, aumentamos la eficiencia de nuestros recursos. Quiere decir, que podemos:

1° Parar la obra de densificación, o reducirla apreciablemente;

2° Desintegrar tejido, suspendiendo convenientemente algunos alimentos determinados;

3° Integrar nuevamente por alimentos determinados y acciones exteriores intensificadas y prolongadas; siendo estas últimas las que densifican, etc.

En una palabra, surje el tratamiento de la consideración simple que: *nutrir,* consiste en producir un estado euclideano incoherente reduciendo un alimento cohesivo al estado de no cohesión y elevando « los puntos » a una zona cerebral (a descubrir), ciertos y determinados puntos, o *quanta.* Las percepciones obran sobre estos « puntos » por medio de los sentidos y procede en seguida la eferencia y densifi-

cación. Nada más. El error actual está en creer en la producción directa de tejido por nutrición, etc.

Cuando nosotros nos introducimos en una cama, nos tapamos y dormimos, no hacemos otra cosa sino *reducir el paso de la obra de densificación.* El principio es el de la «invernación» observada en los batracios. Nada permite oponer la creencia de que si pudiéramos substraernos a las acciones exteriores, *podriamos prolongar indefinidamente nuestra existencia, o vida.* Al contrario, todo indica la posibilidad y la facilidad de lograrlo. Necesitamos *refugios,* guarnecidos de la *acción solar densificante,* etc. Los insectos disparan de la acción solar enterrándose bajo tierra, etc.

Matemáticamente, el cáncer resulta ser un desorden cerebral que consiste en la *superposición de eferencias.* Quiere decir que la densificación se dirige por concentración *a una sola zona del cuerpo.* Esto deberá responder a la desaparición de límites, ú horizonte, entre dos o más zonas cerebrales, lo cual debe sobrevenir por error de aferencia nutritiva. Tratamiento de obscuridad, silencio, inmovilidad, e igual temperatura, con estudio de dietas, parecería ser el más indicado.

MISCELÁNEA

Filosofía corriente

ESTÉTICA

Para los efectos de fijar ideas solamente y evitar complicaciones, vamos a admitir que existe el libre albedrío. Sabemos que este fenómeno es una simple consecuencia de perceptibilidad continua e infinita, y que el cerebro responde al ambiente.

Un hombre impulsado por acciones de ambiente que focalizan en su cerebro y densifican tejido, procede a elegir una vivienda. En seguida elige muebles, etc., y adorna a su antojo su casa. Elige una compañera, o se deja elegir por la compañera, y funda un hogar, dentro de cuyo ambiente se densifica por acciones persistentes, continuas, la familia. Todo responde a la elección o gusto de los progenitores.

En vista de esto, y de acuerdo con la tesis de densificación y de repetición, decimos, que *las formas humanas así densificadas tienden a repetir los efectos producidos por el ambiente,* y siendo este último

«agradable por elección», también lo serán los seres densificados bajo su acción. Este es el fenómeno llamado *estética.*

Fácil es percibir *la invariante de elección* en el proceso, *ad infinitum,* de densificación progresiva que caracteriza lo anterior. Se elige el sitio, se elige el ladrillo cuya forma obedece a selección, se elige un mueble cuyo constructor eligió construir a su gusto, etc. Igualmente fácil es ver que, remontando a un orden mayor de magnitudes, todas esas elecciones están supeditadas a condiciones de gobierno, esto es, de país. A un gobierno ordenado, estable, corresponderá mayor intensificación de esa libertad de elección, y así en lo demás podemos ir remontando a condiciones de suelo, de clima, etc., *ad infinitum.* Pura repetición. Resultado: la densificación tiende a ser una cristalización, tanto más regular cuanto más harmonioso el medio ambiente, tanto más irregular, conglomerado u amorfo, cuanto más discordante el medio, etc.

La riqueza aumenta la libertad de elección, y así aumenta, o intensifica, el fenómeno que llamamos *estética.*

Un gobierno debe, pues, procurar *la harmonía,* bajo todo punto de vista, en su acción. Una municipalidad sabia cuidará la estética de la ciudad y suprimirá toda discordancia, sea visual, auditiva, o de tacto dinámico. Y nótese bien que los sonidos densifican como los idiomas. Conviene suprimir la terrible y estridente discordancia sonora en nuestra gran metrópoli. El efecto se reflejará pronto en la fisonomía del pueblo. Todo esto se repite para un hogar, etc.

VIENTO

Leemos en la enciclopedia británica, undécima edición: *un movimiento natural del aire.* ¿Qué significado tendrá esto?

La repetición explica este fenómeno de la manera sencillísima siguiente: el viento es una propagación atmosférica cuya longitud de onda es de *un orden de magnitud superior al orden de su frecuencia.* Quiere decir que lo que percibimos auditivamente como *sonido musical* es un límite recíproco de *viento* que percibimos dinámicamente por *tacto.*

Cambiemos el orden de magnitudes y consideremos una estaca clavada en un fondo de mar, cerca de la costa, que supondremos playa de manera que la profundidad que cubre la estaca no exceda de seis metros, por ejemplo. Ya sabemos que con una profundidad mayor

de quince metros no se sienten las olas en la superficie (aparentemente).

Fácil es ver que cada vez que avanza una ola sobre la playa, la estaca estará en una corriente de agua, y cada vez que retrocede el agua, después de romperse la ola, volverá a estar la estaca en otra corriente opuesta de agua. Si la estaca tuviera cerebro como el nuestro y no pudiera apartarse de su vecindad inmediata, poseyendo un orden de tiempo *sui generis,* diría cuando avanza la ola, que *sopla un viento acuático* de tal dirección, sobreviniendo calma al mucho tardar en su orden especial temporal, y más adelante un *viento acuático contrario.* Hablaría de toda clase de vientos y fenómemos meteorológicos, acuáticos, etc. Creciendo la marea y cubriéndose la estaca con mayor cantidad de agua, que supondremos suficiente para que no sintiera corriente cuando pasan olas regulares, la estaca, mirando su barómetro, diría que sube y baja con períodos que hacen sospechar regularidad, etc., sin poder darse cuenta que cada vez que sube el barómetro, es porque pasa la cresta de la ola por encima y baja cuando el *hueco* de la ola, etc. Pues bien: si uno sigue este proceso podrá repetir en el orden acuático todos los fenómenos que nosotros percibimos en nuestra atmósfera ambiente.

Quiere decir que así como nosotros existimos en otro orden de magnitudes, diferente del de *la estaca, y comprendemos la naturaleza de la propagación* que ocasiona todos los fenómenos acuáticos en el cerebro de la estaca, también podría haber un sér especial que contemplando nuestro planeta desde afuera viera y comprendiera *la propagación atmosférica que ocasiona toda nuestra meteorologia.* Esto es repetición. Así vemos que *viento* es *una ola atmosférica* que pasa por encima de nosotros; sube el barómetro cuando crece la marea atmosférica o cuando hay «mar de leva», y pasa la cuesta de una ola, etc. Todo es repetición, o propagación, en diferentes órdenes de magnitudes; teniendo cada orden su dimensión temporal especial.

Ahora se comprende lo dicho: que la única diferencia entre una nota musical y un viento es de magnitud, siendo ambos fenómenos idénticos en su naturaleza: *una propagación atmosférica.* El lector podrá vislumbrar lo que se ha querido decir cuando se sentó que luz y materia son dos límites recíprocos de un mismo fenómeno: ¡propagación! Uno lo percibimos visualmente y el otro por tacto.

RELIGIÓN

Al tratar del « punto » dejamos establecida, a la par de percepción continua, la continuidad de órdenes de existencia, o de conciencia.

Un punto es un cero para un orden de conciencia y un infinito para el orden inmediato inferior. Coloquémonos en ese orden inmediato inferior, *sui generis,* y percataremos en seguida que es *en el concepto de la existencia de un orden inmediato superior consciente* que estriba la idea religiosa. Más aún, *nos damos cuenta de la indeterminación que tiene que caracterizar esa idea,* por efecto, precisamente, de su ilimitación. Comprendemos ahora el por qué de la indeterminación religiosa.

Lo importante de notar es que la idea religiosa no obedece a una abstracción en el sentido que explicaba Cayley para las matemáticas, sino que obedece a *una existencia real, perceptible inconscientemente por nuestro cerebro.*

ATRACCIÓN

Este fenómeno cerebral se define matemáticamente diciendo que responde a la composición de dos propagaciones recíprocas. Supongamos dos propagaciones focalizadas en $P = (x_i)$ del *continuum* mayor; si

$$c_x = \xi \,.\, a$$

$$c_y = \eta \,.\, b,$$

la composición dará el tensor de segundo orden

$$(c_x \,.\, c_y) = \xi\eta \,.\, (a \,.\, b),$$

en que será evidentemente $\xi\eta =$ constante y supondremos que es un valor finito consciente para nuestro cerebro. Pongamos:

$$(c_x \,.\, c_y) = \nu \,.\, \lambda; \qquad \nu = \xi\eta; \qquad \lambda = (a \,.\, b);$$

estudiemos ahora el significado de

$$(ab) = \lambda \gtreqless 0$$

que implica

$$(c_x \,.\, c_y) \gtreqless 0,$$

comprendemos inmediatamente, sin necesidad de comentarios mayores, que

$$(c_x c_y) \rightarrow 0$$

es una composición normal y es *una incoherencia, o un líquido sin cohesión,* o con una cohesión muy pequeña que llamamos *viscosidad* y que mide el grado de aproximación al límite cero, o a la *normalidad absoluta.*

Si tenemos el medio de hacer *girar* las propagaciones C_x y C_y desde la normalidad, en uno y otro sentido, comprenderemos que

$$(c_x c_y) > 0 = \textit{materialización}$$

por aumento positivo de cohesión y

$$(c_x \,.\, c_y) < 0 = \textit{vaporización}$$

por aumento negativo de cohesión.

Percatamos que *la gravitación cohesiva es indeterminada entre dos límites de magnitudes*

$$-\,|\,a\,|\,.\,|\,b\,| < (c_x \,.\, c_y) < +\,|\,a\,|\,.\,|\,b\,|$$

en que

$$|\,a\,|\,.\,|\,b\,| = \text{valor absoluto producto de } a \text{ por } b,$$

y que todas las propiedades de *una materia* están encerradas en las propiedades del *número absoluto representando el producto variable*

$$ab = \text{número.}$$

Ahora comprendemos el significado de la ecuación fundamental hallada

$$ds^2 = ds_0^2 \pm \mathrm{R}da,$$

y comprendemos la función del resonador da, que es el parámetro de curvatura esférica.

Pasemos ahora a considerar la *atracción* desde otro punto de vista. Repetimos que este fenómeno es, matemáticamente, lo que percibe el cerebro cuando dos propagaciones recíprocas se componen.

Teniendo esto presente es que decimos: el hombre y la mujer son dos formas recíprocas de repetición compuesta. Estas dos formas derivan de *una sola, ab initio,* y la división ha sobrevenido por *descomposición* de la propagación compuesta original. Esta descomposición sólo puede haber tenido lugar por efecto de *una aferencia extraña en la focalización planetaria* (tierra). ¿Cuál puede haber sido esta nueva,

o tardía, aferencia extraña? Una sola y única perceptible, a saber: *la luna.* Quiere decir que la luna *es la recíproca de nuestra tierra* y es debido a su aferencia que se dividió la densificación cerebral humana, *repitiendo el fenómeno* en otro orden de magnitudes, esto es: hombre y mujer. Masculinidad y femininidad, *ad infinitum.* ¿Cuándo se separó la luna? Su fecha está escrita en la divergencia femenina de densificación; en donde ésta se inicia, en la naturaleza observable, ahí estará el dato buscado.

Resulta, de esta manera, que es según el carácter de dos propagaciones que percibiremos los fenómenos de:

Atracción;
Indiferencia;
Repulsión.

De aquí fluye que todos los planetas del sistema solar, siendo formas recíprocas del sol *pueden no serlas entre sí.* No hay razón alguna para creer que la Tierra y Marte se atraigan, o la Tierra y Júpiter, etc. Aquí vislumbramos una nueva razón para estudiar detenidamente todas las clases posibles de fenómenos de eclipses por aferencia, pues, exactamente como la presencia de un enemigo provoca el fenómeno de explosión de ira, guerra, etc., en el hombre, *así puede un planeta o astro, también enemigo, causar este efecto en el sol y éste los sacudimientos terrestres conocidos,* etc. Todo se repite.

EVOLUCIÓN

Se recordará lo dicho en otro lugar, que una variación de la velocidad angular en el movimiento axial de nuestro planeta alteraría completamente el carácter de la simetría invertida de una densificación cerebral relativamente al plano meridiano, etc., y que alargándose el mes lunar actual hasta los cincuenta y cinco días darwinianos (George Darwin) un hombre pasaría a ser un insecto, o un vegetal. Pues bien, como nuestro universo es un *continuum* de repetición y los fenómenos se repiten en todos los órdenes de magnitudes, decimos que: *la actualidad debe revelar este fenómeno descrito por efecto de repetición de órdenes de cerebro, o materia cerebral.*

Basta fijarse en *la obra vital* de cada forma orgánica para cerciorarse de esta verdad. Un hombre densifica obra durante su vida, un animal no densifica obra, un pájaro sí, un insecto densifica en alto grado de perfección, etc. El ciclo de la evolución está a la vista.

APÉNDICE

La repetición y el teorema Einstein-Lorentz

Consideremos un punto P (x_i) y en éste un sistema vectorial básico de referencia normalizado con índices $(-1+3)$, de acuerdo con Sylvester y Minkowsky. Adoptemos como absoluto la forma cuadrática luminosa de Einstein :

$$-c^2dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = 0$$

$$cdt = dx_0 \qquad -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = 0,$$

siendo esta la condición de *igualdad general espacial,* la densificación infinitesimal tiene por expresión *la divergencia* de esta condición, o sea :

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \neq 0,$$

o abreviadamente

$$ds^2 = \sum_{i=0}^{3} \varepsilon_i dx_i^2 \neq 0 \qquad \begin{cases} \varepsilon_0 = -1 \\ \varepsilon_{1,2,3} = +1, \end{cases}$$

quere decir que ds^2 es el *elemento infinitesimal de percepción por diferenciación de la condición de igualdad general espacial,* exactamente como, por ejemplo, cuatro puntos pertenecerán a un plano si la determinante formada con sus coordenadas *es nula* y llamamos *volumen* el fenómeno perceptible de la divergencia de esta condición; lo cual se recordará del capítulo I. Así, pues, ds^2 es la expresión matemática de densificación infinitesimal, siendo, por lo tanto, lo que llamamos una dimensionalización, cuya forma más simple es origen del concepto : *distancia entre dos puntos,* de acuerdo con lo explicado.

Fácilmente se deduce, con Weyl y Einstein que

$$ds^2 = \sum_{ik=0}^{3} g_{ik} dx_i dx_k,$$

en este sistema, en P (x_i) normal :

$$g_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ \varepsilon_i & i = k \end{cases}; \qquad \varepsilon_0 = -1; \qquad \varepsilon_{1,2,3} = +1;$$

o sea :

$$g_{00} = -1; \qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = +1.$$

Ahora bien, según digresión 0.60, tenemos :

$$c = v^i . f_i$$

$$(cc) = \sum_{ik=0}^{3} v^i v^k (f_i f_k)$$

de donde :

$$g_{ik} = (f_i f_k) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ \varepsilon_i & i = k, \end{cases}$$

o sea :

$$g_{ii} = (f_i f_i) \qquad g_{00} = (f_0 f_0) = -1, \text{ etc.},$$

pero como f es *la potencia escalar* que caracteriza la focalización en $P = (x_i)$, a la par de $\rho = \mu$, la *densidad* (carga) *escalar,* siendo ambas funciones de las coordenadas (x_i), comprendemos la razón de ser de llamar los

$$g_{ik} = (f_i f_k) = \textit{potenciales métricos.}$$

Designemos ahora a

$$\varphi_i = \frac{df}{dx_i}; \qquad \mathbf{s}^i = \rho \mathbf{v}^i;$$

siendo evidentemente

$$\mathbf{v}^i = \frac{dx_i}{ds}$$

y medido en unidades de c luminosas, lo cual exige, para un cambio de unidad, que escribamos en general :

$$\frac{\mathbf{v}^i}{c} = \frac{dx_i}{ds},$$

de aquí :

$$\frac{\mathbf{v}^i}{c} ds = dx_i,$$

comparando :

$$(cc) = \sum_{ik=0}^{3} v^i . v^k . (f_i f_k) = \sum_{ik=0}^{3} g_{ik} . v^i v^k$$

$$1 = \sum_{ik=0}^{3} g_{ik} \frac{v^i}{c} \cdot \frac{v^k}{c}$$

y así

$$ds^2 = \sum_{ik=0}^{3} g_{ik} \frac{v^i}{c} ds \cdot \frac{v^k}{c} ds = \sum_{ik=0}^{3} g_{ik} \cdot dx_i \cdot dx_k,$$

quedando así evidenciada la relación entre la forma Einstein y la forma fundamental de propagación de esta tesis. Resulta, pues, que siendo

$$\mathbf{C} = \mathbf{s}^i \cdot \varphi_i$$

será

$$\mathbf{s}^i = \rho \frac{\mathbf{V}^i}{c}, \qquad \varphi_i = \frac{df}{dx_i};$$

busquemos ahora los componentes de $\mathbf{s}$ y φ :

$$\mathbf{s}^0 = \rho \frac{\mathbf{V}^0}{c},$$

pero

$$\frac{\mathbf{V}^0}{c} = 1 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{s}^0 = \rho,$$

puesto que $\mathbf{s}^0$ es la componente temporal y representa *la repetición de posición temporal de la densidad escalar* ρ en P y sabemos que no hay desplazamiento espacial, lo cual implica que ρ describe una paralela al vector temporal universal en P, esto es $\frac{\mathbf{V}^0}{c} = 1$, sigue fácilmente y de una manera análoga :

$$\mathbf{s}^0 = \rho; \qquad \mathbf{s}^1 = \rho \frac{\mathbf{V}^1}{c}; \qquad \mathbf{s}^2 = \rho \frac{\mathbf{V}^2}{c}; \qquad \mathbf{s}^3 = \rho \frac{\mathbf{V}^3}{c};$$

y también si llamamos $\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \mathbf{f}^3$, las propagaciones de ρ en las direcciones espaciales, podemos formular así el *vector potencial* Φ, en componentes contravariantes naturalmente :

$$\Phi^0 = \varphi; \qquad \Phi^{1,2,3} = \mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \mathbf{f}^3,$$

y pasando a componentes covariantes :

$$\Phi_0 = g_{00}\Phi^0 = g_{00}\varphi = -\varphi$$

$$\Phi_{1,2,3} = g_{11}\Phi^{1,2,3} = \Phi^{1,2,3},$$

escribiremos φ por Φ y así tenemos

$$\varphi_0 = -\varphi, \qquad \varphi_{1,2,3} = \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3.$$

El lector ve ahora que en P (x_i) se tiene :

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^i \varphi_i,$$

siendo $\mathbf{s}^i$ las componentes contravariantes, que comprenden la aferencia, eferencia y densificación focal en P; mientras que φ_i son las componentes covariantes de *la acción potencial* y comprenden la aferencia, eferencia y potencia focal en el mismo punto P. Tenemos, pues, dos clases de focalización en P, una de densidades escalares y otra de acciones. *El fenómeno producido por la focalización de acciones es precisamente el llamado campo de gravitación,* o *fuerza.*

La hamiltoniana invariante conocida

$$\int_G \mathbf{c} dx = \int_G (\mathbf{s}^i \varphi_i)\, dx$$

da por variación

$$\delta \int_G \mathbf{c} dx = 0 \qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathbf{s}^i}{dx_i} = 0 \\ \dfrac{d\varphi^i}{dx_i} = 0 \end{cases}$$

en componentes contravariantes del potencial.

Aplicando índices tenemos :

$$(x_0 = ct) \qquad \frac{d\rho}{cdt} + \text{div.}\left(\rho \frac{\mathbf{v}}{c}\right) = 0,$$

o sea si ponemos $s = \frac{1}{c}\rho\mathbf{v}$ con Lorentz :

$$\frac{d\rho}{cdt} + \text{div.}\, s = 0,$$

que es la clásica ecuación de continuidad. Por otra parte, aplicando índices al potencial obtenemos

$$\frac{d\varphi}{cdt} + \text{div.}\, \mathbf{f} = 0,$$

que es la conocida condición impuesta por Lorentz a su célebre *vector potencial* auxiliar (retardado).

Aplicando índices a

$$\mathrm{F}_{ik} = \frac{d\varphi_i}{dx_k} - \frac{d\varphi_k}{dx_i}$$

y recordando que $\mathrm{F}_{ii} = \mathrm{F}_{kk} = 0$ por levo-simetría, y

$$\varphi_i = g_{ii}\varphi^i, \text{ etc.},$$

obtenemos :

$$F_{10} = \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{f}^1}{dt} + \frac{d\varphi}{dx_1}$$

$$F_{20} = \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{f}^2}{dt} + \frac{d\varphi}{dx_2},$$

esto es, vectorialmente :

$$\mathbf{e} = (F_{10}, F_{20}, F_{30}) = \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{f}}{dt} + \text{grad.}\,\varphi$$

$$\mathbf{b} = (F_{23}, F_{31}, F_{12}) = \frac{1}{c}\,\text{rot.}\,\mathbf{f},$$

en que $\mathbf{e}$ = fuerza eléctrica y $\mathbf{b}$ = fuerza magnética de Lorentz, y reconocemos las clásicas ecuaciones del electromagnetismo.

Se ve que

$$\mathbf{e} = (F_{10}, F_{20}, F_{30})$$

es, en covariantes,

$$(\mathbf{e} = F^{01}, F^{02}, F^{03})$$

en contravariantes, siendo

$$F_{10} = g_{11}g_{00}F^{10} = -F^{10} = +F^{01}, \text{ etc.}$$

$$\mathbf{b} = (F_{23}, F_{31}, F_{12})$$

$$\mathbf{b} = (F^{23}, F^{31}, F^{12}),$$

y aplicando esto a la condición conocida de ser

$$\frac{dF_{kl}}{dx_i} + \frac{dF_{li}}{dx_k} + \frac{dF_{ik}}{dx_l} = 0$$

por ser

$$F_{ik} = \text{rot.}\,(\varphi)$$

hallamos :

$$\frac{dF_{12}}{dx_0} + \frac{dF_{20}}{dx_1} + \frac{dF_{01}}{dx_2} = \frac{d\mathbf{b}_3}{cdt} - \frac{d\mathbf{e}_1}{dx_2} + \frac{d\mathbf{e}_2}{dx_1}$$

$$\frac{dF_{13}}{dx_0} + \frac{dF_{30}}{dx_1} + \frac{dF_{01}}{dx_3} = \frac{d\mathbf{b}_2}{cdt} - \frac{d\mathbf{e}_1}{dx_3} + \frac{d\mathbf{e}_3}{dx_1}, \text{ etc.,}$$

o sea, vectorialmente:

$$= \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{b}}{dt} + \text{rot.}\,\mathbf{e} = 0, \text{ etc.,}$$

que es la conocida ecuación de Maxwell. Variando a i de 1 a 3, sigue:

$$\text{rot. } \mathbf{b} - \frac{d\mathbf{e}}{cdt} = 0, \text{ etc.},$$

simple cuestión de mecánica de cálculo.

Por último, aplicando índices a

$$F_{ik}\mathbf{s}^k = \mathbf{p}_i$$

o en componentes contravariantes:

$$F^{ik}\mathbf{s}_k = \mathbf{p}^i,$$

obtenemos las expresiones de densidad de trabajo

$$\mathbf{p}^0 = (\mathbf{es}), \text{ etc.},$$

que el lector fácilmente puede deducir.

Quiere decir que el sistema de ecuaciones Maxwell Lorentz, está contenido en las formas tensoriales invariantes anteriores y QEF. Así es cómo la repetición y densificación infinitesimal resuelven el teorema de Einstein-Lorentz.

Recordemos que la variación de la hamiltoniana

$$\delta \int_G \mathbf{c}dx = 0$$

nos dió el vínculo entre electricidad y materia por medio de las condiciones

$$\delta\mathbf{p}_i = 0 = \begin{cases} \delta\,(F_{ik}\mathbf{s}^k) & (a) \\ \delta\left(\dfrac{dT_i^k}{dx_k} - \Gamma_{i\beta}{}^{\alpha}T_{\alpha}{}^{\beta}\right), & (b) \end{cases}$$

encerrando (a) la ecuación de conservación de impulso y de acción eléctrica y (b) la ecuación de conservación de acción e impulso mecánico de Einstein. La (a) encierra la doble condición:

$$\frac{d\mathbf{s}^i}{dx_i} = 0$$

$$\frac{dF_{ik}}{dx_l} + \frac{dF_{kl}}{dx_i} + \frac{dF_{li}}{dx_k} = 0,$$

mientras que la (b) conduce a la condición einsteniana que remata en la célebre forma llamada cosmológica, como caso particular:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}R\sqrt{g} + \lambda,$$

en que R es la escalar de curvatura

$$R = g_{ik.ik} - g_{ii.kk},$$

la cual nos da la hamiltoniana estacionaria de acción de materia, cuya variación, anulada por integración la divergencia λ,

$$\delta \int \mathbf{G} dx = 0,$$

encierra la ley de gravitación einsteniana.

TEORÍA DE MIE

Mie distinguió entre la acción focal expresada por las componentes contravariantes de una densidad de segundo orden H^{ik} y la acción focal expresada por las componentes del tensor lineal F_{ik}. Esto es :

$$\frac{dH^{ik}}{dx_k} = \mathbf{s}^i, \qquad F_{ik}\,\mathbf{s}^k = \mathbf{p}_i,$$

$$F_{ik} = \frac{d\varphi_i}{dx_k} - \frac{d\varphi_k}{dx_i} \qquad \text{y} \qquad \frac{dF_{kl}}{dx_i} + \frac{dF_{li}}{dx_k} + \frac{dF_{ik}}{dx_l} = 0,$$

esto implica que si teníamos, como recién se vió :

$$\mathbf{e} = (F_{10}, F_{20}, F_{30})$$

$$\mathbf{b} = (F_{23}, F_{31}, F_{12}),$$

o si suponemos que así como F da las componentes **e**, **b**, en tiempo y en espacio, H da las componentes D y **H** respectivamente, será :

$$D = (H_{10}, H_{20}, H_{30})$$

$$\mathbf{H} = (H_{23}, H_{31}, H_{12}),$$

por otra parte recordando las leyes del campo electromagnético aplicados al caso de materia, en que siendo ε y μ constantes *ad hoc* :

$$\mathbf{e} = \mu D$$

$$\mathbf{b} = \varepsilon B,$$

tenemos las clásicas ecuaciones usuales ;

$$\text{div.}\, D = \rho \qquad B + \text{rot.}\, \mathbf{f} = 0 \tag{1}$$

$$\text{div. B} = 0 \qquad \frac{d\rho}{dt} + \text{div. } \mathbf{s} = 0 \tag{2}$$

$$c = 1 \qquad \frac{d\mathrm{B}}{dt} + \text{rot. E} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} + \text{grad. } \varphi = \mathrm{E} \tag{4}$$

$$\frac{d\mathrm{D}}{dt} - \text{rot. } \mathbf{H} = -\mathbf{s}. \tag{5}$$

Mie ahora formula la ecuación de continuidad de acción así :

$\mathbf{W}$ = densidad de energía;

S = flujo de energía.

Se tiene :

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt} + \text{div. S} = 0,$$

y se consigue relacionar estas ecuaciones para arribar a la teoría de Maxwell, procediendo de la manera siguiente :

Multiplicando (3) por $\mathbf{H}$ y la (5) por E, luego sumando, después multiplicando la (2) por φ y la (4) por $\mathbf{s}$ y sumando, resulta :

$$\mathbf{H}\frac{d\mathrm{B}}{dt} + \mathrm{E}\frac{d\mathrm{D}}{dt} + \mathbf{H}\,\text{rot. E} - \mathrm{E}\,\text{rot. } \mathbf{H} = -(\mathrm{E}\mathbf{s})$$

$$\mathbf{H}\,\text{rot. E} - \mathrm{E}\,\text{rot. } \mathbf{H} = \text{div. } [\mathrm{E}\mathbf{H}]$$

$$\mathbf{H}\frac{d\mathrm{B}}{dt} + \mathrm{E}\frac{d\mathrm{D}}{dt} + \text{div. } [\mathrm{E}\mathbf{H}] = -(\mathrm{E}\mathbf{s}),$$

también en el otro caso :

$$\varphi\frac{d\rho}{dt} + \mathbf{s}\frac{d\mathbf{f}}{dt} + \text{div. } (\varphi\mathbf{s}) = (\mathrm{E}\mathbf{s})$$

y combinando por suma con la anterior :

$$\mathbf{H}\frac{d\mathrm{B}}{dt} + \mathrm{E}\frac{d\mathrm{D}}{dt} + \varphi\frac{d\rho}{dt} + \mathbf{s}\frac{d\mathbf{f}}{dt} + \text{div. } \{[\mathrm{E}\mathbf{H}] + (\varphi\mathbf{s})\} = 0;$$

de manera que deberá ser, por continuidad :

$$[\mathrm{E}\mathbf{H}] + (\varphi\mathbf{s}) = \mathrm{S}$$

$$\mathbf{H} \,.\, d\mathrm{B} + \mathrm{E} \,.\, d\mathrm{D} + \varphi d\rho + \mathbf{s}d\mathbf{f} = d\mathbf{W},$$

que da la diferencial total de energía. Mie toma ahora :

$$\mathbf{L} = \mathbf{W} - \mathrm{ED} - \rho\varphi,$$

que da por diferenciación, o variación :

$$\partial\mathbf{L} = \mathbf{H}\partial\mathrm{B} - \mathrm{D}\,.\,\partial\mathrm{E} + \mathbf{s}\,.\,\partial\mathbf{f} - \rho\partial\varphi,$$

y si ahora tenemos en cuenta las componentes de E, D, B y **H**, podemos formular la tensorial invariante :

$$\partial\mathbf{L} = \frac{1}{2}\mathrm{H}^{ik}\partial\mathrm{F}_{ik} + \mathbf{s}^{i}\,.\,\partial\varphi_{i},$$

como es fácil comprobar substituyendo índices. Esto demuestra que **L** es invariante y así

$$\int_{\mathrm{G}} \mathbf{L}dx$$

es una hamiltoniana estacionaria, y es la que contiene la teoría de Mie. Quedan así las diez funciones encerradas en una sola. De aquí el tensor mixto, fácil de comprobar substituyendo índices :

$$\mathrm{T}_{i}^{k} = \mathrm{F}_{ir}\mathrm{H}^{kr} + \varphi_{i}\mathbf{s}^{k} - \delta_{i}^{k}\mathbf{L}$$

siendo

$$\mathrm{T}_{ik} = \mathrm{T}_{ki}.$$

Nota de la Dirección. — Los originales de este trabajo fueron entregados a la Dirección de los *Anales de la Sociedad Científica Argentina* el 15 de noviembre de 1922. — *Julio R. Castiñeiras,* director.

ERRATAS AL PRECEDENTE TRABAJO

Es muy conveniente hacer estas correcciones, antes de proceder al estudio, para evitar posibles confusiones.

Página	Línea	Dice	Debe decir
52	9	$\bar{\xi}^i = \sum_k^n \alpha_k{}^i \xi^k$	$\bar{\xi}^i = \sum_k^n \bar{\alpha}_k{}^i \xi^k$
53	15	$\bar{\xi}_i = \left(\sum_k^n \xi^k e_i \,.\, e_k\right) =$	$\xi_i = \left(\sum_k^n \xi^k e_k \,.\, e_i\right) =$
53	20	$\xi_i = \sum_k^n g^{ik} \bar{\xi}_k$	$\xi_i = \sum_k^n g^{ik} \xi_k$
61	27	$u = \frac{dx}{dt}$	$u^i = \frac{dx_i}{dt}$
63	15	$2\xi^i u_i \xi_k$	$2\xi^i u_i{}^k \xi_k$
135	13	$\xi^i = g^{ik} \bar{\xi}_k$	$\xi^i = g^{ik} \xi_k$
135	14	$\xi_i = g_{ik} \bar{\xi}^k$	$\xi_i = g_{ik} \xi^k$
152	23	$\sum_k^n \frac{d\bar{f}_i}{d\bar{x}_k} d\bar{\bar{x}}_k$	$\sum_k^n \frac{d\bar{f}_i}{d\bar{\bar{x}}_k} d\bar{\bar{x}}_k$
153	1	pasando del infin. peq.	pasando al infin. peq.
155	37	$\chi_i = \varphi_i(r)$	$x^i = \varphi_i(r)$
158	1	$f^i = \frac{df}{dx_i}$	$f_i = \frac{df}{dx_i}$
162	14	$\frac{d\mathbf{w}_i}{dx_i} = \mathbf{w}$	$\frac{d\mathbf{w}^i}{dx} = \mathbf{w}$
178	7	$\frac{d\xi^i}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^i \xi^\alpha \frac{dx}{ds} = 0$	$\frac{d\xi^i}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^i \xi^\alpha \frac{dx_\beta}{ds} = 0$
192	6	$F^a{}_{bik} = F^{*a}{}_{bik} + \frac{1}{2} \partial f_b{}^a{}_{ik}$	$F^a{}_{bik} = F^{*a}{}_{bik} + \frac{1}{2} \partial_b{}^a \,.\, f_{ik}$
192	13	doblemente simétrico	doblemente levo-simétrico

Página	Línea	Dice	Debe decir
198	18	R por P	R por F
201	21	$(\varphi^i = 0)$	$(\varphi_i = 0)$
206	2 y 3	$d\mathbf{v}$	dV
214	22	$n = 1, 2, 3$	$m = 1, 2, 3$
233	9	$x_k \frac{dx}{ds}$, etc.	$x_k \frac{dx_i}{ds}$, etc.
257	5	$-\sum_{ik}^{n} x x_i \frac{dx_k}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds}$	$-\sum_{ik}^{n} x_i x_i \frac{dx_k}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds}$

INGENIERO SANTIAGO BRIAN

† el 24 de abril de 1923

NECROLOGÍA

INGENIERO SANTIAGO BRIAN

† el 24 de abril de 1923

Una vez más tócame la triste misión de despedir desde las columnas de los *Anales de la Sociedad Científica Argentina* a un consocio caído en la jornada fatal de la existencia.

El ingeniero Santiago Brian, a quien hacía apenas tres meses habíamos tenido el gusto de verle lleno de vigor físico e intelectual, formando parte de la Comisión de honor en el escenario del teatro Cervantes, en la histórica fiesta de nuestro cincuentenario social, celebrada en dicho coliseo, partió al poco tiempo para Mar del Plata, a pasar, como todos los años, su temporada de baños.

Allí le vi, a principios de marzo del corriente año, llamado por él con insistencia para cambiar ideas, me escribía, sobre algunos proyectos míos, referentes al Congreso sudamericano de ferrocarriles Allí le hallé, siempre estudioso, siempre laborioso, preocupado con decidido empeño con los problemas en cuya solución debe necesariamente intervenir la indicada institución ferroviaria internacional.

Al despedirme preguntéle:

— ¿Cuándo entiende Vd. volver a la Capital?

—Lo que es yo —contestóme — no lo haré hasta que el tiempo me eche de aquí...

No fué así. Al mal tiempo, sustituyó el morbo, traicionero por lo repentino. El cerebro de nuestro querido consocio y amigo, que tan vigorosamente vibrara en los largos años de su actuación intelectual en el campo de la labor profesional, provechosa por lo competente, constante y comunicativa, quedó de súbito paralizado, en forma tan

grave que a los pocos días, a pesar de los esfuerzos de la ciencia médica por salvarle, quedó vencido.

La ingeniería argentina perdía el 24 de abril próximo pasado a uno de sus representantes más destacados, especialmente en lo que atañe a la construcción y esplotación de ferrocarriles, que fueron su verdadera expecialidad; el país a uno de sus hijos más útiles; los colegas y amigos a un compañero afectuoso, reflejo, por lo demás, de sus virtudes en el propio hogar.

El ingeniero Brian formó parte del primer grupo de estudiantes de la incipiente Facultad de ciencias exactas, que consiguiera fundar el ilustre doctor Juan María Gutiérrez.

Doce fueron ellos, y por eso les denominaron los doce apóstoles.

Y la verdad es que el ingeniero Brian, como el ingeniero Huergo y otros más, fué un verdadero apóstol de la ingeniería nacional. Su entusiasmo por las matemáticas puras y aplicadas a la ciencia de la construcción le conquistó un puesto distinguido como estudiante; luego, la pasión por su carrera le infundió ese espíritu de observación tan necesario para entrar en el conocimiento práctico de la construcción, que es de tanta ayuda para el estudio y proyectación de las obras confiadas a la pericia de un ingeniero; y, por último, el interés por conocer el pensamiento y la obra de los viejos mentores, dentro y fuera del país, le creó justificada fama de competencia profesional, y fué indiscutiblemente reconocido como un sólido consejero técnico entre sus colegas y ante las autoridades del país.

Para justificar mi afirmación basta pasar revista de su actuación profesional.

Voy a hacerlo muy sucintamente.

El ingeniero Santiago Brian, oriundo de una familia oriental, nació en la provincia de Entre Ríos, el 9 de diciembre de 1849. Su familia le puso en uno de los más reputados establecimientos educacionales con que contara el país en aquellos lejanos tiempos, que tal lo era el *Colegio del Caballito,* fundado y dirigido en nuestra Capital por uno de los más meritorios maestros de entonces, en cuya fuente bebieron muchos de los que más tarde habían de figurar entre las personalidades más ilustradas de nuestra patria: me refiero al profesor don Salvador Negrotto, tan injustamente olvidado hoy.

De dicha escuela pasó Brian a la Universidad de Buenos Aires, matriculándose en la Facultad de ciencias exactas, en 1865, es decir,

cuando tenía 16 años de edad. Cinco años más tarde, en 1879, egresó de la misma, diplomado como ingeniero civil.

Comenzó su carrera como ayudante en la Oficina de puentes de la provincia de Buenos Aires, bajo la inmediata dirección del conocido ingeniero inglés don Juan Coghlan.

De allí pasó a formar parte, en 1873, del cuerpo de ingenieros del Ferrocarril del Oeste de la provincia de Buenos Aires, teniendo a su cargo el cuidado de la primera sección de esa ya importante línea.

En 1874 fué ascendido a ingeniero segundo en la misma; y dos años después, a ingeniero principal.

En 1879, el directorio del Ferrocarril del Oeste le envió a Europa en viaje de estudio. Cuando el ingeniero don Augusto Ringuelet, que desempeñaba el cargo de gerente del mismo ferrocarril, se retiró a Europa, el ingeniero Brian fué designado para ocupar el puesto que dejaba el ilustrado técnico mencionado.

Más tarde, decidido a abandonar la vida burocrática, el ingeniero Brian renunció, en 1886, tan elevado cargo, para dedicarse a la arquitectura, como director y constructor a la vez. Numerosas e importantes son las construcciones urbanas realizadas por nuestro consocio.

En 1891, cuando el gobierno de Buenos Aires cometió el craso error de enajenar el Ferrocarril del Oeste, la grande arteria del progreso de la provincia, el sindicato que lo adquirió, nombró al ingeniero Brian su representante legal en nuestra Capital, lo que prueba el alto concepto en que se le tenía. Este puesto lo ocupó, con unánime aplauso, durante veinticinco años, mereciendo de la empresa agradecida un valioso homenaje.

Y la verdad es que mucho abona en favor del ingeniero Brian el haber resistido durante un cuarto de siglo cumpliendo tan delicada misión, cual es la de ser argentino y deber conservarse en la línea neutral de lo ecuo y de lo justo, en la natural lucha de intereses del país y de la empresa que representaba, como lo hizo notar el doctor José A. Frías en su conceptuosa oración fúnebre pronunciada en el momento del sepelio del señor Brian, discurso que publicamos más adelante.

Confirma este aprecio general por las condiciones de competencia y de honestidad de nuestro lamentado consocio, el hecho de que otras empresas extranjeras, como el Ferrocarril Gran Sud de Buenos Aires, Buenos Aires y Rosario, Central Argentino, etc., le designaran miem-

bro de las comisiones locales de las mismas, cargos que llenó cumplidamente hasta hace pocos años.

Santiago Brian fué profesor en la Facultad de ciencias exactas; académico en la misma, y ocupaba últimamente la presidencia de la Academia.

En nuestra asociación fué socio desde los comienzos. Fué más tarde electo presidente de la misma, cargo que tuvo que renunciar por sus ocupaciones.

Fué socio también del Centro nacional de ingenieros, que le nombró luego, en unión con los ingenieros Guillermo White y Carlos C. Olivera, miembro honorario del mismo.

También era miembro del Instituto de ingenieros civiles de Londres; miembro honorario, elegido por aclamación, del Club de Engenharia de Río de Janeiro, y socio correspondiente del Instituto de ingenieros de Chile.

Sus últimas actividades fueron dedicadas a la importante institución « Congreso sudamericano de ferrocarriles », como dije al comenzar esta su corta reseña. Brian ocupó la presidencia de esta asociación internacional por más de diez años consecutivos.

En mi calidad de Secretario general de la misma, puedo aseverar que su dedicación personal fué constante y eficiente, como lo aseveró antes que yo el señor doctor Frías en su indicada oración fúnebre.

Brian contribuyó a formular en Río de Janeiro, coadyuvado eficazmente por los ilustres ingenieros brasileños Antonio Olyntho y Getulio das Neves, el programa de nuestro Segundo congreso sudamericano de ferrocarriles, que fué realizado con feliz éxito, del que nuestro consocio fué proclamado presidente honorario y en el cual hizo una descollante figura.

Damos a continuación los discursos pronunciados en el momento del sepelio.

Del doctor José A. Frías, presidente del « Congreso sudamericano de ferrocarriles »

Señores:

En nombre del Comité ejecutivo del Congreso sudamericano de ferrocarriles vengo a expresar el sentimiento intenso causado por el sensible fallecimiento del ingeniero Santiago Brian, presidente, hasta hace muy poco tiempo, de nuestra institución internacional.

No he de referirme a las virtudes que, desde su juventud, ornaron la personalidad de nuestro consocio y noble y leal amigo, ya como brillante alumno de la Facultad de ciencias exactas, ya como profesional, al recorrer toda la escala de los cargos que la ingeniería nacional le ofreciera. Otros dirán de su incansable actividad, de su dedicación a los altos estudios matemáticos, de su ponderado criterio, tantas veces demostrado en su larga actuación, que comenzara como ayudante en la Oficina de puentes de la provincia de Buenos Aires, para culminar en la presidencia de la Comisión local del Ferrrocarril del Oeste y en los directorios consultivos de los ferrocarriles del Sud, Central Argentino y ex Buenos Aires y Rosario, en cuyos puestos demostró la extensión de sus conocimientos, su tacto y su inteligencia.

En las constantes relaciones con las autoridades de la Nación y de las provincias, que el ejercicio de sus cargos le imponía, el ingeniero Brian, al par que defendía celosamente los intereses de las compañías que representaba, jamás olvidó los altos y permanentes intereses del país, esforzándose en armonizarlos, y siempre obtuvo la consecución de sus propósitos. Vinculó su nombre a las grandes obras públicas que en materia ferroviaria se han ejecutado en los últimos cuarenta años, y, en todo momento, usando prudentemeute de sus grandes condiciones de carácter, salvó asperezas, suavizó roces inevitables y supo mantenerse siempre dentro de la imparcialidad, la equidad y la justicia, situación de espíritu que sólo hombres superiores pueden alcanzar.

Pero, lo que sobre todo deseo manifestar, no sólo por la representación con que he sido honrado, sino más bien para sacarla de la penumbra que para la generalidad de sus conciudadanos la rodea, es su notable actuación en el Segundo Congreso sudamericano de ferrocarriles, celebrado en Río de Janeiro en septiembre del año anterior, con ocasión del centenario de la independencia del Brasil. El ingeniero Brian preparó, en forma realmente eficiente, la realización del referido certamen, al que concurrió con la energía y el entusiasmo que lo caracterizaban, prestando a los distinguidos consocios del Brasil, encargados por el gobierno de esa nación amiga de la organización del congreso, el valioso concurso de su experiencia, a los fines de rodearlo del prestigio que correspondía, dada la naturaleza e importancia de los puntos a tratarse, insertos en su pragrama. Fuí testigo de la laboriosidad desplegada por el ingeniero Brian, no sólo en los actos preparatorios dal congreso, sino viéndolo también asistir asiduamente a las diversas comisiones formadas para el estudio de los distintos te-

mas, haciendo, con amplios conocimientos, exposiciones teóricas y prácticas de verdadero mérito sobre la mayoría de las materias, siendo escuchado siempre con respeto y admiración por los delegados de las naciones amigas que concurrieron a esa asamblea ferroviaria sudamericana.

Esos esfuerzos del ingeniero Brian, en pro de la realización del Segundo Congreso, al que dedicó sus últimos años, fueron coronados por el éxito más completo y consagrados por el aprecio y consideración que las distintas delegaciones le expresaron, en especial el Club de ingeniería del Brasil — institución científica íntimamente vinculada al desenvolvimiento de esa nación, — el cual, después de otras muchas demostraciones del alto concepto que de sus relevantes condiciones había formado, lo designó miembro honorario, distinción que sólo se confiere a las personas que hubieren prestado relevantes servicios a la ingeniería y a la industria.

Es, pues, por muchos motivos, justo el pesar que embarga a los miembros del Comité ejecutivo del Congreso sudamericano de ferrocarriles y a los adherentes a esa institución; y, al dejar cumplido el honroso encargo que de ella he recibido, debo agregar que igualmente las compañías de ferrocarriles argentinos se asocian al duelo público causado por la pérdida que para el país y para ellas representa la desaparición del señor Brian, quien, no obstante su alejamiento de los negocios públicos, continuaba consagrándoles todo el concurso de su inteligencia y de su probidad, haciéndoles llegar, en los momentos difíciles, los consejos de su vasta ilustración y prolongada experiencia.

Señores: Hombres del carácter y temple moral del señor Brian deben servir de ejemplo y de estímulo a las generaciones futuras; el vacío que deja es inmenso, pero no dudo que su espíritu continuará iluminando el sendero que debemos recorrer, aquellos a quienes nos ha tocado sucederle en su larga y proficua labor.

He dicho.

Del ingeniero Enrique Sabaria, presidente del Centro nacional de ingenieros

Señores:

El Centro nacional de ingenieros pierde con el ingeniero Santiago Brian uno de sus socios más conspicuos y estimados. La nómina de sus miembros honorarios recibe rudos golpes; ayer el ingeniero Olivera, hoy Brian.

Quien rememore la historia de nuestros ferrocarriles, encontrará a cada paso la acción eficiente del distinguido profesional que siempre, con inagotable tesón, marca en cada etapa, un progreso, una evolución, para el desarrollo gigantesco de aquel medio de comunicación que nos ofrece el hermoso espectáculo de la transformación paulatina de las antiguas tolderías en florecientes campos de progreso y civilización.

¿Cómo no admirar lo que significa la actuación del profesional que, en épocas remotas y difíciles, contribuye con toda energía al desarrollo de nuestra incipiente ingeniería, que colabora en forma prominente al progreso de nuestro país? Señores, la ingeniería argentina tenía en Santiago Brian, un representante que la honraba; que su ejemplo sirva de guía a nuestros profesionales, que él sirva de acicate en los momentos rudos de la labor diaria, tratando en todo momento de mantener alto el precioso legado de experiencia y laboriosidad que nos deja nuestro apreciado consocio y distinguido ingeniero.

Hacer la biografía de Brian es tarea que, con todo respeto, dejo a cargo de más autorizados que yo. Olvidar una sola de las actuaciones del eminente ingeniero, ya en los distintos puestos que desempeñara, ya en las obras en que intervino con tanto acierto, sería dejar en olvido un precioso eslabón de su vida, tan fecunda por más de un concepto.

Brian era infaltable a las reuniones de nuestro Centro, cuando se debatían asuntos difíciles y delicados; su presencia infundía en todos esa confianza que se experimenta al lado de aquellas personas que han palpado día a día las dificultades inherentes a la solución de los problemas de nuestra profesión. Ello hace, señores, que siempre estará con nosotros el recuerdo de su personalidad, como ejemplo de labor, energía y honestidad profesionales.

Hay, en estas circunstancias, dolores que las palabras no alcanzan a amenguar; es hacia ellos que van nuestros más íntimos deseos, para su justo y merecido lenitivo.

Querido consocio: recibe por mis labios el adiós de los que fueron, en el Centro nacional de ingenieros, tus consocios y colegas.

Del señor A. F. Lértora

Señores:

En nombre de la empresa del Ferrocarril Oeste de Buenos Aires, cuya presidencia del directorio local ejerzo, vengo a dar la postrer

despedida al ingeniero Santiago Brian, que por tantos años estuvo vinculado a esta entidad de progreso y a la que prestó relevantes e inapreciables servicios.

Brian pertenecía al primer grupo de ingenieros argentinos, lanzados a la lucha por la naciente escuela de Buenos Aires, hace poco más de cincuenta años. Su larga carrera de obrero de la grandeza nacional no tiene interrupciones: comienza como ingeniero constructor de vías férreas en 1872, buscando en las desiertas llanuras del oeste y del sur de la provincia de Buenos Aires, nuevas rutas para extender el riel civilizador, y cuando las encuentra sólo colma su afanoso empeño la realización plena de la obra emprendida. Y así, uno tras otro, fuéronse eslabonando los trozos del gran sistema de ferrocarriles iniciado en 1857 por un grupo de patriotas y completado más tarde en su desarrollo por el gobierno de Buenos Aires. Al estudio y construcción de gran parte de esa red prestó Brian durante quince años su inteligente y eficaz concurso, ascendiendo paso a paso todas las posiciones: ingeniero de sección, ingeniero principal y, por último, gerente.

Desde 1890 la acción de Brian se desenvuelve en otra forma, aunque en la misma esfera de actividad. Representante de capitales extranjeros que radicaron su inversión en ferrocarriles argentinos, él consagra su inagotable y concienzudo esfuerzo a propiciar nuevas extensiones, que incorporaran a la vida económica de la nación, regiones que aún permanecían improductivas por falta de medios de transporte. En esa brega, sus propósitos alcanzaron el resultado que más pudo halagar su acendrado patriotismo: vió que los ferrocarriles Oeste, Sud y Rosario, a cuyos directorios pertenecía, duplicaron su extensión en menos de veinte años.

La obra del ingeniero Brian, no obstante su extensión, está en su mayor parte consagrada al desarrollo del Ferrocarril del Oeste. Este organismo, que él vió crecer paso a paso, fué escuela de trabajo tesonero y sin fatiga, donde comenzó como alumno y terminó como maestro. Analizar la tarea realizada por Brian en el Ferrocarril del Oeste, significaría escribir la historia de su desenvolvimiento en los últimos cuarenta años.

Es para mí un motivo de hondo pesar, que su desaparición haya coincidido con un acontecimiento que habría hecho vibrar los más puros sentimientos de su afecto: me refiero a la próxima inauguración oficial del servicio eléctrico del Ferrocarril del Oeste, obra que él propició por muchos años con infatigable empeño.

Su preocupación constante fué el engrandecimiento y prosperidad

dal Ferrocarril del Oeste, y nada habría contribuído a hacer más gratos los últimos días de su existencia, como ver realizadas las obras de progreso que en breve incorporaremos definitivamente.

Por fortuna cúpole en vida ver, en parte, premiada su labor con el homenaje que los pueblos tributan a sus buenos servidores: la perpetuación de su memoria ligada a una obra pública que él había gestionado: el dique de cabotaje construído al costado norte del Riachuelo, denominado por decreto del gobierno nacional de 1907, Dique Ingeniero Brian.

Con la desaparición del ingeniero Brian pierde la República uno de sus hombres eminentes. Eminente por los servicios que prestó al desarrollo de la riqueza pública argentina, eminente por el claro ejemplo de virtudes ciudadanas que ofreció en su larga carrera, y eminente también por la austeridad y patriotismo que puso de manifiesto en el desempeño de las funciones públicas y de las actividades de orden privado.

Que las nuevas generaciones argentinas se encarguen de realzar su memoria.

Del doctor Horacio Damianovich

Señores:

En nombre de la Academia de ciencias exactas, físicas y naturales y vista la imposibilidad de su presidente doctor Eduardo Holmberg de asistir al acto, hago uso de la palabra en estos momentos penosos, en que vemos desaparecer de la esfera de la actividad pública a un hombre como Santiago Brian, tan lleno de las virtudes que enaltecen al noble caballero y las excelsas cualidades que dan realce a una verdadera personalidad.

No me corresponde trazar aquí ni siquiera la síntesis de los frutos de su larga y meritoria carrera profesional.

Sólo quiero hacer notar en este instante solemne, que el señor Brian puso todos sus empeños para hacer de nuestra Academia un verdadero foco de cultura superior, con la firme convicción de que esta clase de instituciones están destinadas en la actualidad y, con mejor razón, en un futuro no lejano, a robustecer la obra de investigación científica, tan necesaria en nuestro medio y el adelanto técnico y cultural de nuestro país, lleno de vida y legítimas aspiraciones.

En esta fase de su importante obra, Brian era un soñador y un idealista, que se remontaba a ratos a las atrayentes regiones de la

abstracción, sin dejar por ello de tener a cada instante íntimo contacto con la realidad práctica y los múltiples problemas que con rudeza nos presenta la vida diaria.

Ahí están las actas de nuestra Academia para atestiguar su labor proficua y silenciosa en la que no desmayaba aún en los momentos más difíciles. Sería ocioso entrar en los detalles de esta obra, ya que la Academia ha resuelto dedicar una sesión especial para tributarle en forma amplia el homenaje merecido. Está en la mente de todos los que con él hemos colaborado, el llevar a cabo en forma práctica este homenaje que consistirá, ante todo, en seguir su hermoso ejemplo, llevando a la institución que con tanto cariño dirigió, a la altura que le corresponde.

Señores: al recto caballero, al hombre generoso y noble, al útil y superior propulsor de la técnica y cultura de nuestro país, la Academia ofrece su más sentido tributo, poniendo su nombre, como lema de actividad y nobleza, ante la mirada idealista de la juventud que anhela el adelanto de nuestra generosa y progresista nación.

Del señor Avelino Rolón

Señores:

El pueblo de San Isidro, que goza de una tradición de cultura y patriotismo, ha tenido en el ingeniero Santiago Brian, un colaborador infatigable en las grandes obras de beneficiencia que allí se han realizado.

En ellas ha desarrollado una labor tan destacada y constante que es un deber de conciencia tributarle el homenaje más justiciero de gratitud.

En el Nuevo templo parroquial, en el Colegio Carmen Arriola de Marín, y en la Escuela de artes y oficios Doctor Juan Segundo Fernández, que representan valiosos intereses sociales, el ingeniero Brian prestó el concurso del talento y competencia profesional, pudiendo decirse que su opinión se imponía a nuestra consideración y servía de norma por lo inteligente y acertada.

Era de ver, señores, la perseverancia y preferente atención que el ingeniero Brian dedicaba a esas obras, para conseguir que se pudieran obtener los mayores beneficios que se habían propuesto sus iniciadores.

Y toda esa labor inmensa la llevó a cabo, inspirado por sus sentimientos patrióticos y de caridad, silenciosamente, sin ostentación ni

alarde. Por eso es de justicia, en el momento de la última despedida, presentar a la consideración pública y en particular, del pueblo de San Isidro, los méritos sobresalientes del ingeniero Brian, al servir con tanto empeño y desinterés en esas grandes instituciones de cultura y educación a que me he referido. En nombre de sus compañeros de tareas, cumplo con el penoso deber de expresar nuestras sinceras condolencias, pidiendo a Dios su eterno descanso.

Ahora, sólo me resta reiterar a la distinguida señora doña María Gómez de Brian, así como a los demás deudos, las condolencias generales de la Sociedad Científica Argentina y las mías propias, deseando que el tiempo pueda ejercer en ellos su acción de paz...

S. E. Barabino.

Mayo de 1923.

ÍNDICE GENERAL

DE LAS

MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO NONAGÉSIMOQUINTO

JAIME MULHALL, Densificación infinitesimal. Harmonización tensorial. Filosofía y digresiones matemáticas :

Ab initio 5
Ideas fundamentales 6
Digresión 0 : Generalidades 7
Capítuio I : Determinantes 16
Digresión 0.4 : Una advertencia oportuna. Órdenes de magnitudes 28
Capítulo II : Espacio euclideano 32
Capítulo III : Transformaciones lineales 37
Digresión 0.5 : Definiciones y filosofía 46
Digresión 0.55 : Definiciones 48
Capítulo IV : Tensores 50
Capítulo V : Tensores. Ejemplos 60
Digresión 0.556 : Repetición 69
Capítulo VI : Simetría de tensores 71
Tensiones 82
Digresión 0.56 : Repetición *ad nauseam* 91
Digresión 0.565 : La densificación 93
Digresión 0.5655 : La repetición 97
Resumen 100
Capítulo VII : Geometría infinitesimal. Cálculo tensorial 104
Curvatura 114
Digresión 0.57 : Velocidad infinita. Hamiltoniana luminosa 120
Digresión 0.58 : La luz 125
Digresión 0.59 : La invariante (c) como densidad tensorial 127
Digresión 0.60 : Matemáticas 128
Digresión 0.61 : La reciprocidad 130
Digresión 0.615 : Especulación matemática 131
Digresión 0.62 : Composición recíproca 135
Digresión 0.635 : Percepciones. Focalizaciones 136
Digresión 0.6355 : Manchas solares. Eclipses por aferencia 139
Digresión 0.636 : Relaciones proyectivas y métricas 141

Digresión 0.64 : La solución 144
Capítulo VIII : El *continuum* 148
Capítulo IX : Curvatura vectorial 177
Capítulo X : Campo métrico 184
Capítulo XI : Cálculo tensorial 193
Capítulo XII : Trayectorias geodésicas. Función hamiltoniana 200
Digresión 0.65 : La teoría de Mie 204
Digresión 0.66 : Número 207
Digresión 6.67 : ¿Por qué la repetición es invariante como la curvaturra? 212
Digresión 0.675 : Repitiendo 220
Digresión 8.68 : Especulación pura 222
Digresión 0.69 : Curvatura espacial esférica 224
Digresión 0.70 : Einstein 226
Digresión 0.71 : Curvatura espacial. Espacios esféricos 227
Digresión 0.72 : La materia 229
Digresión 0.73 : Tensores. Propagaciones. Luz blanca 236
Digresión 0.735 : Punto 240
Capítulo XIII : Filosofía pura liviana 244
Resumen 249
Capítulo XIV : Simetría cerebral. Forma cuadrática pitagórica y dos lóbulos. Forma bicuadrática y cuatro lóbulos 251
Digresión δ : Cuerpo humano 256
Miscelánea. Filosofía corriente 262
Estática 262
Viento 263
Religión 265
Atracción 265
Evolución 267
Apéndice : La repetición y el teorema Einstein-Lorentz 268
Teoría de Mie 274
Erratas 277

NECROLOGÍA : Ingeniero Santiago Brian, fallecido el 24 de abril de 1923, por S. E. Barabino 279

SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

SOCIOS HONORARIOS

Dr. Pedro Visca †.
Dr. Mario Isola †.
Dr. Germán Burmeister †.
Dr. Benjamín A. Gould †.
Dr. R. A. Philippi †.
Dr. Guillermo Rawson †.
Dr. Carlos Berg †.
Dr. Valentín Balbín †.
Dr. Florentino Ameghino †.
Dr. Carlos Darwin †.
Dr. César Lombroso †.
Ing. Luis A. Huergo †.
Ing. Vicente Castro †.
Dr. Juan J. J. Kyle †.
Dr. Estanislao S. Zeballos.
Dr. Walther Nernst.
Dr. Eduardo L. Holmberg.
Ing. J. Mendizábal Tamborel.
Ing. Guillermo Marconi.
Dr. Enrique Ferri.
Dr. Carlos Spegazzini.

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar, Rafael ..... México.
Arteaga, Rodolfo de ..... Montevideo.
Alfonso, Paulino ..... Sgo. de Chile.
Ballvé, Horacio ..... I. de Año N.
Bodenbender, Guillermo.. Córdoba.
Bolívar, Ignacio ..... Madrid.
Bonarelli Guido..... Ancona (It.).
Bertoni, Moisés..... P. Bertoni (P.).
Bailey, Willis..... Washington.
Bruce, William ..... Edimburgo.
Cabrera, Blas..... Madrid.
Carvalho, José Carlos.... Río Janeiro.
Corti, José S..... Mendoza.
Crinin, Demetrio..... Petrogrado.
Delage, Yves ..... París.
Fontana, Luis Jorge ..... San Juan.
Fuenzalida, José del C... Sgo. de Chile.
Guignard, León..... París.
Guimarães, Rodolfo ..... Amadora (P.).
Gez, J. W..... Corrientes.
Gjertsen Hjalmar, Fredik. Noruega.
Kinart, Fernando ..... Amberes.
Lillo, Miguel..... Tucumán.
Luiggi, Luis ..... Roma.
Lugo, Américo..... Sto. Domingo.
Lobo, Bruno..... Río de Janeiro.
Lorin, Henri..... Burdeos.
Morandi, Luis ..... Villa Colón (U).
Moore. Clarence..... Filadelfia.
Moretti, Cayetan
Martinenche, E
Moore, Jo
Montané
Medina,
Montessu
Nordensk
Nilsen F
Olyntho
Paterno
Patrón,
Porter, Ca
Pena, Ca
Poirier,
Pérez Vera
Pi y Suñer,
Prestrud, Ch
Reid, Walter
Rey Pastor Ju
Risso Patrón,
Reiche, Carlos .
Sklodonska, Cur
Shepherd, Willia
Tobar, Carlos R.
Torres Quevedo,
Uhle, Max.....
Villareal, Federic
Von Ihering, Herr
Volterra, Vito ..

SOCIOS ACTIVOS

Adamoli, Pedro A.
Adamoli, Santos S.
Aguirre, Pedro.
Albarracín, Carlos M.
Aldunate, Julio C.
Almanza, Felipe G.
Allende, César T.
Anasagasti, Horacio.
Amadeo, Tomás.
Amavet, Alejo D.
Ameghino, Carlos.
Anchorena, Juan E.
Anastasi, Camilo.
Añón Suárez, Vicente.
Arrillaga, Francisco C.
Arroyo, Rufino.
Aráoz Alfaro, Gregorio.
Arce, Manuel J.
[illegible]lvio J.

Brian, Santiago.
Briano, Juan A.
Bruch, Carlos.
Buadá y Morant, Antonio.
Bullrich, Jorge M.
Bunge, Carlos.
Bunge, Juan C.
Butty, Enrique.
Cabred, Roberto G.
Camus, Nicolás.
Candioti, Marcial R.
Canale, Humberto.
Cano, Héctor M.
Carrea, Juan U.
Canónica, Mauricio.
Carabelli, Juan José.
Carbone, Esteban.
Carbonell, José.
Caride Massini, Pedro.
Carette, Eduardo.
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Chanourdie, Enrique.
Chelia, Francisco.
Chiappe, Antonio R.
[illegible]iar[illegible] [illegible]uardo.
[illegible] [illegible]rdo E.
[illegible]no.
[illegible]n. [illegible].
[illegible]in. Diego T. R.
[illegible]ugniot, Carlos L.
[illegible]na, Andrés.
[illegible]i, Pablo.
[illegible]tchet, Luis.
[illegible]ñi, Orlando P.
[illegible]anovich, Horacio.
[illegible]ier, Juan A.
[illegible]ssen, Claro C.
[illegible]asso, Ricardo L.
Debenedetti, José.
Debenedetti, Salvador.
Delétang, Luis.
Delfino, Juan Carlos.
Dellepiane, Luis J.
Demarchi, Marco.
Díaz, Emilio C.
Doello-Jurado, Martín.
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Duclout, Jorge.
Ducluzaud, Adhemar.

Duhau, Luis.
Duncan, Carlos D.
Dupont, Enrique.
Durrieu, Mauricio.
Eiriz, Rogelio.
Elia, Hector de.
Escudero, Antonio.
Esteves, Luis P.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández, Miguel.
Figini, Ángel.
Flores, Emilio M.
Font, Jaime.
Franceschi, Edmundo.
Frenguelli, Joaquín.
Gallego, Alejandro.
Galtero, Alfredo.
Gallardo, Ángel.
Gallo, Abelardo.
Garay Ponce, Filemón.
García, Ricardo S.
Gerardi, Donato.
Ghigliazza, Sebastián.
Girado, Francisco J.
Girado, Alejandro.
Giusti, Leopoldo.
González, Juan B.
Gradin, Carlos.
Grieben, Arturo.
Groeber, Pablo.
Gurewitsch, Marco.
Gutiérrez, Avelino.
Gutiérrez, Ricardo J.
Hauman, Lucien.
Hermitte, Enrique.
Herrera Vegas, Marcelino.
Hicken, Cristóbal M.
Hoxmark, William.
Hoyo, Arturo.
Huergo, Eduardo.
Huergo, José M.
Ingenieros, José.
Ivanissevich, Ludovico.
Iturbe, Miguel.
Izagnirre, Salvador T.
Jacobacci, Jaime.
Kraglievich, Lucas,
Krause, Julio.
Kirchhoff, Federico.
Laclau, Narciso C.
Labarthe, Julio.

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA

ARGENTINA

DIRECTOR : INGENIERO JULIO R. CASTIÑEIRAS

JULIO-AGOSTO 1923. — ENTREGAS I-II. TOMO XCVI

ÍNDICE

Memoria anual del presidente de la Sociedad Científica Argentina, ingeniero Santiago E. Barabino 5
OTTOMAR SCHMIEDEL, Del pasado de nuestra tierra 31
SPEGAZZINI CARLOS, Breves notas cactológicas 61
F. DE BASALDÚA, La catástrofe glacial 76
MARTINIANO LEGUIZAMÓN PONDAL, La teoría de Darwin y las industrias de fermentación 83
Una distinción 88
Conferencias 89
Biblioteca de la Sociedad Científica Argentina 94

BUENOS AIRES
IMPRENTA Y CASA EDITORA «CONI»
684, PERÚ, 684

1923

SMITHSONIAN INSTITUTION
FEB 9 1927
NATIONAL MUSEUM

JUNTA DIRECTIVA

(1922-1923)

Presidente	Ingeniero **Santiago E. Barabino.**
Vicepresidente 1º	Doctor **Nicolás Lozano.**
Vicepresidente 2º	Doctor **Raimundo Wilmart.**
Secretario de actas	Doctor **Rogelio A. Trelles.**
Secretario de correspondencia	Doctor **Reinaldo Vanossi.**
Tesorero	Ingeniero **Edmundo Parodi.**
Protesorero	Ingeniero **Juan Blaquier.**
Bibliotecario	Ingeniero **Juan José Carabelli.**
Vocales	Ingeniero **Antonio Paitoví.** Ingeniero **Manuel J. Arce.** Doctor **Salvador Debenedetti.** Ingeniero **Julio R. Castiñeiras.** Ingeniero **Ferruccio A. Soldano.** Doctor **Atilio A. Bado.** Profesor **Juan Nielsen.** Ingeniero **Evaristo V. Moreno.**
Gerente	Señor **Juan Botto.**

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los *Anales (personalmente responsables de la tesis que sustentan en sus escritos)* que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos deben solicitarlo por escrito. Por mayor número de ejemplares deberán entenderse con la Casa editora « Coni ». Tienen, además, derecho a la corrección de dos pruebas. Los manuscritos, correspondencia, etc., se enviarán a la Dirección, **Cevallos, 269.** — La Dirección.

PUNTOS Y PRECIOS DE LA SUBSCRIPCIÓN ADELANTADA

Local de la Sociedad, Cevallos 269 (abierto de 8 a 10 y de 15 a 23), y principales librerías

	$ m/n		$ m/n
Por mes	**1.00**	Número atrasado	**2.00**
Por año	**12.00**	Número atrasado para los socios	**1.00**

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA

ARGENTINA

DIRECTOR : INGENIERO JULIO R. CASTIÑEIRAS

TOMO XCVI

Segundo semestre de 1923

BUENOS AIRES
IMPRENTA Y CASA EDITORA « CONI »
684, PERÚ, 684

1923

MEMORIA ANUAL

DEL PRESIDENTE DE LA SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA
Ingº SANTIAGO E. BARABINO

CORRESPONDIENTE AL QUINCUAGÉSIMO PERÍODO ADMINISTRATIVO
(1º DE ABRIL DE 1922 A 31 DE MARZO DE 1923)
LEÍDA EN LA ASAMBLEA DEL 13 DE ABRIL DE 1923

Señores consocios:

De conformidad con el artículo 19, inciso 9º del reglamento, cumplo con el deber de informaros sobre la actuación y el estado de la Sociedad desde el 1º abril de 1922 hasta el 31 de marzo de 1923, que corresponde al Lº período administrativo, con el cual termina, a la vez, mi misión presidencial en nuestra asociación.

Antes de entrar a detallar la labor realizada por la Junta directiva, voy a manifestaros que durante este período histórico para nuestra institución, puesto que en él se cumplió el primer cincuentenario de la misma, se han realizado actos de real importancia que espero constituirán verdaderas piedras miliares para el progreso de la Sociedad Científica Argentina.

EDIFICIO SOCIAL

En mi memoria anterior (XLIXº período) os dí cuenta del estado de las gestiones que perseguíamos ante el honorable Concejo Deliberante de esta Capital para la obtención de un terreno adecuado para erigir en él un nuevo edificio social, y os decía que, dados los fundamentos de nuestra petición era de presumir que el honorable Concejo resolviera favorablemente nuestro pedido de canje del terreno insufi-

ciente que nos concediera el señor intendente, doctor Llambías, por otro más amplio.

Las vacaciones del honorable Concejo, los asuntos ciertamente de mayor interés para éste que ocuparon su atención, el pase de nuestra solicitud de la Comisión de Previsión y Asistencia social a la de hacienda, demoraron la resolución definitiva del Concejo; pero debo, y lo hago con placer, manifestar que tanto el señor doctor Roberto F. Giusti, presidente de la primera, cuanto el señor doctor Juan José Díaz Arana, presidente de la segunda, como también el señor concejal doctor Leonardo O. Costas, han procedido siempre con marcada deferencia hacia nuestra asociación. Aquí corresponde exteriorizar también nuestra gratitud al señor intendente doctor Joaquín Llambías que nos hizo la primer concesión.

Una dificultad que parecía insuperable era la de determinar un terreno municipal que pudiera substituir al concedido por el intendente doctor Llambías, en condiciones de satisfacer las más estrictas necesidades de nuestra Sociedad.

Las notas que van a continuación permiten seguir la marcha de nuestra gestión.

Buenos Aires, septiembre de 1921.

Señor doctor Roberto F. Giusti, presidente de la Comisión de Previsión y Asistencia social.

Distinguido señor concejal :

En mi carácter de presidente de la Sociedad Científica Argentina, me es grato manifestar a Vd. lo siguiente :

Que me he impuesto del estado en que se halla el expediente nº 46950 que actualmente se halla a resolución del honorable Concejo Deliberante, y sobre el cual debo hacer las siguientes aclaraciones :

1ª Como consta en el mismo, la Sociedad Científica Argentina solicitó de la Intendencia municipal, y por un plazo prudencial, un solar adecuado para la erección en él, con destino al fomento de la alta cultura nacional, de un edificio social que ofreciera a los hombres de ciencia de nuestro país una casa propia y apropiada a sus actividades. El local que poseemos actualmente no satisface ya a la capacidad, ni a la importancia adquirida por la Sociedad Científica Argentina, por esto su Junta directiva requirió el solar indicado ; aceptando, sin conocerlos, los términos de la concesión a la Asociación Médica Argentina. El señor intendente municipal, doctor Llambías, hallando atendible nuestra solicitud la resolvió en sentido favorable, pero sin consultarnos como creímos ocurriría, pues nosotros no indicábamos el solar.

Esto ha dado lugar a que el concedido sea más pequeño aún que el que poseemos, esto es, insuficiente, y que el plazo fijado sea precario para nnestra asociación, dado su carácter exclusivamente altruísta, y no de interés gremial, como el que se tomó de norma.

2ª Como la concesión indicada se ha realizado precisamente fundándose en la utilidad pública de la Sociedad Científica Argentina, teniendo presente, por una parte, la necesidad moral, y aun material de la misma, en sus efectos, y, por la otra, la conveniencia de que la intelectualidad nacional posea un local social, no lujoso, pero sí cómodo y decente, donde pueda celebrar sus sesiones públicas, y, más aún, en este sentido, de *que los hombres cultos que vienen de todas partes del mundo civilizado a nuestro país,* con el fin de promover un provechoso intercambio intelectual, en sus diversas manifestaciones artísticas, científicas e industriales (lo que constituye el mandato de nuestro Estatuto social), hallen un ambiente digno, tanto de su propia cultura cuanto de la de nuestra gran Capital; teniendo presente, decía, todo esto, no puede modificar el alto criterio del honorable Concejo Deliberante el que la concesión sea algo más amplia de lo acordada, puesto que debe satisfacer a su objetivo, tanto más que no se trata de una *donación,* sino de una generosa prestación, la que nos obligará a invertir para su debido aprovechamiento una suma de dinero, siempre muy ingente para asociaciones de hombres de estudio, que persiguen el bien colectivo y no intereses personales o gremiales.

3ª Concretando estos fundamentos, señor Presideute, me permito solicitar del honorable Concejo : *a)* Que se permute el pequeño solar designado por el señor intendente doctor Llambías por otro, situado en las mismas condiciones, indicando al efecto la propiedad sita en la calle Santa Fe, número 1445/7, compuesto de $13^{m}86 \times 47^{m}61$, el cual, aún sin tener las dimensiones que requiriría nuestra institución, nos permitirá desenvolvernos por ahora superponiendo pisos ; *b)* Que se extienda el plazo de concesión a 99 años, dado que la Sociedad entiende invertir íntegramente el capital que posee actualmente, el valor de su local actual, que puede estimarse en unos 50.000 pesos, pero que aumentará con los recursos que tratará de conseguir del apoyo privado.

Saludo muy atentamente al señor concejal.

S. E. Barabino,
Presidente.

Reinaldo Vanossi,
Secretario.

Buenos Aires, mayo 26 de 1922.

Al señor presidente de la Comisión de Hacienda del honorable Concejo deliberante, doctor Juan José Díaz Arana.

En mi carácter de presidente de la Sociedad Científica Argentina, en el expediente número 46950, letra S, año 1919, pasado por la Intendencia municipal a estudio y resolución del honorable Concejo Deliberante, expongo :

Que solicité del señor Intendente municipal, en representación de la Sociedad Científica Argentina, la cesión condicional de un terreno aparente para levantar en él un edificio que permitiera desarrollar con mayor eficacia nuestra útil acción cultural, creando un local, aunque modesto, más amplio y más decente que el que poseemos, para poderlo ofrecer a nuestros consocios, a nuestros colaboradores, y a los hombres de ciencia extranjeros que nos honren con su visita, un local adecuado para que den en él sus conferencias científicas ; y donde las demás asociaciones congéneres, que carezcan de local propio, puedan usufructuarlo, como lo han hecho hasta hoy en nuestro viejo y estrecho edificio social.

Que, de acuerdo con nuestra solicitud y previo los trámites de práctica, el señor intendente municipal, doctor Joaquín Llambías, resolvió favorablemente nuestra petición, concediéndonos un terreno, desgraciadamente insuficiente por su extrema pequeñez, pues es más reducido que nuestro actual local ; error debido a haberlo fijado sin consultar previamente a la Sociedad peticionante.

Que, en consecuencia, estando el expediente indicado a resolución del honorable Concejo, me ví obligado a solicitar del mismo, el cambio de dicho terreno por otro que pudiéramos utilizar en forma eficaz ; tarea que nos fué dificultada por el desconocimiento de los aún disponibles, hasta que se nos indicó y solicitamos uno que, si bien tenía la amplitud conveniente, nos dimos cuenta de que resultaba oneroso para el Municipio e imposible de aprovecharlo para nuestra asociación.

Que, convencidos de ello, hicimos nuevas indagaciones y hallamos el que hemos solicitado en nota dirigida al señor presidente de la Comisión de Previsión, a cuyo estudio estaba entonces nuestra petición, a fines de diciembre de 1921, situado en la calle Santa Fe, lindando casa por medio, con el concedido por el honorable Concejo y la Intendencia, a la Asociación Médica argentina.

Por tanto : Vengo a solicitar del honorable Concejo el *cambio* del terreno que nos concedió la Intendencia, por el que dejamos indicado, situado como ya dijimos en la calle Santa Fe número 1137, concesión con la que el honorable Concejo Deliberante premiaría nuestra larga y — me permito decir —

fecunda labor científica, y contribuirá a la vez, a celebrar con su generoso acto de justicia nuestro primer cincuentenario social, que se cumple el 28 de julio próximo. Aunque la actuación de la Sociedad Científica Argentina es ciertamente conocida por el honorable Concejo Deliberante, me permito anexar a esta nota una síntesis somera, pero fehaciente, de la labor realizada por nuestra institución de alta cultura general en sus cincuenta años de existencia; habiéndole cabido el honor de iniciar el movimiento científico nacional y de haber dado vida a otras instituciones científicas que en ella germinaron.

Saludo al señor presidente con mi más alta consideración.

S. E. Barabino,
Presidente.

Reinaldo Vanossi,
Secretario.

Nuestras esperanzas no quedaron defraudadas. El Concejo Deliberante nos concedió el terreno situado en la calle Santa Fe número 1137/45.

Cumplo con el deber de hacer resaltar el valioso concurso que en esta emergencia me prestó el señor vicepresidente 1°, doctor Nicolás Lozano, el que agradezco públicamente en este acto.

Concedido el terreno y escriturado con fecha 8 de noviembre de 1922, se nos dió posesión del mismo el 10 de enero del corriente año.

La Junta directiva para conservarse dentro de los términos de la concesión municipal, designó de su seno una comisión compuesta por los consocios ingenieros Antonio Paitoví, Edmundo Parodi y Julio R. Castiñeiras, para que corriera con lo pertinente a la proyectación y realización del edificio social.

Para el proyecto se solicitó el concurso generoso de nuestros consocios, y, si bien muchos se ofrecieron, sólo se presentó el señor ingeniero Oscar Schoo Lastra, con un meditado proyecto, el cual fué sometido al estudio de la comisión mencionada. Ésta informó que con pequeñas modificaciones satisfacía a las condiciones de comodidad, economía y estilo indicados por la Junta directiva.

El señor ingeniero Schoo Lastra, acaba de formular el proyecto definitivo, el cual ha sido elevado a la aprobación de la Intendencia municipal. Creo excusado decir que la Sociedad debe al señor

ingeniero Oscar Schoo Lastra un voto de aplauso como agradecimiento por la generosa actitud asumida con la Sociedad Científica Argentina, la que ciertamente se exteriorizará en su debida oportunidad.

El problema del edificio social, pues, queda solucionado en su primera faz; la segunda, esto es, la relativa a los fondos necesarios para erigir una construcción digna a la vez de nuestra asociación y de nuestra grande Capital, presentará ciertamente serias dificultades, pero es de esperar que serán vencidas pronto y mediante una gestión constante de parte de su Junta directiva, y la buena voluntad demostrada para nuestra asociación por los poderes públicos, legislativo, ejecutivo y municipal, que contribuirán a dar estabilidad a una institución de alta cultura como la nuestra.

PRIMER CINCUENTENARIO

Nuestra asociación, fruto prematuro de un juvenil entusiasmo, tuvo consecuentemente que luchar en sus primerss tiempos, no sólo con la carencia casi absoluta de ambiente propicio, sino que también con la no menor escasez de elementos activos que justificaran su creación.

Sin embargo, luchando contra la indiferencia pública, con poco apoyo oficial y escasos medios de acción, dando traspiés, acertando otras a veces, desfalleciendo algunas, reaccionando luego, gracias a los contingentes que le proporcionaba anualmente nuestra Facultad de Ciencias exactas, ha ido consolidando su acción, consiguiendo progresivos centros de fuerzas, más o menos instables, con tendencia a la permanencia, hasta la hora presente en la que, si aún no ha conseguido estabilizarse definitivamente, se halla en vías de conseguirlo.

Pero lo que es un hecho honroso para nuestra asociación es que llega a su primer cincuentenario rodeada por la simpatía y el respeto público, como lo comprueban su crecimiento social, los juicios favorables, no sólo de los centros culturales de la Nación, sino que también de la prensa más caracterizada del país y, lo más difícil de conseguir, la manifiesta simpatía de los poderes públicos nacionales, legislativo y ejecutivo y de la Intendencia municipal de la Capital.

La Junta directiva, para festejar tan fausta efemérides resolvió ce-

lebrar un acto público cuyo detalle figura en nuestros *Anales* (1) por lo que me eximo de referirlo aquí.

Sólo diré que fuimos objeto de señaladas atenciones, de manifiestas pruebas de adhesión, tanto de las autoridades mencionadas, cuanto del público que manifestó su calurosa simpatía aplaudiendo de una manera alentadora a la Sociedad Científica Argentina, durante el brillante acto celebrado el 5 de diciembre próximo pasado en el teatro Cervantes, cedido generosamente a nuestra asociación.

La presencia del señor presidente, doctor Alvear, la del señor ministro, doctor Marcó, la peroración magistral del doctor Rojas, dieron animación y realce al homenaje que rendíamos a nuestro felíz aniversario.

Sería ingratitud de mi parte si no repitiera aquí que los eminentes esposos Díaz de Mendoza, por intermedio de su representante el señor Livingston, nos eximieron del pago del derecho que les correspondía por el uso del teatro; y que el señor Da Rosa, renunció al propio sin más cargo que el pago del personal de servicio del mismo. Llegue hasta ellos el agradecimiento de la Sociedad Científica Argentina.

MEDALLA CONMEMORATIVA

Para conservar mayor recuerdo de nuestro primer cincuentenario, la Junta Directiva resolvió acuñar medallas con el símbolo de la Sociedad, la fecha inicial y final del mismo.

De éstas, tres medallas de oro han sido dedicadas al señor presidente de la Nación doctor Alvear, al señor ministro de Justicia e instrucción pública, doctor Marcó, y al señor intendente municipal, doctor Noël.

Para los socios se han acuñado medallas de bronce, sin perjuicio de que las puedan obtener de plata, abonando su importe (2 $ m/n) a la casa Gottuzzo y Piana, encargada de su acuñación.

Este recuerdo numismático servirá, por su naturaleza, para perpetuar la memoria de nuestra institución.

He dejado para después la segunda faz de nuestro cincuentenario, que en realidad es la más interesante para el porvenir. Me refiero a

(1) *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo XCIV, entregas V-VI, noviembre-diciembre, 1922.

la publicación de la interesantísima labor científico-histórica encomendada a diversos miembros de nuestra asociación, que figuran entre los hombres de ciencia más descollantes entre nosotros.

La Junta directiva resolvió que como archivo histórico de nuestra actuación científica durante el primer cincuentenario de la Sociedad, se prepararán monografías relativas al progreso de las diversas ramas científicas que constituyen el programa cultural de la misma.

Las monografías indicadas harán conocer la evolución de la ciencia argentina hasta la fecha del primer cincuentenario de nuestra asociación.

La mayor parte de estos señores consocios han presentado sus monografías, las que pronto serán completadas.

Esta labor para ser publicada demanda: o hacerlo paulatinamente en los *Anales* o en una edición especial que requirirá una suma asaz elevada. Confiábamos, por una parte, en el subsidio que pidió a la Cámara el señor diputado doctor Davel; pero las dificultades surgidas en la aprobación del presupuesto hicieron desvanecer nuestras esperanzas.

Hicimos, más tarde, otra gestión ante el Jockey Club de esta capital, contando con el apoyo moral de muchos asociados; pero en la última entrevista que tuvimos, el doctor Lozano y yo, con su presidente, el doctor Joaquín S. de Anchorena, este distinguido amigo nos manifestó que lo desastroso, en el orden económico, del período administrativo correspondiente a 1922, imposibilitó al Club para ser generoso como en años anteriores; pero que esperaba que en el período actual las cosas cambiarían en sentido favorable, y, por ende, en condiciones de poder ayudar a una institución tan meritoria como la Sociedad Científica Argentina.

Esperaremos, pues, a no ser que otras reparticiones públicas o instituciones se adelanten a ayudarnos.

JUNTA DIRECTIVA

En la asamblea ordinaria realizada el 17 de abril del año 1922, de acuerdo con lo que establece el artículo 13 y disposiciones transitorias del reglamento para la renovación de la Junta Directiva, después de verificada la elección y hecho el escrutinio, quedó constituída en la forma siguiente:

Presidente : Ingeniero Santiago E. Barabino, para completar el segundo período de dos años.

Vicepresidente 1º : Doctor Nicolás Lozano, elegido por dos años.

Vicepresidente 2º : Doctor Raimundo Wilmart, para completar el período de dos años.

Secretario de actas : Doctor Rogelio A. Trelles, elegido por dos años.

Secretario de correspondencia : Doctor Reinaldo Vanossi, para completar el período de dos años, vacante por renuncia del ingeniero Raúl E. Dubecq.

Tesorero : Ingeniero Edmundo Parodi, elegido por dos años.

Protesorero : Ingeniero Juan Blaquier, para completar el período de dos años.

Bibliotecario : Ingeniero Juan José Carabelli, elegido por dos años.

Vocales : Ingeniero Antonio Paitoví, ingeniero Manuel J. Arce, ingeniero Julio R. Castiñeiras, doctor Salvador Debenedetti, elegidos por dos años, doctor Atilio A. Bado, profesor Juan Nielsen, ingeniero Evaristo V. Moreno, para completar el período de dos años e ingeniero Ferruccio A. Soldano, por un año, en reemplazo del doctor Nicolás Lozano que fué elegido vicepresidente 1º.

La Junta directiva así constituída ha funcionado hasta la fecha, habiendo celebrado durante el período transcurrido 36 sesiones, en las que, entre otras, fueron tomadas las resoluciones siguientes :

— Adherirse a los siguientes congresos :

Primer Congreso nacional (archiveros y bibliotecarios), habiendo sido nombrado delegado el señor bibliotecario, ingeniero Juan José Carabelli.

Al Congreso extraordinario de aborígenes de Chacaygua Rica.

Al XIII Congreso internacional de Geología, reunido en Bruselas, habiendo representado a la Sociedad el prof. Martín Doello-Jurado.

Igualmente se ha adherido al 20º Congreso de Americanistas y 6º Congreso médico latino de la Habana y al Congreso de Vialidad ; II Congreso internacional de Sevilla, 1923.

— Con motivo del primer centenario de la Independencia del Brasil la Sociedad resolvió adherirse, por aclamación, a los festejos de la república hermana, habiendo designado a los doctores Bruno Lobo y Antonio Olyntho para que la representasen, representación que se extendió a nuestros consocios ingenieros Agustín Mercau y Mario L. Negri y doctor Gregorio Aráoz Alfaro.

La Sociedad envió, con igual motivo, una colección completa, encuadernada, de los *Anales,* para que figurara en el pabellón argentino de la expo-

sición de Río y se designó a los señores socios correspondientes doctores Bruno Lobo y Antonio Olyntho, para que una vez clausurada la exposición entregaran dicha colección a una institución científica de aquel país.

— Se ha adherido, además, la Sociedad, a los siguientes festejos :

Al primer centenario de la fundación de la Academia de Medicina de Buenos Aires ;

A la reimpresión de las obras zoológicas de Félix de Azara ;

Al centenario del sabio Pasteur ;

Al homenaje celebrado por la Asociación Química argentina a la memoria de J. J. Kyle.

— Ha contribuido con 150 pesos moneda nacional a la Sociedod de micrografía de Viena, cuya escasez de recursos debido a las causas conocidas, no le permitían continuar con sus valiosísimas publicaciones.

— Se ha donado también una colección completa de los *Anales,* con destino a la biblioteca del Jockey Club.

— Se ha aceptado el canje con las siguientes revistas : *Facultad de Ciencias económicas del Rosario* (Universidad nacional del litoral), *Chemie* y *Centro estudiantes del instituto del profesorado.*

— En la última sesión celebrada el 2 del corriente, la Junta directiva resolvió adherirse al Congreso internacional de Urbanismo e Higiene que se realizará en Estrasburgo en el mes de mayo, y designar al doctor Nicolás Lozano para representar a la Sociedad en dicho certamen.

ASAMBLEAS

La única asamblea realizada fué la ordinaria que tuvo lugar el 17 de abril del año próximo pasado, en la que fué aprobada la Memoria anual correspondiente al XLIX° ejercicio administrativo, y se procedió a la renovación de la Junta Directiva para el período terminado el 31 de marzo último.

ANALES

La dirección de los *Anales* ha continuado a cargo del ingeniero Julio R. Castiñeiras, habiéndose dado a la publicidad las entregas bimensuales siguientes :

Tomo 93, entregas, V y VI, mayo y junio de 1922.

Tomo 94, entregas, I y II, julio y agosto de 1922.

Tomo 94, entregas, III y IV, septiembre y octubre de 1922.

Tomo 94, entregas, V y VI, noviembre y diciembre de 1922.

Estando en preparación y próximas a aparecer las entregas del :

Tomo 95, entregas, I y II, enero y febrero de 1923.

Tomo 95, entregas, III y IV, marzo y abril de 1923.

He aquí la reseña de los interesantes temas tratados por nuestros distinguidos colaboradores, en las entregas mencionadas:

Galdino Negri, *El congreso sismológico de Manchester.*

Carlos Spegazzini, *Micromycetes nonnulli brasilienses.*

Juan Brèthes, *Himenópteros y dípteros de varias procedencias.*

Ottomar Schmiedel, *Contravientos horizontales en coacción con columnas.*

Enrique Herrero Ducloux, *Juan J. J. Kyle (1838-1922).*

Martiniano Leguizamón Pondal, *Fluor normal en uvas de España.*

Santiago E. Barabino, *Doctor Ángel Gallardo.*

Alfredo Coryn, *Los indios lenguas. Sus costumbres y su idioma.*

J. Weise, *Coleoptera y collectione bruchiana.*

Otto Rokotnitz, *Ideas generales sobre las bases y consecuencias de las teorías de la relatividad.*

Carlos Spegazzini, *Cryptogamae nonnullae fuegianae (Resultados de la primera expedición a Tierra del Fuego (1921), enviada por la Facultad de ciencias exactas, físicas y naturales de la Universidad nacional de Buenos Aires).*

M. Doello-Jurado, *Un nuevo « Mytilus » fósil del terciario de Patagonia.*

J. Babini, *Un nomograma para los médicos.*

Ángel Pérez Hernández, *Disquisiciones trigonométricas (tercera) sobre un antiguo procedimiento práctico para resolver los triángulos esféricos.*

M. Doello-Jurado, *Nota preliminar sobre braquiópodos fósiles de la Argentina referidos al género Bouchardia y sobre la posición del horizonte salamanquense.*

J. J. Kieffer, *Trois nouveaux hyménopteres d'Argentine, recueillis par C. Bruch.*

Carlos A. Marelli, *« Phocaena Stornii » sp. n. Una especie de marsopa del mar austral argentino (Resultado de la primera expedición a Tierra del Fuego (1921) enviada por la Facultad de ciencias exactas, físicas y naturales de Buenos Aires).*

F. Santschi, *Description de nouvelles fourmis de l'Argentine et pays limitrophes.*

Juan Brèthes, *Descripción de varios coleópteros de Buenos Aires.*

W. Dohler, *El caos.*

Debo aquí hacer resaltar y agradecer la eficiente actuación del señor director de los *Anales,* ingeniero Julio R. Castiñeiras, que ha conseguido normalizar la aparición de nuestra revista en las fechas correspondientes, así como sostener el interés de los hombres de ciencia por la misma, dada la importancia de los artículos publicados.

BIBLIOTECA

Con el objeto de regularizar el canje y tratar de completar los tomos truncos que existen en la biblioteca, de las revistas que se reciben en canje de los *Anales,* se designó a los señores secretarios de actas y de correspondencia, doctores Rogelio A. Trelles y Reinaldo Vanossi, para que de acuerdo con el señor bibliotecario, ingeniero Juan José Carabelli, procedieran a constatar los números de revistas que faltan para completar las colecciones, y se hiciera el pedido de los números que faltaran. Este trabajo se ha realizado en parte habiéndose alcanzado a revisar 318 colecciones y remitido con tal objeto 157 comunicaciones solicitando el envío de números. Se han recibido mucha contestaciones accediendo a los pedidos de referencia, siendo de lamentar en mucho casos, que algunos de los números solicitados no hayan sido remitido por estar agotados.

Durante el período terminado se han recibido, en calidad de donación, 62 volúmenes y 85 folletos, cuya nómina se transcribe más adelante.

Contribuyen a engrosar la biblioteca, además de las obras recibidas por donación, las 215 publicaciones qne se reciben en canje de los *Anales*, de todas partes del mundo, y las 14 revistas que ingresan por concepto de subscripción, lo que en total forma un aumento anual de cerca de 600 volúmenes, considerando que cada una de las revistas que se reciben forman dos volúmenes anuales por lo menos.

Durante el año se han encuadernado 145 volúmenes.

La consulta de los libros de la biblioteca se ha seguido facilitando a los señores socios, permitiéndoles llevarlos a sus domicilios por un tiempo prudencial y de acuerdo con el reglamento interno de la biblioteca. En tal forma se han prestado 50 volúmenes y 67 números de revistas. También se ha facilitado la consulta de la biblioteca, en el local social, a numerosas personas que lo han solicitado, a cuyo efecto, y para mayor comodidad de las mismas y de los socios, aquélla ha sido atendida con horario de mañana, tarde y noche.

La Sociedad contribuye al fomento de 29 bibliotecas públicas del país enviándoles gratuitamente sus *Anales.*

Durante el período se han establecido los siguientes canjes nuevos :

Revista de la Facultad de ciencias económicas, comerciales y políticas

de la Universidad nacional del Litoral (Rosario), *Revista de Chemie* y *Revista del Centro estudiantes del instituto del profesorado.*

En cuanto al archivo de la Sociedad, se ha continuado coleccionando los documentos. Los documentos correspondientes a los años 1872 a 1890 están encuadernados, y preparados para su encuadernación los correspondientes a los años 1891 hasta 1902.

He aquí la nómina de los libros y folletos recibidos para la biblioteca durante el período comprendido entre el 1° de abril de 1922 al 31 de marzo de 1923:

M. J. Lagos, *La política del petróleo,* 150 páginas, L. J. Rosso, Buenos Aires, 1922.

P. Huc, *Manuel du tanneur, mégissier, corroyeur,* 397 páginas, J. B. Baillière, París, 1922.

B. Calvo Hernández, *El servicio de correos entre España y América,* 120 páginas, Serra y Russell, Barcelona, 1922.

D. R. Blanco Fombona, *El libro español. Ciclo de conferencias,* 182 páginas, Serra y Russell, Barcelona, 1922.

M. Edouard Perrin, *Aide-memoire de l'ingénieur constructeur en béton armé,* 160 páginas, Ch. Beranger, París, 1922.

Cámara oficial del libro, de Barcelona, *Memoria 1921-1922,* 207 páginas, Oliva de Vilanova, Barcelona, 1922.

Atilio A. Castro, *Estudios de derecho civil patrio,* 272 páginas, Imprenta Nacional, San Salvador, 1921.

Juan C. Varetto, *Hostilidad del clero a la independencia americana,* 164 páginas, Imprenta Metodista, Buenos Aires 1922.

P. A. Vasconez, *Historia profana de Israel,* 136 páginas, Artes y Oficios, Ecuador, 1921.

Paul Boyer, M. Caullery, etc., *La vie universitaire à Paris,* 231 páginas, Armand Colin, París, 1918.

Doctor R. G. Loyarte, *Física general,* 370 páginas, Facultad de ciencias físico-matemáticas, puras y aplicadas, La Plata, 1922.

Doctor E. González, *Memoria, anteecedentes y datos estadísticos,* 238 páginas, Encuadernación de la Policía, Buenos Aires, 1922.

E. T. da Fonseca, *Oleos vegetaes brasileiros, Revista de los tribunales,* Río de Janeiro, 1922.

L. Michel, *Études et notes de géologie appliquée,* 701 páginas, Ch. Béranger, París, 1922.

Julio Herrera, *El nuevo Código penal,* 142 páginas, A. Biffignandi, Córdoba, 1922.

James Brown Scott, *La política exterior de los Estados Unidos,* 330 páginas, Doubledar, Page and Company, Nueva York, 1922.

F. Touplain, *Analyse générale des eaux,* 244 páginas, Ch. Béranger, París, 1922.

E. T. da Fonseca, *Indicador de madeira e plantas uteis do Brasil,* 343 páginas, Villas-Boas, Río de Janeiro, 1922.

Liga patriótica argentina, *Tercer Congreso de trabajadores de la Liga patriótica argentina,* 366 páginas, Imprenta Cúneo, Buenos Aires, 1922.

Centro nacional de ingenieros, *Primer Congreso nacional de ingeniería.* (Uno en láminas), 3 tomos, 857 páginas, Imprenta Guía Expreso, Buenos Aires, 1922.

Actas y trabajos del primer Congreso nacional de química, 186 páginas, T. Palumbo, Buenos Aires, 1922.

Obras sanitarias de la Nación, *Memoria del directorio, año 1921,* 378 páginas, Obras sanitarias de la Nación, Buenos Aires, 1922.

For International Peace, *Year Book,* 244 páginas, Press of Byron S. Adams, Wáshington, 1921.

Mario da Veiga Cabral, *Compendio de chorografía do Brasil,* 477 página, J. R. dos Santos, Río de Janeiro, 1922.

Ministerio de Relaciones exteriores, *Informe del ministro de Relaciones exteriores al Congreso de 1922,* 161 páginas, Imprenta Nacional, Colombia, 1922.

Johnston-Lavis, *Bibliography,* 373 páginas, The Universidad, Londres, 1918.

Gobierno de la provincia de Buenos Aires, *La antigüedad del hombre en el Plata,* 818 páginas, Imprenta oficial, La Plata, 1915.

Consejo general de educación, *Censo escolar,* 535 páginas, A. Biffignandi, Córdoba, 1922.

Consejo general de educación, *Labor escolar,* 453 páginas, A. Biffigandi, Córdoba, 1922.

Marcellin Boule, *Mamifères fossiles de Tarija,* con un suplemento correspondiente al mismo volumen, 252 páginas, H. L. Soudier, París, 1921.

Henri Villat, *Congrès international des mathématiciens,* 2 tomos, 1340 páginas, E. Privat, Toulouse, 1921.

Academia nacional de historia, *Documentos para la historia,* 450 páginas, Universidad central, Quito, 1922.

Tercera conferencia nacional de profilaxis antituberculosa, 575 páginas, Imprenta oficial, La Plata, 1922.

Patronato de la infancia, *Almanaque del Patronato nacional de la infancia,* 248 páginas, Imprenta Cervantes, Santiago de Chile, 1922.

Bartolomé Mitre, *La Divina Comedia,* nueva edición, definitiva, autorizada, dirigida por N. Besio Moreno, 612 páginas, A. G. Buffarini, Buenos Aires, 1922.

Francesco Porro, *Trattato di astronomia,* 424 páginas, N. Zanichelli, Bologna, 1921.

H. Andoyer, *Cours d'astronomie,* 455 páginas, J. Hermann, París, 1923.

Primer Congreso ferrocarriles de Chile, 3 tomos, 1432 páginas, Imprenta del Estado, Santiago, 1922.

Guides techniques Plumon, *Dictionnaires méthodiques illustrés en plusieurs langues,* 731 páginas, Ch. Béranger, París, 1922.

Wilhelm Kaiser, *Die Tecnick des modernen Mikroskopes,* 614 páginas, Verlag von Moritz Perles, Wien, 1906.

Ministerio de Fomento, *Marcas de fábrica y de comercio, y patentes de invención,* 304 páginas, Tipografía Central, Caracas, 1922.

Instituto histórico y geográfico del Uruguay, *Escritos de don Dámaso Antonio Larrañaga,* 439 páginas, Imprenta Nacional, Montevideo, 1922.

Thyssen-Werke, *Catálogo de la compañía,* 90 páginas.

Congreso de química, *Actas y trabajos del primer Congreso nacional de química,* 106 páginas, T. Palumbo, Buenos Aires, 1922.

The Rockefeller Foundation, *Junta de sanidad internacional. Octavo informe anual,* 182 páginas, Nueva York, 1922.

J. Reveille, *Dynamique des solides gyroscopes,* 506 páginas, J. B. Baillière et fils, París, 1923.

Revista de seguros, número aniversario y de homenaje al Brasil, 420 páginas, Danton Gajardo y R. del Castillo, Buenos Aires, 1922.

Ministerio de Relaciones exteriores, *Líneas de fronteras con Chile,* 20 páginas, Ministerio, Buenos Aires, 1919.

E. J. Baca, *Reylamentando la cremación de cadáveres,* etc., A. G. Buffarini, dos tomos, 48 páginas, Buenos Aires, 1922.

A. G. Frers, *Coleópteros argentinos,* 11 páginas, imprenta Coni, Buenos Aires, 1919.

A. G. Frers, *Crisomélido Lema dorsalis,* 21 páginas, imprenta Coni, Buenos Aires, 1922.

E. de Graffiny, *Un viaje al mundo de los átomos,* 46 páginas, imprenta Coni, Buenos Aires, 1922.

M. Louis Poinssot, *Nouvelles archives des missions scientifiques et littéraires,* 198 páginas, Imprimérie National, París, 1919.

Asociación independiente de jóvenes Dominicanos de Santiago de los Caballeros, *Conferencia dictada por el doctor A. Lugo,* 19 páginas, Franco hermanos, Santiago de los Caballeros, 1922.

Carlos López, *Importancia de algunos Cérvidos en la alimentación,* etc., 24 páginas, Estudios biológicos, México, 1922.

Doctores A. Ceriotti y A. Sanguinetti, *Extractos de Malta,* 5 páginas, T. Palumbo, Buenos Aires, 1922.

Doctor Luis C. Maglioni, *Mis treinta y siete días de ayuno,* 48 páginas, imprenta San Martín, Buenos Aires, 1920.

Doctor Luis C. Maglioni, *Arte y ciencia,* 20 páginas, Imprenta San Martín, Buenos Aires, 1922.

Homenaje al doctor S. Ramón y Cajal, 16 páginas, Oucinde, Buenos Aires 1922.

Doctor S. Barabino Amadeo, *Adenoma prostátieo,* 47 páginas, E. Spinelli, Buenos Aires, 1922.

Félix F. Outes, *Nómina de sus publicaciones*, 53 páginas, imprenta Coni, Buenos Aires, 1922.

J. Pérez Mendoza, *Pro cremación en la Argentina*, 29 páginas, imprenta Ferrari, Buenos Aires, 1922.

Escuela industrial de la Nación, *Extracto de la memoria del año 1919*, 49 páginas, L. J. Rosso y compañía, Buenos Aires, 1922.

Sociedad central de arquitectos, *Memoria de la presidencia,* 16 páginas, Buenos Aires, 1922.

Club de Engenharia, *Programma do Congresso internacional de engenharia,* 2 tomos, 16 páginas, Rodríguez y compañía, Río de Janeiro, 1922.

A. dell'Oro Maini, *La inmigración en la República Argentina y la situación social del agricultor,* 20 páginas, A. de Martino, Buenos Aires, 1922.

A. Serrano, *Sobre un nuevo procedimiento en la técnica alfarera del litoral,* 7 páginas, imprenta El Diario, Paraná, 1922.

M. Doello-Jurado, *Una especie de Viviparus,* 5 páginas, imprenta Coni, Buenos Aires, 1922.

A. Serrano, *Algunas puntas de flechas neolíticas de las inmediaciones de Federación (Entre Ríos),* 2 páginas, imprenta El Diario, Paraná, 1922.

Ministerio de Obras públicas de Venezuela, *Obras de saneamiento. Red de las cloacas de Caracas,* 45 páginas, litografía del Comercio, Caracas, 1920.

Ministerio de Obras públicas, *Acueductos de Caracas,* 38 páginas, litografía del Comercio, Caracas, 1917.

Doctor V. Márquez Bustillos, *Mensaje al Consejo Nacional en 1922,* 23 páginas, litografía del Comercio, Caracas, 1922.

Alfredo Jahn, *Esbozo de las formaciones geológicas de Venezuela,* 108 páginas, litografía del Comercio, Caracas, 1921.

H. Pittier, *Esbozo de las formaciones geológicas de Venezuela, con una breve reseña de los productos naturales y agrícolas,* 44 páginas, Caracas, 1920.

Charles Janet, *Considerations sur l'être vivant,* 78 páginas, A. Dumontier, Beauvais, 1920.

E. C. Díaz, *El título profesional y su defensa,* 24 páginas, Centro nacional de ingenieros, Buenos Aires, 1921.

F. S. Torres, *Aviación y granizo,* 44 páginas, Centro nacional de ingenieros, Buenos Aires, 1922.

C. Bruch, *Estudios mirmecológicos,* imprenta Coni, Buenos Aires, 1921.

C. Bruch, *Algunos interesantes cerabicidos,* Imprenta Coni, Buenos Aires, 1921.

Ignacio Calvo, *La Guardia (Pontevedra),* imprenta de la *Revista de archivos,* etc. Madrid, 1920.

R. Delaveuve, *Notes sur les courroies de transmission,* 71 páginas, Ch. Béranger, París, 1922.

Lucas Kraglievich, *Estudios sobre los mylodontinae,* 10 páginas, Talleres de impresiones oficiales, La Plata, 1922.

Lucas Kraglievich, *Eumylodon invertus,* 6 páginas, Talleres de impresiones oficiales, La Plata, 1922.

L. Alvarado, *Observaciones sobre el caribe hablado en los llanos de Barcelona,* 22 páginas, tipografía Americana, Caracas, 1919.

A. Hoyo, *La organización científica del trabajo y la producción y el problema obrero,* 6 tomos, 234 páginas, Rinaldi hermanos, Buenos Aires, 1922.

J. Pérez Mendoza, *Pro cremación en la Argentina,* 2 tomos, 58 páginas, imprenta Ferrari, Buenos Aires, 1922.

Primer Congreso nacional de química, 34 páginas, T. Palumbo, Buenos Aires, 1918.

By James T. Showell, *Carnegie Endowment for International Peace,* 59 páginas, New York, 1922.

L. R. Parodi, *Las gramíneas de la región de Concordia,* 102 páginas, F. Gurfinkel, Buenos Aires, 1922.

Giuseppe Bruni, *In memoria di Giacomo Ciamician,* 28 páginas, P. Neri, Bologna, 1922.

Bruno Lobo, *O Museu Nacional,* 110 páginas, imprenta Nacional, Río Janeiro, 1922.

Blas Cabrera, *Momento actual de la física,* 30 páginas, E. Maestre, Madrid, 1921.

Emilio R. Coni, *Bodas de oro con la medicina. Cuarenta y ocho años de periodismo médico. Bibliografía correspondiente al año 1921,* 24 páginas, L. J. Rosso y compañía, Buenos Aires, 1922.

Escuela industrial de la Nación, Rosario, *Tablas numéricas,* 29 páginas, La Velocidad, Rosario, 1922.

Asociación Internacional, *Bulletin du Congrès de la Route,* 411 páginas, imprimerie Oberthur, París, 1922.

F. S. Torres, *Aviación y granizo,* 176 páginas, Buenos Aires, 1922.

T. Palumbo, *Catálogo de tipos,* 21 páginas, imprenta Palumbo, Buenos Aires, 1923.

A. M. Silva, *Nuevo concepto etiológico y curativo de las enfermedades; cáncer, tuberculosis, sífilis,* 20 páginas, J. Estrach, Buenos Aires, 1922.

Escuela industrial del Rosario, *Unidades, simbos, notas y problemas,* 20 páginas, Artes gráficas, Rosario, 1922.

J. Brèthes, *El pulgón del manzano,* 6 páginas, imprenta La lectura, Buenos Aires, 1922.

Escuela industrial de la Nación, *Condiciones de ingreso. Planes de es-*

tudios de los cursos, etc., 20 páginas, L. J. Rosso y Compañía, Buenos Aires, 1922.

Bulletin de l'Association internationale permanente des Congrès de la Route, 31 páginas, Société anonyme des imprimeries Oberthur, París, 1923.

Compañía Sudamericana S. K. F., *Boletín Sudamericano S. K. F.,* 19 páginas, Imprenta Fontana, Buenos Aires, 1923.

D. L. Herrera, *Temas de conferencias,* 3 páginas, Imprenta de la dirección de estudios biológicos, Méjico, 1922.

J. Vasconcelos, *Orientaciones del pensamiento en Méjico,* 43 páginas, imprenta Biffigandi, Córdoba, 1922.

Dirección de agricultura, *Boletín de agricultura,* 19 páginas, imprenta oficial, La Plata, 1922.

C. C. Hoffmann, *Resto de una antigua fauna del norte entre los lepidópteros mejicanos,* 23 páginas, Méjico, 1922.

CONFERENCIAS

Las conferencias dadas durante el período fueron las siguientes:

Agosto 28. Doctor Arturo R. Frutos, *La nueva geografía europea, y especialmente de Rumanía.*

Septiembre 8. Doctor Ricardo Gans, *Reseña histórica de la teoría del éter. La experiencia de Michelson y Morley. Los postulados de Einstein. Las ecuaciones de transformación.*

Septiembre 15. Doctor Ricardo Gans, *La relatividad de longitudes y tiempos. Teorema de adición de velocidades. Experiencia de Fizeau. Fenómeno de Doppler y aberración.*

Septiembre 22. Doctor Ricardo Gans, *El electro-magnetismo y la relatividad. El principio de la relatividad y la mecánica.*

Septiembre 28. Ingeniero José Babini, *Enseñanza de las matemáticas aplicadas a la química en la Facultad de química industrial y agrícola.*

Septiembre 26. Doctor Horacio Damianovich, *Nuevo dispositivo para la absorción cuantitativa de gases. Caso del anhídrido carbónico en la respiración.*

Septiembre 26. Doctor Raúl Wernicke, *Electrodiálisis del suero antidiftérico de caballo.*

Octubre 4. Doctor Antonio Barbieri, *La visión cromática. Su concepto en la ciencia y en el arte.*

Octubre 20. Doctor Julio Rey Pastor, *Interpretaciones no euclidianas del grupo de Lorentz. El universo de Minkowsky. Espacio cinemático. Teorema de Sommerfeld.*

Octubre 31. Ingeniero agrónomo Francisco J. Fernández, *Defensa de los cultivos contra la sequía, y problema nacional del trigo.*

Noviembre 3. Doctor Ramón G. Loyarte, *Ecuaciones de Lagrange. Ecuaciones canónicas. El teorema de Liouville. Estructura discreta de la materia. La probabilidad de existencia de un estado. Relación entre la entropía y la probabilidad: fórmula de Boltzmann. La distribución de los elementos en el espacio de las fases en el caso del equilibrio. La energía libre del sistema.*

Noviembre 4. Doctor Eduardo J. Baca, *La cremación cadavérica.*

Noviembre 9. Doctor Ramón G. Loyarte, *Hipótesis de los « quanta ». Energía media de un oscilador. Teoría del calor específico de Einstein. La teoría de Debye. La entropía en el cero absoluto: Teorema de Nernst.*

Noviembre 13. Doctor Ramón G. Loyarte, *Teoría de la radiación. Los resultados de la teoría clásica. La teoría quantista de Planck.*

Noviembre 15. Doctor Hugo Broggi, *El cálculo diferencial absoluto y la teoría de la relatividad.*

Noviembre 21. Doctor Ramón G. Loyarte, *Los gases ideales monoatómicos: Calores específicos. El caso de gases poliatómicos. El cuerpo sólido como sistema de osciladores. Las oscilaciones infinitamente pequeñas de un sistema de oscilaciones con K grados de libertad al rededor de una configuración de equilibrio. La energía libre. La energía media de los osciladores. El calor específico. Desacuerdo con los resultados experimentales.*

Diciembre 9. Doctor Santiago Barabino Amadeo, *Consecuencias sociales de las enfermedades venéreas.*

De las 17 conferencias realizadas, 13 fueron patrocinadas por nuestra sociedad, 3 por la Asociación Química argentina y 1 por la Liga argentina de Profilaxis social.

MOVIMIENTO DE SECRETARÍA

Todos los asuntos entrados y resueltos por la Junta directiva y asamblea fueron despachados oportunamente, para lo cual han sido redactadas 587 notas, además de toda la correspondencia de trámite que alcanzó a 59 comunicaciones, y se han redactado 37 actas de la Junta directiva y asambleas. Se ha atendido las relaciones de la Sociedad con las del país y del extranjero, cuyas copias se encuentran en los libros respectivos.

SOCIOS ACTIVOS Y ADHERENTES

El movimiento de socios ha sido el siguiente:

	activos	adherente
En 31 de marzo de 1922 los socios eran.....	290	36
Han ingresado durante el período	22	6
Se reincorporaron	11	»
Pasó a ser socio activo.....	1	»
Totales.....	324	42
Se han eliminado por diferentes causas y uno que pasó a ser socio activo.....	18	6
Quedan en 31 de marzo de 1923.....	306	36

Entre los socios salidos figuran 6 activos y 5 adherentes que han renunciado; 4 activos por haberse ausentado del país y 8 activos por fallecimiento.

Los socios ingresados durante el período son los siguientes:

Activos. — Ángel Bianchi Lischetti (doctor en ciencias naturales), Emilio Paulsen (ingeniero mecánico), Luis Bozzini, hijo, Santiago Picot (ingeniero agrónomo), Oscar Schoo Lastra (ingeniero civil), Roberto Beretervide (doctor en química), Edmundo Franceschi, Héctor Marcelo Cano (agrimensor), Miguel Fernández (doctor en ciencias naturales), Rodolfo R. Parodi (ingeniero agrónomo), Juan José C. Mosca (ingeniero civil), Gustavo Sorojovich (ingeniero), Orlando P. Curti (médico), Eduardo Chiarizia, Alejo D. Amavet (profesor), Ricardo S. García (ingeniero mecánico), Jaime Jacobacci (abogado), Santiago Barabino Amadeo (médico), Leopoldo Giusti (médico veterinario), José M. Páez (ingeniero civil), César T. Allende (médico) y Martín Castro Escalada (médico).

Adherentes. — Señores Antonio Pascual Oliveras, Adolfo H. Gondre, Alberto P. Sánchez, María C. Cirio, Rodolfo Maldonado Bruzzone y Juan F. Schehan.

Reincorporados. — Activos: Manuel B. Bahía (ingeniero civil), Pablo E. Bordenave (ingeniero civil), Alberto Taiana (ingeniero civil), Emilio Palacio (ingeniero civil), Humberto Canale (ingeniero civil), Julio Krause (ingeniero civil), Manuel S. Ocampo (ingeniero civil), Jorge Duclout (ingeniero civil), Salvador Velasco (coronel ingeniero) y Esteban Larco (ingeniero civil).

El número de socios honorarios no ha variado, habiendo contado la

Sociedad, desde su fundación hasta la fecha, con 21 socios honorarios, de los cuales han fallecido los 14 primeros de la nómina total que es la siguiente: doctores Pedro Visca, Germán Burmeister, Mario Isola, Benjamín A. Gould, R. A. Philippi, Guillermo Rawson, Carlos Berg, Valentín Balbín, Florentino Ameghino, Carlos Darwin, César Lombroso, ingenieros Luis A. Huergo, Vicente Castro, doctores Juan J. J. Kyle, Estanislao S. Zeballos, Walter Nernst, Eduardo L. Holmberg, Enrique Ferri, Carlos Spegazzini e ingenieros J. Mendizábal Tamborrel y Guillermo Marconi.

Los socios correspondiente son 57.

En resumen, el total de socios es actualmente el siguiente:

Honorarios	7
Correspondientes	57
Activos	306
Adherentes	36
Protectores de la Organización didáctica de Buenos Aires	2
Total	408

Los socios cuyo fallecimiento ha tenido que lamentar la Sociedad, y a quienes oportunamente les fué tributado el debido homenaje, invitándose a los señores consocios a concurrir al acto del sepelio, dirigiéndose notas de pésame a las respectivas familias y publicándose en los *Anales* sentidas notas necrológicas, son los siguientes: Ingenieros José L. Pertile, Guido Jacobacci, Eduardo Otamendi, Alfredo Marino; doctor Roberto Wernicke; coronel ingeniero Salvador Velasco; doctor Pedro N. Arata y profesor José T. Ojeda.

No puedo eximirme de manifestar aquí el eficaz concurso, por lo activo y constante, que me prestaron los actuales secretarios, doctores Reinaldo Vanossi y Rogelio A. Trelles.

Las numerosas actas y muy importantes notas cambiadas con las autoridades, asociaciones científicas, hombres de ciencia, etc., que obran en nuestro archivo social, han demostrado no sólo su buena voluntad, sino que también su apreciable inteligencia y laboriosidad.

MOVIMIENTO DE TESORERÍA

La Junta Directiva en su sesión del 19 de junio del año próximo pasado aprobó el siguiente proyecto de presupuesto para el L° período administrativo (1° de abril de 1922 a 31 de marzo de 1923):

RECURSOS

		Por mes	Por año
1. Cuotas de socios		1200 »	14.400 »
2. Subsidio del gobierno nacional		245 »	2.940 »
3. Subscripciones y venta de *Anales* y reimpresiones		20 »	240 »
4. Renta de Cédulas (4000)		20 »	240 »
5. Renta de certificados municipales		29 17	350 04
6. Contribución por concesiones del local		30 »	360 »
7. Entradas por avisos (cuatro páginas)		100 »	1.200 »
		1644 17	19.730 04

GASTOS

1. *Anales :*			
Impresiones, ilustraciones, franqueo y gastos menores		585 »	7.020 »
2. *Biblioteca :*			
Subscripciones, compras de libros y encuadernaciones		80 »	960 »
3. *Edificio social :*			
Impuestos municipales	8 25		
Obras sanitarias	15 »		
Contribución territorial	7 »		
Conservación	9 75	40 »	480 »
4. *Sueldos y comisiones :*			
Gerente	300 »		
Escribiente	110 »		
Auxiliar	110 »		
Ordenanza	100 »		
Cobranza (10 %)	110 »	730 »	8.760 »
5. *Gastos generales :*			
Teléfono	13 38		
Cuotas a sociedades	2 »		
Luz	30 »		
Muebles y útiles	5 50		
Impresiones, franqueos y gastos menores	70 »	120 88	1.450 56
6. *Eventuales*		40 »	480 »
		1.595 88	19.150 56
Superávit anual			579 48

Del ejercicio anterior se recibió, como :

Efectivo en caja	105 59
Depósito en cuenta corriente en el Banco de la Nación Argentina	11.175 60
4000 pesos nominales Cédulas hipotecarias argentinas, 2ª serie, a pesos 91,20 por ciento	3.648 »

5000 pesos nominales Certificados municipales, ordenanza 20 de octubre de 1920, a pesos 92,10 por ciento	4.604	»
20 libras nominales en un título de la deuda externa de la provincia de Buenos Aires	227	27
Cuotas atrasadas de socios (recibos por cobrar)	1.778	»
Junta nacional para las aplicaciones científicas, cuenta por reintegrar	186	25
Congreso universitario, suma por reintegrar	818	13
Saldo deudor de la Junta Ejecutiva Homenaje a Ameghino	1.833	54
Subsidio del gobierno de la Nación, cuarto trimestre de 1921 y primer trimestre de 1922, por cobrar	1.470	»
Cupones del primer trimestre de 1922 (Certificados municipales).	87	50

Al empezar el período había las siguientes cuentas por pagar:

A Fernando A Coni, sus cuentas por impresiones de *Anales*	6.061	30

De las cifras globales que se extraen de los libros respectivos en 31 de marzo de 1923, llevados por el gerente señor Juan Botto, resulta que:

Por concepto de cuotas mensuales se han cobrado	13.822	»
Habiendo por lo tanto una diferencia en menos de	578	»
Con lo calculado en el presupuesto que era de	14.400	»
Existiendo un saldo de recibos por cobrar de	3.234	»
Por subsidio del gobierno de la Nación se alcanzó a cobrar	1.470	»
Con una diferencia en contra de lo presupuesto de	1.470	»
Por concepto de *Anales* se ha cobrado	520	»
Habiendo por lo tanto una diferencia en favor de lo presupuesto de.	280	»
Por concepto de rentas (cupones, títulos) se han cobrado deducida la comisión del Banco	576	26
Con una diferencia de lo presupuesto en contra de	13	74
Actualmente la Sociedad es acreedora del subsidio correspondiente al segundo, tercero y cuarto trimestre de 1922 y primer trimestre de 1923, o sean	2.940	»

En cuanto a los egresos se distribuyen en la siguiente forma:

Anales: Se han pagado por impresiones a la casa Coni, por sueldos, gastos de franqueo, impresiones de láminas, grabados de clisés y gastos menores varios	9.138	17
Con una diferencia en contra de lo presupuesto de	2.118	17
Biblioteca: Lo gastado por encuadernación, subscripción, etc., alcanzó a	297	75
Con una diferencia en favor de lo presupuesto de	662	25
Edificio social: Por impuestos varios	407	»
Con una diferencia en favor de lo presupuesto de	73	»

Sueldos y comisiones: Por este concepto estando incluído en la suma el importe de un mes de sueldo con que se gratificó a los empleados con motivo del año nuevo, se han invertido.....		9.401 40
Con una diferencia en contra de lo presupuesto de.....		641 40
Gastos generales y eventuales: Por este concepto que comprende impresiones varias, teléfono, alumbrado, franqueo, útiles de escritorio y otros gastos menores, el monto invertido ha sido de.		2.247 76
Con una diferencia en contra de lo presupuesto de.....		717 76
El total de las entradas durante el período terminado ha sido de.....	18.331 76	
Más giros, Banco Nación Argentina.....	17.048 45	35.380 21
Y el total de las salidas.....	22.693 65	
Más depósitos, Banco Nación Argentina	12.533 76	35.227 71
Quedando un saldo a favor de.....		152 80
Al que agregado el importe de la existencia anterior (31 de marzo de 1922) que fué de.....		105 59
Y el saldo en depósito cuentas corrientes del Banco de la Nación Argentina en 31 de marzo de 1923.....		6.660 91
Resulta el saldo existente en 31 de marzo de 1923 (efectivo en Caja y depósito en el Banco) de		6.919 30

En estos resultados hay que tener en cuenta las siguientes entradas y salidas imprevistas en el presupuesto:

Importe de 500 pesos nominales de Certificados municipales que resultaron sorteados.....	499 50
Cantidad recibida del Primer congreso universitario en concepto de reintegración de los fondos que les fueron anticipados....	1.064 »
Cantidad en más invertida en el pago al señor Coni de cuentas atrasadas por impresiones de *Anales* y otros gastos que es de..	2.118 17
Los gastos líquidos ocasionados por las fiestas del cincuentenario de la Sociedad.....	565 47
El pago de la escrituración del terreno cedido por la Municipalidad para el nuevo edificio social que fué de.....	300 »
El importe de un mes de sueldo con que se gratificó al personal con motivo de año nuevo	620 »

El movimieuto de la cuenta corriente con el Banco de la Nación Argentina, fué el siguiente:

En 31 de marzo de 1922 el saldo en depósito era de.....	11.175 60
Se han depositado durante el L° período.....	12.533 76
Total.....	23.709 36
Se han girado cheques durante el período terminado por valor de.	17.048 45
Quedando actualmente un saldo a favor de la Sociedad de.....	6.660 91

Se encuentran depositados en custodia en el Banco de la Nación Argentina los títulos y comprobantes siguientes:

1° El título de propiedad del edificio social, Cevallos 269;

2° Dos comprobantes de pago de paredes medianeras;

3° Dos comprobantes de aprobación de cuentas rendidas a la Contaduría general de la Nación, por pesos trece mil ochocientos ochenta y tres con tres centavos moneda nacional ($ 13.883,03 m/n), y pesos seis mil ciento diez y seis con noventa y siete centavos moneda nacional ($ 6116,97 m/n) correspondientes a los fondos recibidos del gobierno de la Nación para gastos de representación y publicación de los trabajos presentados al IV° Congreso científico (primero panamericano) de Chile;

4° Dos comprobantes de cuentas presentadas a examen de la Contaduría general de la Nación por pesos cuarenta y un mil novecientos sesenta y dos con veinte y tres centavos moneda nacional ($ 41.962,23 m/n) y pesos ocho mil treinta y siete con setenta y siete centavos moneda nacional ($ 8037,77 m/n) correspondientes a los fondos recibidos del gobierno de la Nación para exploración y estudio de la laguna « Iberá »;

5° Un título de la deuda pública externa de la provincia de Buenos Aires número 163527, por valor de cien pesos oro sellado nominales;

6° 4500 pesos nominales de obligaciones municipales (certificados al portador) y 4000 pesos nominales de cédulas hipotecarias argentinas, segunda serie (Ley n° 9145).

Los señores socios que deseen más detalles los encontrarán en los cuadros demostrativos y balance general que se agregan a esta memoria.

GERENCIA

Ha continuado a cargo del señor Juan Botto, cuya larga práctica de 37 años y notables condiciones de labor y actividad, le permiten prestar inapreciables servicios a la Sociedad. Además del correcto desempeño de la gerencia, ha auxiliado eficazmente a los señores secretarios y tesorero en sus diferentes funciones. Recomiendo a la asamblea a este celoso empleado, como igualmente a sus muy eficaces colaboradores, señores Adolfo E. Porral, Benito López y Claudio López, quienes dentro de sus modestas esferas han cumplido correctamente con su deber.

Señores consocios:

Con este acto termina mi intervención en la marcha administrativa de nuestra asociación.

Durante el largo tiempo de dos períodos consecutivos que he presidido la Sociedad Científica Argentina, merced a vuestra decisión tan honrosa para mí, he tratado de corresponder a vuestra confianza en la forma más conveniente. Si más no hice, atribuídlo a mi insuficiencia.

Pero no quiero despedirme de vosotros sin hacer constar el apoyo amplio, generoso, de los miembros de las juntas directivas que me acompañaron.

S. E. Barabino.

DEL PASADO DE NUESTRA TIERRA

Por el ingº OTTOMAR SCHMIEDEL

I

Una brisa deliciosa del mar acaricia la playa. El movimiento de las olas, monótono y suave en su continuo vaivén, ejerce un efecto apaciguador sobre los seres sensibles, en contacto con la naturaleza.

Una faja obscura, anunciadora de una tempestad, asciende lentamente en el horizonte. Acércase la faja amenazante cada vez con mayor rapidez y de repente sobreviene la tormenta. Ráfagas de viento levantan y remolinan la tierra. Silbidos cada vez más fuertes llenan el aire y pronto se desencadena, rugiendo, un huracán de terrible violencia, que deja sumida toda la naturaleza en el caos de los elementos en lucha...

Al siguiente día despierta la playa bajo los primeros rayos de un sol radiante. La mirada examinadora, vagando sobre playa y barranca, descubre los efectos devastadores de las olas y del huracán que azotaron furiosamente la costa y desarraigaron árboles y arbustos. Algas, peces y mariscos de todas clases, arrojados por las olas sobre la playa, yacen aquí y allá a medio cubrir por el fango.

No muy lejos hase derrumbado y desaparecido con las olas una buena parte de la barranca, socavada hace ya tiempo en gran extensión. Y muchos de los seres, a los que la barranca ofrecía refugio en sus cuevas, terminaron en este derrumbe con su existencia. Vientos y olas, fuerzas eternamente destructoras y constructoras al mismo tiempo, cumplieron en ese día tempestuoso con su misión de historiadores de la Tierra y llenaron con letras, visibles todavía después de

millones de años, una página en el diario de nuestro globo, vale decir, en su costra.

Millones de años después, al rededor de nosotros vese un paisaje hermoso y pintoresco como sólo pueden ofrecerlo las cumbres altísimas de las cordilleras, cubiertas con el albo y brillante ropaje de las « nieves eternas ».

Ventisqueros de un brillo blanco-verdoso bajan hasta las faldas y en los valles una vegetación exuberante demuestra la existencia de condiciones insuperables para el desarrollo de la vida orgánica.

Fig. 1

En cierto lugar, a 3000 ó 4000 metros sobre el mar encontramos un pequeño grupo de hombres. Son representantes de la ciencia. Examinan los estratos, recogen los hallazgos fósiles y estudian todos los detalles que podrían echar luz sobre las cuestiones geológicas, cuya solución se oculta en la densa niebla de los tiempos prehistóricos. Numerosos son los hallazgos que ya han hecho en aquella región. En los estratos de la misma formación halláronse, en estrecha vecindad, fósiles de seres marítimos y otros de seres terrestres. ¿Cómo explicarse todo esto? ¿Es que el mar haya alcanzado en otros tiempos hasta esta altura? ¿Es que la cordillera de hoy era tal vez fondo del mar? El examen de los diferentes estratos en cuanto a su posición,

dislocación y sobreposición contesta a las dos preguntas formuladas (fig. 1).

Las capas terrestres de la misma formación, sobrepuestas a manera de escamas, erigidas y revueltas sobre sí mismas, demuestran claramente la acción de fuerzas horizontales, bajo cuyo efecto se formaron los pliegues del terreno, que acentuándose más y más bajo la acción continua de las mismas fuerzas, llegaron a culminar en la gigantesca cordillera. No es que el mar haya alcanzado hasta la altura en que encontramos los restos petrificados de su fauna y de su flora; es la tierra la que se levantó, llevando consigo los fósiles. Mezclados con frecuencia en la misma capa y en aquella región los signos petrificados de la vida marítima con la vida terrestre, descorren, a través de millones de años, el manto de nieblas que oculta el estado geogénico de la edad prehistórica, a la vista de aquellos estudiosos. Ven el mar y ven la costa, ven las olas agitadas y escuchan el rugir de los elementos en lucha. Saben que pisan allá tierra de aquella costa antes descrita, y acaban de descifrar una de esas páginas del diario terrestre que escribieron los historiadores, viento y olas, millones de años atrás.

Un paisaje tropical. Sobre el suelo húmedo la vegetación exuberante forma un tejido de ramas impenetrable aun para los rayos del sol. Las plantas, sedientas de luz, emplean miles de ardides para gozar del sol y del aire. Unas buscan la altura trepando a los troncos de otros árboles vecinos; otras, más astutas y cómodas, se sientan holgadamente en las coronas de ellos. Y los árboles, creciendo, llevan consigo a la altura y a la luz aquellas plantas astutas y a veces parasitarias. ¡Una imagen fiel de la vida! En el fondo, debajo del follaje tupido, en atmósfera tibia y malsana acechan reptiles y serpientes a sus víctimas. El sol abrasador, el suelo húmedo, la evaporación de un ancho río de poca profundidad, cuyas aguas parecen estancadas; todo contribuye para desarrollar en este ambiente propicio las formas de una vida voluptuosa y exuberante. Ante este paisaje tropical surge espontáneamente la comparación con otro similar. Vagando la mente a través de los millones de años del pasado, llega a detenerse en el cuadro que nos formamos del paisaje en el tiempo carbonífero, que difiere de nuestro cuadro tropical sólo en cuanto a las formas de la vida (fig. 2).

La vegetación de la época permo-carbonífera revela todavía, con claridad, el origen acuático de la vida y al mismo tiempo la tendencia

a la adaptación. Mirando ahora el futuro a través de millones de años, no sería difícil predecir para partes de nuestra vegetación tropical la misma carbonización anotada, siempre que estén expuestas a las condiciones de la petrificación a que lo estuvieran aquéllas.

En medio de esta vegetación exuberante nos llama la atención una roca de enorme dimensiones, asentada y hundida aisladamente en el suelo. Sus dimensiones y sus formas merecen igualmente la atención, pues los cantos bien redondos, las caras planas y lisas y los huesos esféricos revelan claramente la acción pulidora de una influencia mecá-

Fig. 2

nica. ¿Cuál ha sido esta acción mecánica? ¿Cuál ha sido el origen de esta roca que, evidentemente, no corresponde a los estratos en que se encuentra asentada? A poca distancia, 4 ó 5 leguas de nuestro lugar, empieza a cambiar el aspecto. Acentúanse más y más las odulaciones del terreno, llegando paulatinamente a formar una cadena de montañas, cuyas siluetas azules sirven de fondo a nuestro paisaje. Asombra notar que las rocas desnudas de las montañas demuestran en parte las mismas características y la misma composición que aquella roca aislada que notamos en el medio de la selva tropical. ¿Es que tal vez haya una relación entre ellas?

La ciencia ha dado la respuesta a todas estas preguntas, pues de estudios comparativos pudo sacarse, inequívocamente, la conclusión

de que, en esta región habían operado el agua y el hielo como verdaderos historiadores, imprimiendo a las rocas los sellos de su acción. En presencia de tales testigos elocuentes, nuestra mente remonta nuevamente a los tiempos prehistóricos. Desaparece ante nuestra vista el paisaje tropical, lleno de una vida voluptuosa, y surge el cuadro desolador de un desierto blanco e impresionante, correspondiente a un «tiempo glacial». Y estos ventisqueros, en su marcha hacia abajo, llevaron consigo bloques enormes de piedra, transportándolos hasta que quedaron depositados en un lugar, leguas y le-

Fig ·3

guas distante de su punto de origen. Y así como aquel bloque errático desempeña para esta región, en medio de una vegetación tropical, su papel de testigo de un tiempo glacial prehistórico, así, por otra parte, las petrificaciones revelan una vida exuberante en tiempos remotos para regiones en que hoy el clima polar sólo permite el desarrollo de una vida precaria y pobre.

Múltiples son los enigmas que presenta nuestro globo. La paleontología y la teoría de la evolución permitieron establecer bases para juzgar sobre la existencia prehistórica de puentes naturales de comunicación entre los diferentes continentes. Basándose en estos fundamentos, debería suponerse que continentes enteros desaparecieron en los océanos. Así, por ejemplo, deberían haberse hundido partes muy

considerables del antiguo continente Gondwana, que se extendiera desde la América del Sur, sobre África, hasta Australia y cuya existencia se reconoce, por lo general, para todo el tiempo prehistórico hasta mediados de la era secundaria (fig. 3).

En el período de la formación jurásica, es decir, a mediados de la edad secundaria, aparece en el mapa de la tierra Gondwana la primera alteración importante. La parte entre África y Australia ha desaparecido, quedando, sin embargo, todavía una comunicación peninsular entre África y el Decan (fig. 4).

Fig. 4

Las últimas grandes revoluciones geológicas se produjeron en la edad terciaria, en que, finalmente, desapareció no sólo esta mencionada península sino también toda la comunicación entre África y América del Sur, quedando establecido, en lo esencial, el carácter del mapa mundial de hoy (fig. 5).

Sobre los procesos que condujeron a revoluciones geológicas tan gigantescas hay diferentes opiniones entre los geólogos y geofísicos. La mayoría sostiene todavía la teoría de la contracción, según la cual las desigualdades en la superficie de la tierra tuvieron como causa el encogimiento del núcleo terrestre, originado por el continuo enfriamiento. La tendencia del núcleo a retirarse de la costra enfriada y endurecida tendría que poner a ésta en las condiciones de una esfera hueca, dotada por los efectos de la gravitación con las características

estáticas de una bóveda esférica, teniendo que producirse en ella, consiguientemente, los empujes tangenciales, propios a las bóvedas. Y estos empujes se los consideraba como las fuerzas creadoras para los pliegues, que la superficie nos presenta en sus montañas y valles, pues las montañas más prominentes de la tierra son de carácter plegado. Comparábase también la tierra vulgarmente con una fruta seca cuya superficie se encuentra en estado arrugado.

Si bien la teoría de la contracción es, por lo general, todavía aceptada, algunas importantes observaciones geofísicas, sin embargo,

Fig. 5

abrieron completamente nuevos horizontes conduciendo en primer lugar a la teoría de la isostasia, es decir, la teoría del equilibrio de las presiones en ciertas profundidades. Según esta teoría, la costra se halla en estado flotante en la materia de la segunda envoltura (barysfera), que se encuentra en estado líquido inmediatamente debajo de la costra y cuyo peso específico es un poco mayor que el de la materia de la costra.

Es natural que en este caso deberían regir todas las leyes aplicables al estado flotante de un cuerpo sumergido en un líquido de una densidad un poco mayor. Ellas dan la explicación del fenómeno del levantamiento de extensas regiones continentales, que en tiempos remotos estaban cargadas de una capa de hielo de mil y más metros de espesor (Escandinavia y ciertas regiones de Norte América).

Reconociéndose por un lado, en este fenómeno, la acción del empuje vertical del medio líquido, el hecho de que esa acción todavía perdure facilita por otro lado una hipótesis relativa al estado elástico de las materias en cuestión.

La aproximación del intervalo de tiempo pasado desde la época en que aquellas regiones de la América del Norte y de Europa estaban cubiertas por capas inmensas de hielo — es decir, desde el último tiempo glacial, — ha dado, por parte de los geólogos, muy diferentes resultados, pero puede considerarse un término medio de 25000 años como generalmente aceptado. Y no obstante este intervalo pasado obra todavía el empuje, levantándose, por ejemplo, la parte central de Escandinavia más o menos un metro por siglo.

De esto puede sacarse, por consiguiente, dos conclusiones. En primer lugar, deberá considerarse la costra dotada de una resistencia a la flexión, la cual sólo permite la deformación de la parte empujada lentamente y con mucha posterioridad. En segundo lugar, puede deducirse que el medio líquido no se encuentra en el estado de mucha fluidez, sino más bien en un estado pastoso. En todo esto tenemos, pues, también, una explicación para la formación de capas de sedimentos, cuyo espesor puede alcanzar algunos miles de metros y las cuales, como revelan determinadas circunstancias, no pueden ser consideradas sino como productos de una acción sedimentativa en mares de poca profundidad, que no pase, por ejemplo, de unos centenares de metros.

El fondo de este mar cede bajo el peso de los sedimentos, pero siempre con mucho atraso, de modo que la capa sedimentaria puede alcanzar un espesor notablemente mayor que la primitiva profundidad, y al mismo tiempo disminuye ésta poco a poco hasta quedar llenada la concavidad total con sedimentos.

Bajo el efecto de fuerzas horizontales, estas capas terrestres se plegarían; se levantarían y se formarían cordilleras, llevando a las alturas todo lo que la acción sedimentativa había encerrado en el fango, el cual conserva así formas de la vida durante millones de años.

Pero el juego de las fuerzas geogénicas parece eterno. Aire frío y calor atacan las capas sedimentarias y destruyen con el tiempo las rocas más duras. Viento y lluvia son los medios transportadores y llevan consigo las masas eflorecidas, depositándolas en valles, llanuras y mares. Y a medida que las montañas pierden en masa y en peso el empuje vertical, resultante del medio líquido pastoso, obliga a subir la costra primitiva, de modo que otros millones de años des-

pués se levanta el gneis primitivo miles de metros hacia el cielo, en el lugar donde en otros tiempos murmuraba el oleaje de un mar.

Vemos, pues, que la teoría de la isostasia da a la costra terrestre una elasticidad mucho mayor que la supuesta en la teoría de la contracción, la que atribuye a la costra el carácter estático de una bóveda.

Hay, además, un argumento potente contra la teoría de la contracción: la diferencia topográfica fundamental entre las regiones continentales y las regiones oceánicas.

Los océanos de mayor profundidad cubren más o menos el 60 por ciento de la superficie total del globo, quedando para los continentes,

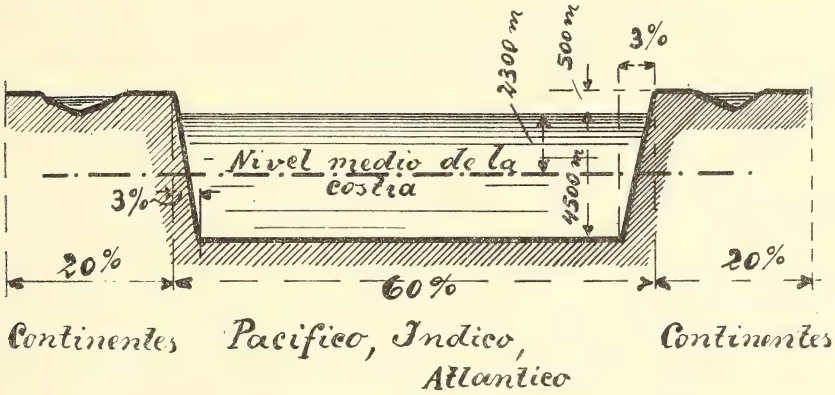


Fig. 6

con los mares de menor profundidad, el 40 por ciento. Transformado el globo en una bola exacta sin desigualdades, el mar, que envolvería todo el globo, tendría la profundidad uniforme de 2500 metros. Podría ahora suponerse que las desigualdades en la corteza variarían al rededor del nivel medio, que se encuentra a 2300 metros debajo del nivel del mar, de modo que el agua se acumularía, como se comprende, en las concavidades que procesos volcánicos o de otro carácter hayan originado. Estudiando, sin embargo, las profundidades de los océanos, vemos, con sorpresa, que ellos no se ajustan en nada a esta suposición de una irregularidad casual, pues en casi 9/10 partes de la extensión de los océanos hay profundidades mayores que 3000 metros, y en 2/3 partes de su extensión, los mares tienen profundidades mayores que 4000 metros. La profundidad varía para las 3/5 partes de su extensión de los mares al rededor de 4500 metros.

Tenemos, pues, a la vista, el resultado sorprendente que la corteza

terrestre presenta dos regiones esencialmente diferentes: la de los continentes, cuyo nivel medio está a 260 metros sobre el nivel del mar, y la de los océanos, habiendo entre ambos niveles una diferencia de altura de más o menos 5000 metros (fig. 6).

La costra terrestre se nos presenta con tres concavidades marcadas, teniendo el 75 por ciento océano Pacífico, el 75 por ciento del Indico y el 58 por ciento del Atlántico profundidades de 4000 a 6000 metros.

La singularidad de esta división en dos regiones, topográficamente

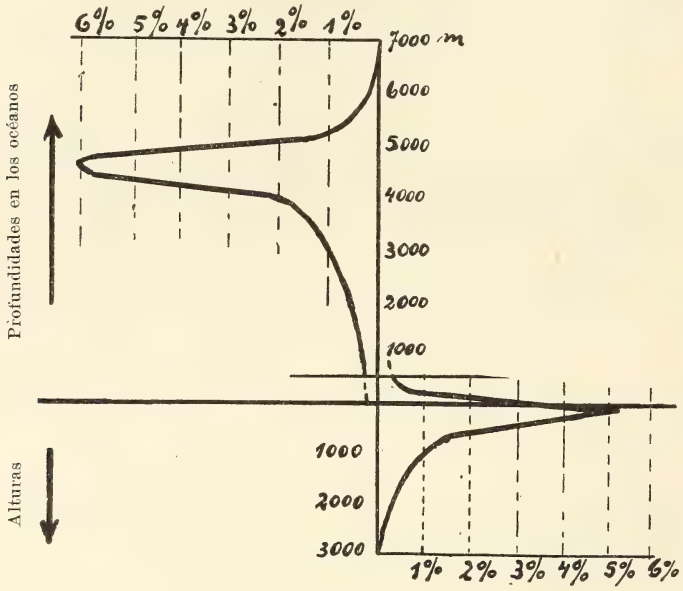


Fig. 7

tan diferentes, resalta a la vista al seguir las curvas que gráficamente representan el porcentaje de la existencia de determinadas profundidades. Estas curvas demuestran claramente dos máximas, de modo que no se puede sino prestar la mayor atención a este fenómeno, el cual revela la probable existencia de un proceso, muy diferente, sin duda, al proceso supuesto de la contracción (fig. 7).

Eran de suma importancia ciertas observaciones geofísicas que se hicieron con respecto a los valores de la gravedad sobre los continentes y sobre los océanos, pues permitían formar un criterio a base de la teoría de la isostasia sobre las profundidades relativas a que llegaron las masas de la costra. Mientras que por un lado podía suponerse

en la cumbre de las grandes montañas un valor de la gravedad, algo mayor que el valor normal, por otro lado debía esperarse lo contrario sobre los océanos, es decir, un valor de la gravedad que no alcanzara al normal. Las mencionadas observaciones, sin embargo, dieron como resultado que ni sobre las grandes montañas ni sobre los océanos los valores de la gravedad demuestran una diferencia muy esencial de la gravedad normal, pudiéndose, por consiguiente, deducir que las masas livianas, las de la litosfera o costra, tendrían debajo de las montañas mayor extensión en profundidad, mientras que debajo de los océanos las masas de mayor peso específico, las de la barysfera, o sea de la segunda envoltura, se acercarían más a la superficie. Así se compen-

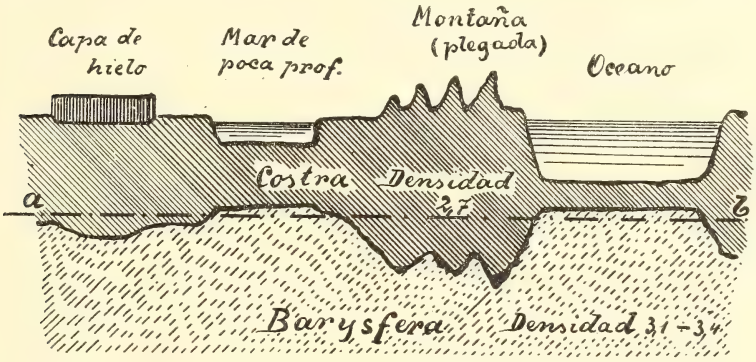


Fig. 8

sarían, respecto a la gravedad, las grandes desigualdades que marcan la costra de nuestro globo.

El concepto general, que debe resultar, según la teoría isostásica, referente a un corte vertical por la corteza terrestre, está representado en la figura 8.

Resalta claramente a la vista que en el plano *a-b* están reunidos las condiciones para un cuerpo en estado flotante, tanto más cuanto, por lo general, la temperatura de fusión, para muchas piedras de la costra, está en los 200 a 300 centígrados más alta que la de las piedras de la barysfera (segunda envoltura). Tal diferencia entre las temperaturas de fusión corresponde a una diferencia de profundidad entre 7 a 10 kilómetros, siempre que se admita como base el aumento geotérmico que conocemos para las capas más exteriores y que son 3 grados por cada 100 metros de profundidad. Hay, pues, la posibilidad de que puedan existir materias de la costra en estado sólido al lado de materias líquidas de la segunda envoltura.

II

LA TEORÍA DE WEGENER SOBRE LOS MOVIMIENTOS CONTINENTALES

Si bien la paleontología y la ciencia sobre la evolución de la vida crearon fundamentos seguros para establecer la teoría de las conexiones prehistóricas entre los diferentes continentes, no por eso quedaron fuertes dudas sobre el lugar, la extensión y hasta el carácter de esas conexiones.

Basándose, por ejemplo, sobre el concepto que se ha formado con relación al mapa mundial durante el tiempo de la formación triásica, con sus inmensas superficies continentales (fig. 3), debería suponerse justificadamente que la revolución geogénica, que notamos al comparar aquel mapa mundial con el de hoy y que se nota en el hundimiento aparente de extensísimas partes continentales hasta la profundidad de 4000 a 5000 metros bajo el mar, tendría que tener como consecuencia el levantamiento de otras partes de la costra sobre el mar, que en aquella época hubieran estado en el fondo del océano. En consecuencia, deberían existir sedimentos que revelaran su procedencia de mayor profundidad. Tales sedimentos no existen en extensión considerable, que no dejaran duda alguna sobre su procedencia de mayor profundidad. Al grupo de hombres de ciencia que sostienen la teoría de los puentes continentales a través de los océanos de hoy, fundándose en razones impuestas por la paleontología, está opuesto, por lo tanto, otro grupo de sabios, que son adherentes a la teoría de la permanencia de los océanos. Ellos se basan en razones geológicas y están convencidos de que los océanos de hoy, en sus contornos generales, han formado desde hace tiempo un rasgo característico de la corteza terrestre, mientras que al rededor de ellos ha habido modificaciones notables en el aspecto y conjuntos de los continentes y de los mares.

Ahora bien, referente al océano Pacífico, los hombres de ciencia, en su mayoría, están de acuerdo en que se trata de una formación que, en extensiones considerables, ya existía en los tiempos remotos. En cuanto al Atlántico y al Índico, sin embargo, surgieron discusiones entre los representantes de los dos grupos, de los cuales se separó finalmente un tercer grupo, el cual, renociendo los fuertes fundamentos de la paleontología, admitía puentes estrechos de comunicación al margen de los océanos, mediando así entre las opiniones irre-

conciliablemente opuestas. En tal estado de cosas asume proporciones de altísimo interés la teoría de Wegener sobre los movimientos continentales, por cuanto no solamente da una explicación, que encierra en sí los fundamentos de carácter paleontológico y los de carácter geológico, sino también para ciertos fenómenos climatológicos, así por ejemplo los tiempos graciales, los que sin los supuestos movimientos de los continentes siempre ofrecerían un enigma grande de la geogenia.

La idea de que pudiera haber habido movimientos horizontales en la costra terrestre ha sido concebida ya antes por varios geofísicos, pero Wegener fué el primero que acumuló todos los datos, de los cuales podía sacarse la conclusión sobre ciertos sucesos en la corteza, estableciendo después su teoría de que los continentes están sometidos a fuerzas que tienden a llevarlos en dirección oeste y hacia el ecuador.

La teoría estriba, en primer lugar, en la de la isostasia, admitiendo Wegener, sin embargo, las consecuencias del estado flotante no sólo para la dirección vertical, sino también para la horizontal. En un punto varía la hipótesis de Wegener, con relación a la corteza de la establecida por la isostasia, la que fué presentada en la figura 8. Mientras que según ésta la costra abarca todavía el globo en toda su superficie, el mencionado geofísico modifica esta hipótesis sosteniendo que el fondo de los océanos de mayor profundidad consistiría ya de materia enfriada y endurecida de la barysfera (segunda envoltura), de modo que los continentes fueran bloques aislados, o islas, en ella. La figura 9 representa un corte vertical según la suposición de Wegener.

¿Cuáles son las razones fundamentales para esta teoría, que, desde hace pocos años, preocupa a los hombres de ciencia? Observemos atentamente el aspecto de un globo terráqueo. Lo merece, pues la figuración de los contornos de los continentes, etc., y la topografía en general ofrecen algunas singularidades típicas. ¿Cuáles son?

1ª Una diferencia característica entre la costa oeste del continente americano y la costa este de Asia, es decir, entre las costas este y oeste del Pacífico. Mientras que la costa de América demuestra una sola línea bien pronunciada y cerrada, la costa este del continente asiático, en cambio, se presenta muy desmembrada. Un conjunto de islas y penínsulas forma una especie de guirnalda, que se compone de varios núcleos. Empezando en el norte con las islas Aleucianas puede notarse hacia el sur, hasta Borneo, 6 arcos bien pronunciados;

2ª Dos elevaciones montañosas principales y gigantescas que caracterizan la topografía de los continentes. Una de ellas corre en dirección de oeste a este, a través de Europa y Asia. Abarca los Alpes, el Cáucaso y culmina en el Himalaya. La otra corre a lo largo de toda la costa oeste del continente americano;

3ª Un paralelismo sorprendente entre la costa oeste de África y la costa este de América del Sur.

Además de estas tres características, llama la atención la figuración de las costas nordeste y noroeste del océano Índico. Las partes continentales que forman la costa noroeste (penínsulas de Somali y Arabia) demuestran una orientación tal como si fueran arrastradas

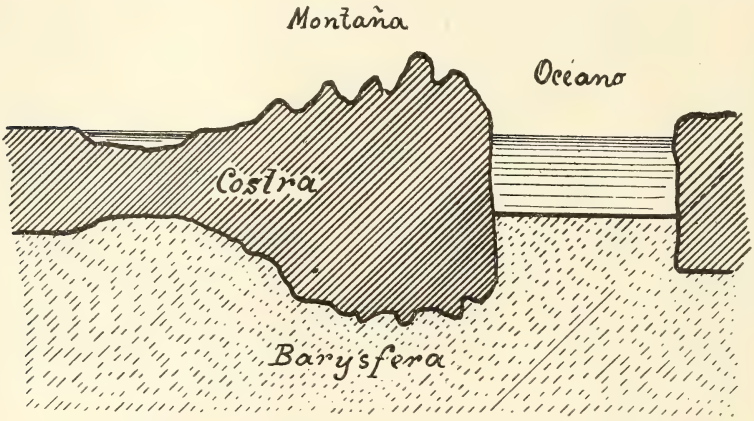


Fig. 9

por una fuerza tangencial en dirección al Himalaya (fig. 10). La hipótesis de que pudieran haber obrado tales fuerzas encuentra una confirmación clara en la existencia de las grandes hendeduras de la corteza, que marcan la base oeste del triángulo formado por la península Somali. Este sistema de grietas prosigue, en dirección al norte, por el mar Rojo y el valle Jordán.

Igual impresión nos surge al mirar la parte nordeste, pues la península Malaca y la isla Sumatra parecen arrastradas hacia el norte, es decir, hacia el Himalaya, demostrándose este arrastre hipotético no sólo en el conjunto de la figuración, sino también en los rasgos topográficos de aquellas tierras.

Es justificado suponer que el continente asiático haya sido, antes de la formación de los pliegues del Himalaya, de mucha mayor extensión, en dirección norte-sur, de lo que es actualmente. No es, pues,

sino lógico imaginarse una relación de causalidad entre el encogimiento del continente hacia el norte y la figuración de las costas, que revela la acción de un arrastramiento. Tomando en cuenta que la densidad del medio flúido-pastoso (barysfera) es solamente un poco mayor que la de las masas flotantes (costra) resulta claramente, según las leyes hidráulicas, que cualquier empuje horizontal con efecto plegador para la corteza producirá un desplazamiento de masas mucho mayor hacia abajo que hacia arriba, de modo que los visibles pliegues del Himalaya no pueden sino representar una pequeña parte del encogimiento efectivamente realizado. Las materias empujadas hacia abajo en la barysfera deberían fundirse a cierta profundidad y extenderse debajo del continente. Wegener calcula para la región en cuestión unos 3000 kilómetros, como mínimo, de extensión habida en dirección sur, de modo que debería haber llegado hasta Madagascar.

El puente lemuriano — la comunicación entre África y Asia — no se hundió sino se retiró, una vez desprendido el puente de África hacia el norte, acortándose siempre más y más. Sus masas desaparecieron en los pliegues del Himalaya. El Decan de hoy representa el resto de aquella península, que en otros tiempos alcanzara hasta el África del Sur.

La interrupción de la comunicación entre África y Asia sucedió, según la opinión general, al final de la era secundaria. Al principio de la edad terciaria no existía aún el Himalaya, pues las aguas del «mar de Obi» inundaron una ancha faja del continente asiático en dirección norte-sur, depositando en su fondo sedimentos, los cuales, sin embargo, a fines de la misma era, se encontraron levantados a miles de metros hacia el cielo, cubriendo los pliegues de la inmensa montaña nacida durante el tiempo terciario: el Himalaya. Entre la edad terciaria y cuaternaria formáronse aquellas referidas hendeduras del este de África, cuyo representante principal tenemos en el mar Rojo, y que revelan con claridad la acción de una atracción inmensa seguida en dirección a la montaña mencionada.

Vemos, pues, que el orden de los sucesos geológicos, y de sus tiempos respectivos, conducen a la hipótesis de que se trata de una sola revolución geológica la que produjo la formación del Himalaya mediante un encogimiento enorme de la corteza en dirección al norte.

Dediquemos ahora alguna atención a la costa este de Asia, que se distingue, como llevamos dicho, por una guirnalda formada por islas y penínsulas (fig. 10). Mirando esta región en el mapa, surge espontáneamente la idea de que pudieran haber obrado, en su formación,

fuerzas sometidas a una ley geogénica bien determinada, tanto más cuanto no sólo la figuración geométrica induce a tal suposición, sino también las características topográficas de los eslabones. El lado cóncavo de ellos se distingue por su carácter volcánico, mientras que

Fig. 10

en el lado convexo existen generalmente hendeduras estrechas y profundas en el fondo del mar. Ellas alcanzan una profundidad de 6000 metros o más, mientras que el fondo del mar tiene allá al rededor de 4000 metros. Los lados convexos de los eslabones contienen, además, sedimentos de la edad terciaria, faltando tales sedimentos, en cambio, completamente en la costa misma del continente. Podría deducirse, por lo tanto, que en la era terciaria los eslabones estaban todavía

«pegados» al continente, y que ellos se han ido alejando desde aquella época poco a poco hasta alcanzar su actual distancia y posición. Dada la figuración típica con que se presenta la costa tratada, dió origen ya antes a la idea de que esta formación se debiera probablemente a la existencia de una fuerza de atracción en el fondo del mar, pudiéndose calificar esta idea como el primer paso hacia la hipótesis de Wegener, quien sostiene que todo el continente tiene la tendencia de moverse en dirección oeste. Los eslabones serían, según él, partes anteriores del continente sobre las que obrase por un lado la atracción por el continente y por otro lado una resistencia en el fondo del mar, debida a la cual habrían quedado poco a poco alejadas de su tierra madre.

La hipótesis de Wegener está fundada en un examen minucioso de los detalles topográficos de la región, para la cual tiene una importancia especial el hecho de su carácter montañoso, corriendo los pliegues terrestres a lo largo de la costa. Considera que la formación de tales pliegues debe facilitar, por otra parte, la separación entre sí, siempre que obrasen fuerzas en tal sentido y como fuerza de tal carácter indica la que produjo la formación del Himalaya.

Fenómenos geofísicos hacen suponer que el encogimiento de Asia todavía perdura.

La figura 11 da, en forma esquemática, el juego de fuerzas, del cual, según la topografía de la región, debe resultar el desprendimiento de la cadena o pliegue extremo, como se indica en la figura misma.

La atracción ejercida todavía por el continente sobre el eslabón en sus dos puntos extremos de conexión tiene como consecuencia una fuerte presión en el lado cóncavo, que explica suficientemente los sucesos volcánicos, como asimismo la tendencia de abrir hendeduras en el lado exterior, pues el fondo del Pacífico, por su edad, representa indudablemente una región fuertemente enfriada. Su actitud para ceder elásticamente a fuerzas de tracción, lógicamente, debe ser menor en tierras cuyo enfriamiento ha sido menos profundo.

Esta hipótesis asume cierta importancia al observar hendeduras profundas cerca de las costas exteriores de Java y Sumatra, acentuándose así la impresión de un arrastramiento de estas islas hacia el norte.

Deduciendo el mencionado geofísico alemán, por la formación de la costa este de Asia, un movimiento del continente asiático en dirección oeste, surge la pregunta de si hay otros argumentos que apoyen la hipótesis de movimientos continentales. En su contestación nos

encontramos con uno de los más interesantes capítulos de la teoría Wegener, en que sostiene la conexión prehistórica e inmediata del continente americano con Europa, Asia y África en un solo bloque. (Debido al paralelismo marcado de las costas correspondientes de África y América del Sur, la idea de que los dos continentes hayan sido en otros tiempos uno solo, fué pronunciado ya por Pickering. Su

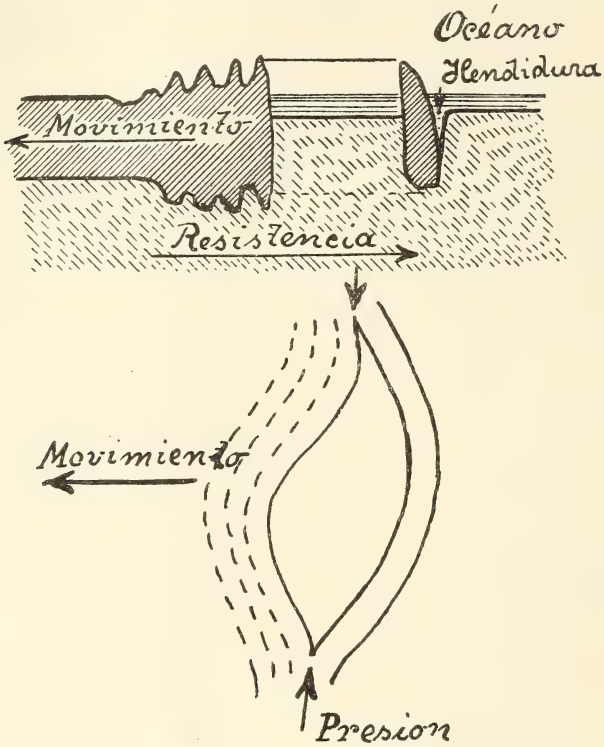


Fig. 11

hipótesis, en lo que se refiere a las fuerzas que arrancaron América de África, no coincide, sin embargo, en nada con la suposición de Wegener.)

Así como la formación del Himalaya fué precedida por la interrupción del puente lemuriano entre África y Asia, así observamos en la edad terciaria sucesos análogos entre África y América del Sur; la interrupción de la comunicación de los dos continentes (desaparición de la tierra Gondwana) y la elevación de las cordilleras en la costa oeste de América. Nos recordamos del sorprendente paralelismo entre África y América del Sur.

¿Sería posible que América, en una época remota, se haya desprendido de África y que la presión en el fondo fuertemente enfriado del Pacífico, producida por la tendencia del movimiento occidental de las masas continentales, haya originado las plegaduras de aquella inmensa montaña que se levanta a lo largo de la costa como una valla gigantesca? La forma cerrada de toda la costa, el descenso abrupto hasta las profundidades de 4000 metros, a que alcanza el mar en esos lugares, todo esto coincide con los efectos que debíamos esperar de tal empuje.

El hecho que en el oeste las cordilleras presentan, en parte, un carácter pronunciadamente volcánico no significa nada contra la teoría, por cuanto simultáneamente con las plegaduras deben haber crecido las presiones que caracterizan las fajas costaneras, y que deben originar hundimientos parciales con sus correspondientes fenómenos volcánicos.

Es claro que las deduciones basadas solamente sobre la impresión no pueden tener valor científico mientras no estén apoyadas por un conjunto de argumentos más importantes.

Ahora bien: Wegener resconstruyó minuciosamente la posición de los continentes para la época eocena, determinando los contornos continentales dentro de ciertos límites de inseguridad, que se imponen en cuanto al valor efectivo en extensión plana de las plegaduras terrestres posteriores al eoceno. La figura 12 da la hipotética configuración de los continentes y en ella interesan especialmente los datos de carácter geológico-topográfico, que apoyan notablemente la teoría.

La figura 12 es una representación a lo largo de un meridiano, que aproximadamente coincide con el de Buenos Aires con prolongación sobre los dos polos. Éstos, sin embargo, no están en su situación actual. Resulta en la reconstrucción una notable coincidencia referente a singularidades tectónicas entre los continentes unidos. La isla Groenlandia demuestra en tres puntos de su periferia una correspondencia sorprendente en cuanto a dislocación y material de los estratos con otros tres puntos, que pertenecen, sin embargo, a Spitzberge, Grinnellandia y Labrador. En la reconstrucción encuéntranse los puntos correspondientes como puntos inmediatamente vecinos. En el par de puntos de Groenlandia y Grinnellandia la coincidencia está representada por el límite entre los estratos triásicos y devónicos.

Más al sur se notan tres curvas: una punteada, otra dentada y además una de líneas dobles, en forma de faja. Cada curva repre-

senta una plegadura bien determinada. La punteada es del Algonkinm, la dentada es caledónica y la faja es armónica. Las tres curvas no demuestran discontinuidad alguna al paso del continente europeo-asiático al americano. La parte más convincente de este conjunto la ofrecen, sin embargo, América del Sur y África, pues la congruencia no se limita sólo al paralelismo sorprendente de las correspondientes costas sobre una longitud considerable, sino que se extiende también sobre características tectónicas. La dirección en que corren los pliegues terrestres se corresponden admirablemente en los dos continentes. En la parte norte, hasta la desembocadura del Niger, que corresponde al cabo San Roque en el Brasil, los pliegues corren en dirección nordeste-sudoeste y de los mencionados puntos al sur, los pliegues corren en dirección norte-sur. En la punta sur de África hallamos una plegadura de carácter carbonífero, que corre en dirección este-oeste. Ella tiene su continuación en América, al sur de Buenos Aires.

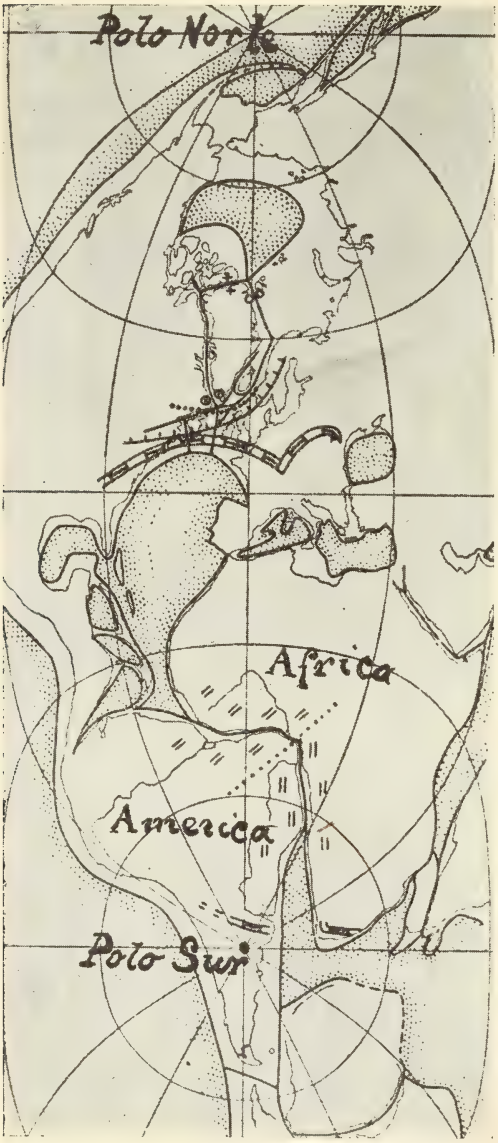


Fig. 12

Existen, pues, numerosos e importantes argumentos que apoyan la teoría de los movimientos de los continentes, teniendo que agregarse a ellos todavía la figuración de la América Central con las

Antillas, cuya formación demuestra analogía completa con la de la guirnalda de la costa de Asia. Además, merece atención la notabilidad que las salientes y brazos de los bloques continentales, en su mayor parte, parecen desviados hacia el oriente. Tal impresión surge al observar la figuración de las partes continentales, que forman el estrecho de Drake, la parte formada por las penínsulas de Siam y Malaca con las islas de Sumatra, Java y Borneo, después el Decan con Ceilán, etc.

Si bien numerosos indicios apoyan la hipótesis de movimientos continentales hacia el oeste, y si bien se declaran ya muchos sabios adictos a esta teoría, no ha sido posible, sin embargo, encontrar ex-

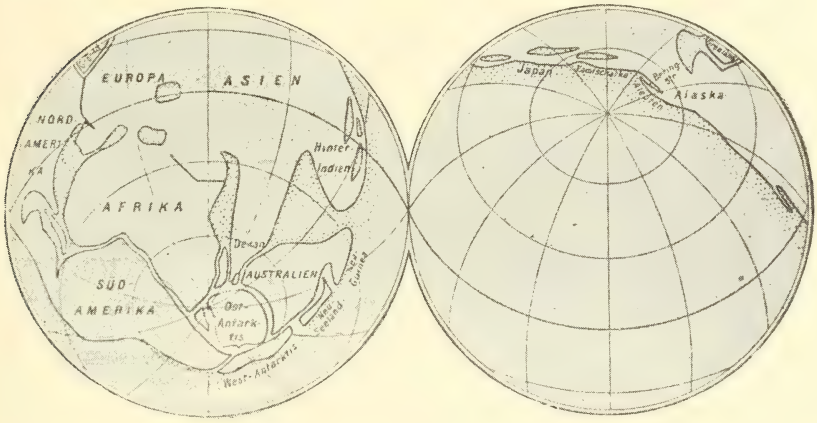


Fig. 13

plicaciones suficientemente plausibles para las fuerzas que originaron los movimientos, tanto más, cuanto ellos no pueden ser simultáneamente iguales para todo el globo. De otro modo no podría explicarse el hipotético alejamiento de América del continente de África-Europa.

Para Groenlandia se ha constatado un movimiento occidental que alcanza, desde el año 1823, aproximadamente 1200 metros.

La teoría de Wegener no abarca únicamente los movimientos occidentales de las masas continentales, sino también su hipotética tendencia de alejarse de los polos y moverse en dirección al ecuador. Ella supone que el ecuador de la edad terciaria haya coincidido aproximadamente con la línea dada por la plegadura Himalaya — Cáucaso, Alpes, — de modo que los polos en la era terciaria hayan estado en otra posición que actualmente. Admite, por consiguiente,

en las revoluciones geológicas, desplazamientos notables de los polos. Si bien un grupo de geólogos es adverso a la idea de la posibilidad de desplazamientos polares, entre los geofísicos, en cambio, venció la convicción de su probabilidad desde que estudios teóricos demostraron, bajo ciertas condiciones, que efectivamente pueden surgir. Tales condiciones existen probablemente en los desplazamientos de las masas de la costra. La idea de Wegener, en lo que se refiere a la variabilidad de la situación polar, corresponde a la del geofísico Kreichgauer, quién indica, a base de datos climatológicos, las líneas ecuatoriales para el tiempo carbonífero y para la era terciaria, como lo demuestra la figura 13.

Fig. 14

Esta figura interesa especialmente al compararla con la de la reconstrucción de los continentes, que Wegener da para el tiempo carbonífero (fig. 14).

Si se dibujaran los continentes de acuerdo a la hipótesis wegeneriana en la figura 13 de Kreichgauer, resaltaría a la vista que las plegaduras carboníferas y terciarias corresponderían suficientemente bien a las líneas ecuatoriales respectivas. Al mismo tiempo tenemos así una confirmación de la suposición de que el clima tropical debe ser el que ofrece las mejores condiciones para la carbonificación. Según Wegener, tenemos, pues, en los movimientos continentales hacia el oeste y hacia el ecuador, la causa de las correspondientes plegaduras meridionales y ecuatoriales, siempre que surja una resistencia contra el movimiento. Con relación a las fuerzas bajo cuyo

efecto resultan los movimientos y las plegaduras, como ya llevamos dicho, no hay suficiente claridad. Supónese que bajo la atracción del sol y de la luna pudiera resultar en las masas terrestres una ola de flujo semejante a la de los océanos que posiblemente tuviera un efecto de arrastramiento sobre los continentes en dirección occidental. Admitida tal hipótesis tendríamos en ella, también, la explicación para el hecho de que la hendedura principal en la costra, la del Atlántico, tiene una dirección meridional.

La supuesta tendencia de los movimientos meridionales encuentra una explicación en el estado flotante de los bloques continentales. El centro de gravedad de las fuerzas de empuje verticales se encuentra más cerca al centro de la tierra que el punto de gravedad del bloque flotante. Las dos elipsoides que contienen en su superficie los dos mencionados puntos de gravedad deben resultar algo diferentes, por cuanto la gravitación disminuye en las capas exteriores del globo con el aumento de radio, mientras la fuerza centrífuga siempre crece.

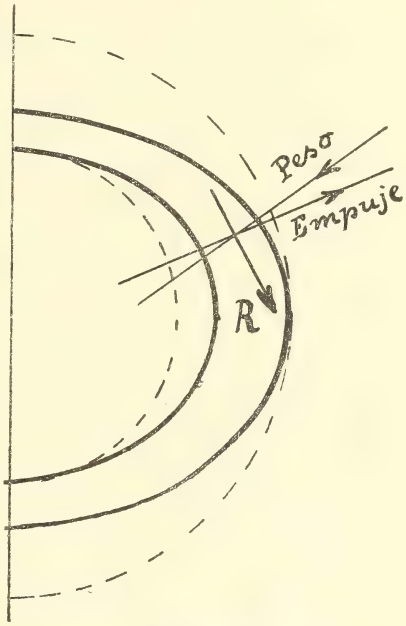


Fig. 15

La figura 15 demuestra gráficamente la acción de las dos fuerzas, cuya composición da una resultante con dirección al ecuador.

Interesa ahora saber cómo Wegener explica el suceso geogénico que condujo a la formación de bloques continentales, pues no cabe duda que la litosfera abarcaba al principio toda la superficie del globo. Cree que la primera grieta se haya formado sobre el Pacífico, debido a las mismas fuerzas que ejercen todavía hoy un efecto de arrastramiento sobre los bloques. Ve en la formación de la guirnalda en la costa de Asia la repetición, en escala menor, del suceso que en mayor escala condujo a la apertura de la litosfera sobre el Pacífico.

Es de suma importancia fijarse en el hecho de que la dirección de los movimientos continentales debe haber variado mucho en el

curso de los tiempos, debido a las dislocaciones polares. Por otra parte, debe repararse en la irregularidad con que se produjeron, sin duda alguna, las formaciones de las plegaduras hacia abajo y arriba, de modo que dado las diferentes posiciones de los centros de gravedad para el empuje y para el peso, debe contarse también con movimientos giratorios.

Fig. 16

Muy instructivo es en esta hipótesis el ejemplo de Australia. Fijándonos en la figura 14 resalta a la vista que este continente debe haber estado en las edades anteriores esencialmente bajo la influencia de la fuerza « polofuga », explicándose de este modo el alejamiento hacia el este. La plegadura en su costa este sería, pues, la consecuencia del empuje contra el fondo del Pacífico, y el levantamiento de ella se habría desarrollado bajo condiciones parecidas al de

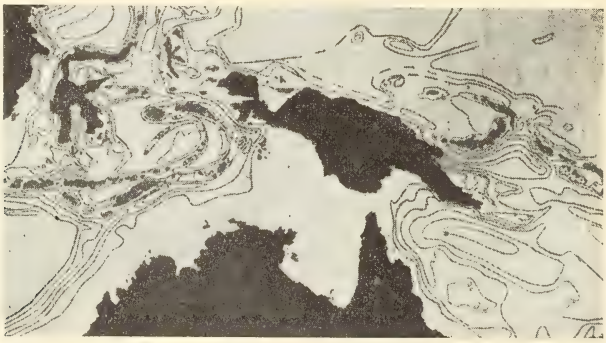


Fig. 17 *a*

los Andes. El mapa de Australia revela la tendencia de un movimiento en dirección noroeste, pues el continente parece penetrar

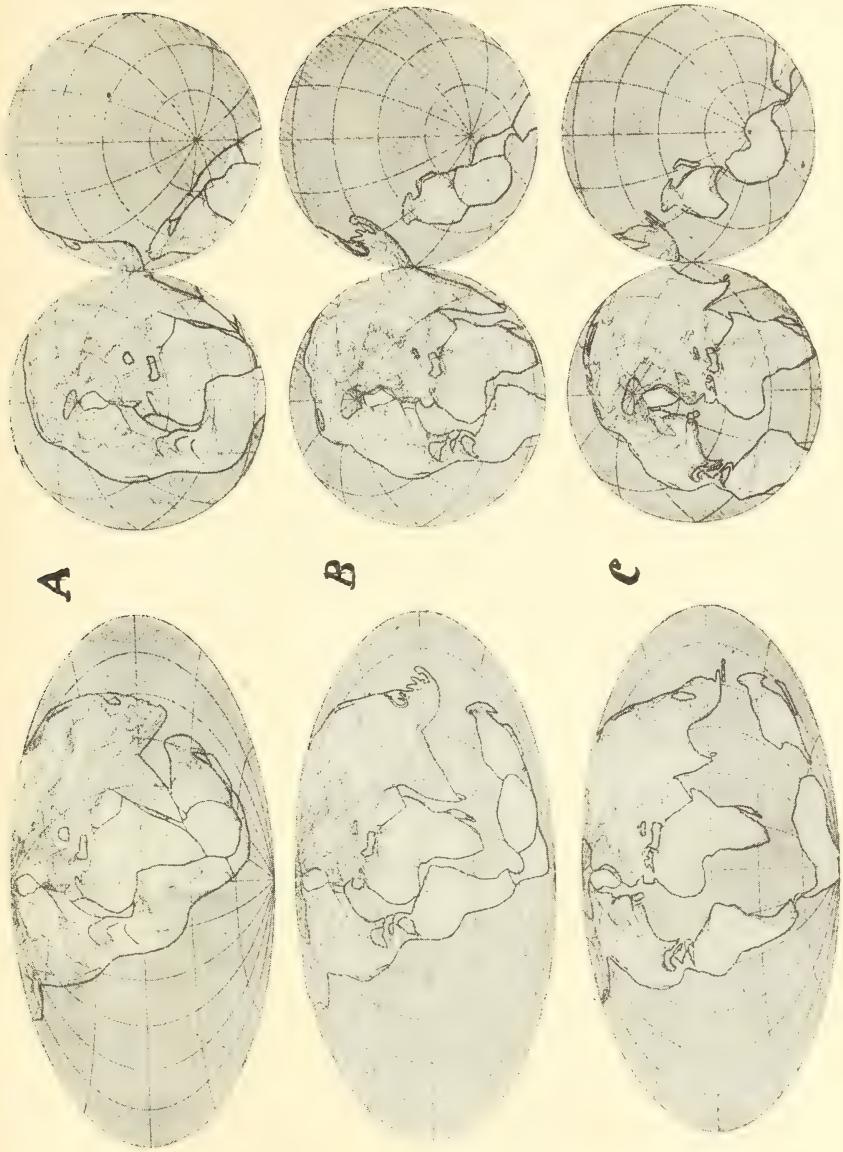


Fig. 17*b*. — Reconstrucción del mapa mundial para tres edades, según Wegener : A, Tiempo carbonífero superior ; B, Tiempo coceno ; C, Tiempo cuaternario inferior

en tal dirección en los archipiélagos de Bismarck y de Sonda (figs. 16 y 17*a*).

La impresión de una colisión en este sentido se acentúa al estudiar el curso de las líneas de igual profundidad, como demuestra para aquella región la figura 17 *a* (sacada de la obra misma de Wegener). La figura 17 *b* representa para tres edades prehistóricas las reconstrucciones continentales, según Wegener.

III

LOS TIEMPOS GLACIALES, SEGÚN LA TEORÍA DE WEGENER

La hipótesis de desplazamiento polares, en unión con la de los movimientos continentales, encierra en sí la posibilidad de explicaciones muy plausibles de fenómenos en la historia de la tierra, cuyo carácter enigmático ocupaba y ocupará siempre a los sabios: las anormalidades climatológicas.

Éstas se demuestran, por una parte, con el hecho de que la existencia de una vegetación tropical fué comprobada para otros tiempos, hasta latitudes muy altas (Spitzberge, Groenlandia) y, por otra parte, en el reconocimiento de que la acción glacial llegó en ciertos tiempos hasta cerca del ecuador actual.

Del tiempo pérmico, por ejemplo, encontráronse rastros de una acción glacial en Australia. Decan, África del Sur, Camerún, Togo, Rio Grande del Sur y en las islas Malvinas. La figura 18 representa el hipotético mapa mundial de aquella época, significando los puntos negros las partes de una acción glacial comprobada. Podría creerse, pues, que la zona glacial se habría extendido sobre todo el hemisferio sur y, efectivamente, hay muchos geólogos que comparten de tal opinión, tanto más cuanto varios astrónomos están inclinados a buscar la solución de los enigmáticos tiempos glaciales en el universo mismo.

Para el último tiempo glacial, por ejemplo, con que se inició la edad cuaternaria, se ha discutido la idea de que nuestro sistema solar haya pasado por partes poco densas de la nebulosa de Orión. Como ya habíamos dicho, la teoría de Wegener contiene otra solución, muy natural y aceptable. La figura 14 misma revela la explicación, pues todos los puntos de la zona glacial se encuentran situados a distancias entre sí, que no pasan del concepto que podemos formar-

nos de una zona polar de extensión regular. Es necesario mencionar que, aparentemente, en aquella época, los polos se han encontrado en un período de fuertes movimientos, de modo que resultaría explicado, en forma sencilla, el tal llamado tiempo glacial permo-carbonífero. Lo mismo sucede con el último tiempo glacial, llamado el « grande », puesto que muchos geólogos opinan que durante él hubo un descenso notable de temperatura sobre todo el globo. Wegener es, sin embargo, con otros geólogos, de la opinión de que los fenómenos glaciales no han sido simultáneos en los dos hemisferios. Opina que el tiempo glacial del hemisferio norte es posterior al del sur, que de-

Fig. 18

bería corresponder a la edad terciaria, y se encuentra en tal opinión con muchos paleontólogos.

Admitiéndose un desplazamiento polar de 20 a 25 grados, y basándose en la reconstrucción de los continentes, que Wegener da para esa época, en la figura 19, la zona glacial, limitada por la línea punteada, no representa sino una zona polar de extensión normal.

Según la teoría bosquejada, los tiempos glaciales encuentran una explicación fácil, que es tanto más aceptable por cuanto queda comprendida en el concepto que nos hemos formado de un desarrollo normal del proceso de enfriamiento de nuestra tierra, como también de una acción solar inalterable.

Como era de esperar, la nueva teoría fué aceptada en parte con entusiasmo y en parte refutada. Tal es siempre la suerte de ideas

nuevas, tanto más cuando atacan conceptos fundamentales de nuestras convicciones. En tal sentido, por ejemplo, la idea de la movilidad de continentos enteros resulta, indudablemente, extraña para muchos hombres, que consideran la extensión de los continentes, sus masas enormes, como garantía de su solidez y estabilidad, olvidando demasiado pronto los momentos de angustia mortal que pasaron, cuando fuerzas superiores sacudieron estos mismos continentes. Aún

Fig. 19

vibra en nosotros la emoción que nos causaron las noticias de la última catástrofe en la región sísmica de nuestro país vecino. Las alteraciones en la superficie terrestre, originadas por los terremotos, son, a veces, nada despreciables. En la región atacada por el terremoto de San Francisco, en 1906, resultaron, por la catástrofe, dislocaciones horizontales de dos a siete metros. El terremoto de Charleston (1886) originó un movimiento de masas continentales, cuya extensión abarcó en la superficie terrestre 2.300.000 kilómetros cuadradrados. También del terremoto de 1881, en el Japón, resultaron considerables dislocaciones terrestres. Estos hechos nos conducen, in-

mediatamente, a consideraciones con respecto a la importancia que debemos atribuir a los sucesos sísmicos para la alteración del aspecto exterior de nuestra tierra. El número de los temblores que se registran en todos los sismógrafos de la tierra es mucho mayor de lo que se cree generalmente. La estadística da por año de 100 a 150. Pero muchísimo mayor todavía es el número de los temblores que no alcanzan tal efecto y que no se registran sino en los aparatos de la región atacada. Según los trabajos estadísticos de Montessus de Ballore, puede constatarse que nuestro globo experimenta por año 3830 ataques sísmicos, o sea, por término medio, uno cada 140 minutos. No

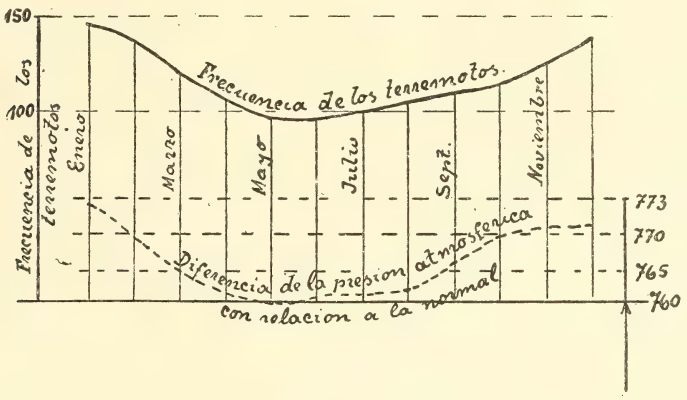


Fig. 20

es, pues, exagerado decir que nuestro globo, en su superficie, vibra continuamente.

Si nos ponemos sobre la base de la teoría de Wegener tenemos, lógicamente, en las fuerzas, que tienden a movimientos continentales, la primera causa para dislocaciones en las masas tectónicas, es decir, para la alteración del aspecto de la superficie. Las alteraciones mismas pueden realizarse en parte lentamente, en parte con cierta brusquedad más o menos notable, existiendo en el último caso, seguramente, la coacción de otras fuerzas, las que obran a través del espacio que nos separa de nuestro astro central.

La estadística de F. Seidl, con respecto a la frecuencia de los terremotos en Europa y en los diferentes meses del año, demuestra, claramente, una relación existente entre el número de los terremotos y la presión atmosférica.

La figura 20 da dos curvas, de las cuales una representa, gráfica-

mente, por sus ordenadas, la frecuencia de los terremotos, mientras las ordenadas de la otra representan la diferencia de presión atmosférica con referencia al estado normal. Por otra parte, existen relaciones entre ciertos fenómenos atmosféricos y las perturbaciones que notamos en la superficie solar, vale decir, las manchas. El número anual de los ciclones, por ejemplo, revela una proporción directa con la frecuencia de las manchas. Las perturbaciones magnéticas, que preceden a los terremotos o coinciden con ellos, confirman la suposición de una causalidad existente entre las perturbaciones solares y sísmicas, por cuanto todas las observaciones hacen resaltar una relación evidente entre las perturbaciones solares y las magnéticas terrestres.

Tenemos, pues, varios indicios que permiten sacar la conclusión de que existe una influencia de la acción solar sobre la alteración que experimenta la corteza de nuestro planeta.

Algunas veces se registran con extensiones mensurables, tales alteraciones, producidas por violentos sacudimientos, y otras veces, es decir, en la mayoría de los casos, no se notará sino un ligero temblor, indicio de que está en acción el juego eterno de las fuerzas devastadoras y creadoras al mismo tiempo.

Fuerzas internas de nuestro globo, cuyo equilibrio puede ser vencido por otras que tienen su origen en nuestro astro central, están en continua acción geogénica, y los hombres, en su afán de penetrar en las relaciones ocultas entre las fuerzas, no logran otra cosa sino comprender la sublime grandeza del misterio de la creación.

BREVES NOTAS CACTOLÓGICAS

Por SPEGAZZINI CARLOS

Han salido ya a luz tres de los tomos del monumental trabajo de los señores Britton y Rose titulado *The Cactaceae* o *Monografía general de las plantas pertenecientes a la familia de los Cactus o Tunas.*

Es una obra verdaderamente admirable por su volumen, por el esplendor de su impresión y por el espíritu práctico que informa sus páginas, viniendo a llenar el vacío sentido por todos los que se han ocupado o se ocupan de las plantas pertenecientes a esta familia, dada la imperfección de los trabajos anteriores; en nombre de todos los cactólogos y de los cactófilos tributo mi más amplio homenaje a los autores mencionados y los felicito por la manera con la cual han salido gloriosos y triunfantes de la ardua tarea emprendida y llevada a cabo.

Estas cortas notas que me permito imprimir no tienen ningún carácter agresivo y tampoco de crítica, sino tan sólo conceptos de rectificación a pequeñas deficiencias, discrepancias o malentendidos, que, como es natural, pueden existir en cualquier obra, especialmente en las de tanta mole, que abarque un material tan considerable y sobre todo de tan difícil preparación y conservación.

I. **Pterocactus Valentini** Speg. = *Pterocactus Hickeni* Britton & Rose *l. c.,* I, pág. 31.

Los autores norteamericanos fundan sus opiniones exclusivamente sobre inspección y comparación de *pretendidos tipos,* haciendo caso omiso de la descripción de los autores (para ellos no existen libros

que merezcan ser consultados) y tanto más si éstas son largas y detalladas, como lo son generalmente las mías. Pretenden, pues, que yo haya descrito la *Opuntia australis* Weber, como si no la hubiese jamás conocido, bajo el nombre de *Pterocactus Valentini;* eso confirma mi aserción anterior, de que los monógrafos mencionados ni han soñado leer el diagnóstico y descripciones de dicha especie *(Nova Addenda ad floram Patagonicam,* nº 145 y nº 939); hágalo, pues, el lector y verá que mi planta corresponde exactamente al *Pterocactus Hickeni* B. & R., y que nada tiene que ver con la *Opuntia australis* Weber, con la cual los mismos autores pretenden sinonimizarla.

Si se tratara de una especie desconocida para mí, paciencia, tal vez habría podido confundirla, pero no con ésta que conocía muy bien, y que en mis trabajos he citado varias veces *(Cactacearum platensium tentamen,* nº 107).

II. **Opuntia Spegazzinii** Weber.

Britton y Rose la sinonimizan *(l. c.,* I, pág. 73) con la *Opuntia Salmiana* Parm. No concuerdo con tal opinión; reconozco que ambas especies son muy próximas, pero las considero morfológica y biológicamente bien distintas, pues aún sin flores y de lejos pueden ser reconocidas. La *Op. Spegazzinii* es oreófila, de color verde ceniciento bien glauco, enderezada robusta, con ramas, flores y frutos de tamaño a lo menos doble de la *Op. Salmiana,* siendo tan espinosa y molesta como esta última y no « was supposed to be unarmed »; la *Op. Salmiana* es pediófila débil, irregularmente ramificada de color verde obscuro casi oliváceo; la *Op. Spegazzinii* puede considerarse como la transición entre *Op. Salmiana* y *Op. Schickendantzii.*

III. **Opuntia aoracantha** Lemaire.

Britton & Rose *(l. c.,* I, pág. 91), en las últimas tres líneas de la página que acabo de citar, confirman lo que he sostenido en las notas anteriores, es decir, de que los autores no han leído o han olvidado lo que escriben los autores anteriores a ellos; allí se dice: « *Op. aoracantha* although described nearly 80 years ago, is practically unknown ... » « The fruit has herefore been unknown. Dr. Rose found it in 1915 », pero ni se molestan de ampliar nuestros conocimientos al respecto, dando una descripción de dichos frutos. Consúltese, pues, mi modesto opúsculo *Cactacearum platensium tentamen* (1905 !), número

104, y hallarán allí no tan sólo los frutos descritos, sino también las flores.

IV. **Opuntia molinensis** Speg. (nom. nov.) = *Opuntia Schumanni* Speg. (non Web.), *Cactacearum platensium tentamen,* nº 106.

Es una excelente especie, de la cual me reservo de hablar ampliamente en otra ocasión, en la que pienso exponer mi criterio respectivamente a otras especies afines *(Op. glomerata, Op. Hickeni, Op. platyacantha* etc.), acompañándolas con oportunas fotografías de cada una.

V. **Cereus platygonus** Speg. = *Cereus argentinensis* Britt. & Rose.

Los autores cambian el nombre mío con el pretexto de que ya existía un *Cer. platygonus* Otto; pero como este último ha sido trasladado al género *Harrisia (Harr. platygona* (Otto) Britt. & Rose, *l. c.,* II, pág. 156), no existiendo ya homonimia, no hay necesidad de cambiar el nombre de mi especie, debiendo, pues, quedar tal como figura al principio de esta nota.

VI. **Trichocereus Spachianus** (Lem.) Riccobono = Britt. & Rose, *l. c.,* II, pág. 131. — *Cereus santiaguensis* Speg., *Cactacearum platensium tentamen,* nº 4.

Esta corrección a mi clasificación está bien hecha; es una especie de la Argentina central (y no *Western),* pues hasta ahora sólo la conozco de Santiago del Estero; la especie que figura en mi *Tentamen* como *Cereus Spachianus,* no es tal especie sino otra más humilde que ofrece mayores afinidades con el *Cereus candicans,* y que me reservo de publicar en otra oportunidad.

VII. **Cereus Bertini** Cels., **Cereus Duseni** Web., **Cereus patagonicus** Web.

Estos son los nombres de tres especies que forman un cúmulo de inexactitudes en la monografía de Britton & Rose; ellos sostienen que *Cereus Bertini* es diferente de *Cereus Duseni* y que este último es un simple sinónimo de *Cereus patagonicus.* Todo eso es debido tan sólo a que los autores mencionados no han leído lo que he publicado

relativamente a estas plantas en mis modestos opúsculos. Haré, pues, una historia detallada de cada una de estas tunas.

a) Cereus patagonicus Weber. Se menciona por primera vez en *Primitiae Florae Chubutensis* (XI-1897), bajo el número 59, donde se describe, breve pero claramente, su cormo, sus areolas, sus espinas y sus flores. Más tarde, en *Nova Addenda ad Floram patagonicam,* part I (III, 1899), bajo el número 132, se completa la descripción sumaria anterior, describiendo el fruto y las semillas del mismo.

Estos datos han sido parcialmente reportados en Schumann, *Gesamtbesc. der Kakteen, Nachtr.,* páginas 61-62, 1898-1902.

b) Cereus Duseni Weber. Su primera descripción incompleta aparece en *Nova addenda ad Floram patagonicam,* part I (III-1899), bajo el número 134, donde sólo se indican el cormo, las areolas y espinas «centralibus longioribus erectis *apice uncinato incurvis*», y se compara con el *C. Bertinii,* opinando, sin embargo, que se trate de una especie diferente. Algunos años después, en la parte IV (III, 1902) de las citadas *Nova Addenda ad Floram patagonicam,* bajo el número 937, se describen difusamente cormo y flores, mencionando también una forma, tal vez teratológica, delgada y rastrera. Por fin, en *Cactacearum plat. tent.,* con el número 31, se vuelve a dar una nueva y más amplia descripción de sus flores, *hecha sobre flores vivas !* Estos datos fueron transcritos en el *Monatsschrift für Kakteenkunde,* XV, 5 (15, V, 1905), página 67, donde se le agrega un interesante comentario.

c) Cereus Bertini Cels. (¿ l'Herincq ?). Esta especie apareció primeramente en l'Herincq, *Hort. Franc.,* página 251, 1863, como lo cita Schumann en las páginas 163-164 del *Gesamtb. d. Kakt.;* Britton & Rose mencionan la misma publicación, *Hort. Franc.,* II, 5, 251 (1863), mas agregan haber descubierto la lámina 14 del tomo II, entrega 7ª, del mismo periódico, donde se halla figurado el dichoso *Cereus Bertini,* lámina que ellos reproducen en su monografía.

Schumann *(l. c.)* da una descripción incompleta de tal tuna, pues no conocía la lámina exhumada por Rose. Britton & Rose, en *The Cactaeeae,* III, páginas 44-45, nos brindan una descripción mucho mejor del raro vegetal, con datos recabados o interpretados de la lámina en cuestión.

Recordaré que hubo también inseguridad con relación a la patria

de este *Cereus,* pues algunos autores indicaban el Paraguay (Schumann, *l. c.),* otros a Chile (Index Kewensis) y por último a Patagonia (Britt. & Rose). Estas divergencias son fácilmente explicables, pues todas derivan de una mala lectura de una vieja etiqueta borrosa con abreviación: Parag.-Patag. Hasta no ha mucho los chilenos pretendían que la Patagonia fuera de ellos, y de allí el error del Index Kewensis.

Tengo que mencionar y contestar la ocurrencia de los autores norteamericanos con ribetes de descubridores de South America! Ellos dicen: « Dr. Spegazzini, who knows Argentina well, was surprized to learn that such a plant was reported from southern Argentina. » Contestaré que no hay tal sorpresa, pues me acuerdo siempre que en una visita que hice a San Julián, en febrero de 1882, he tenido que bajar varias veces del caballo para libertar las patas del mismo de montones de esta especie, que se prendían por medio de sus largas espinas ganchudas; mas, le citaré un párrafo de la carta del doctor Weber, fechada el 10 de agosto de 1897, en la cual dice: « Des Isles Leones, Towa, etc., j'ai vu plusieurs variétés de *Echinocactus gibbosus* et *Cereus Bertini* Cels., espèce voisine du *Cereus patagonicus,* mais distinct par ses aiguillons crochus. M. Cels m'a dit aussi qu'il a reçu du même endroit l'*Opuntia Poeppigii* etc. etc. ... »

Expuestos estos antecedentes, pasamos, pues, a considerar el *potpourri* que hacen de las tres especies los señores Britton y Rose, y para aclararlo no nos queda más remedio que acudir al cuadro comparativo siguiente:

Partes comparatae	*Cereus Bertini*	*Cereus Duseni*	*Cereus patagonicus*
Cormus	cylindricus, erectus 15-40 alt. 10-15 cm diam.	cylindricus, erectus v prostratus 20-60 lng. × 3-5 cm diam.	cylindricus, caespitosus, erectus 20-50 lng. × 5-8 cm diam.
Costae	10-12, prominulae, obtusae	6-8-10 prominulae, obtusae	9-12, prominulae, obtusiusculae.
Areolae	orbiculares, novae tomentosae flavidae	orbiculares, novae tomentosae albo-subflavescentes	orbiculares, turgidulae, albo-toment.
Spinae	graciles elongatae ± 15	graciles elongatae ± 6-18	robustae rigidae, bulbosulae, ± 8-14.
Spinae periferic...	±8-10 tenuiores, circ 10 mm lng. rectae	± 6-10 tenuiores, 5-10 mm lng. rectae	8-10 apice rectae acutae, 10-15 mm lng.
Spinae centrales ..	3-4 crassiores, 20-30 mm lng, *uncinatae*	1-4 crassiores, 20-40 mm lng *uncinatae*	1-4 validiores, rectae acutae, 15-25 lng.
Flores.....	subapicales 60 mm lng. × 100 mm diam.	subapicales 35 mm lng. × 35 mm diam inodori	subapicales, 40 mm lng ± 50 mm lat. suaveolentes.
Tubus calicinus...	dense areolato-squamatus perbrevis	dense areolato-squamiferus brevis	areolato-squamoso, brevis.
Axillae squamarum.	glabrae ? setulis v. spinis 5-6 fasciculatis *armatae*	lanato-villosae, non setuliferae *inermes*	dense longeque villosae, villo isabellino, *armatae*, setulis praelongis laxiculatis.
Phylla	± 30	± 25-40	± 25-35.
Phylla externa ...	angusta acuminato-aristata, fuscorosea	angusta, acuminato-aristata. rubicunda	angusta acuminata rosea.
Phylla interna	oblonga, rosea-flavescentia, mucronata 40 mm lng. × 10 mm lt.	oblanceolata, valide mucronata, albo-rosea denticulata 18 × 8 mm	oblanceolata mucronata alba v. albo-rosea subintegra, 30-35 lng. × 7-9 mm lt.
Stamina.....	biseriata, filam. ?, antheris ?	biseriata, filam. albis, anth. flavidis	pluriseriata, fil. albis, anth. flavidis.
Stylus	ruber, stamina superans, crassus	roseus, crassus, stamina superans	roseus, crassiusculus, stamina superans.
Stigmata	16-partita, rubra v purpurina	12-partita, atro-purpurea	8-12 partita, violacea
Fructus	spiniferus (??); ubi descriptus ? Quisnam illum vidit ?	adhuc ignotus, sed ob ovarii et tubi calicini imbecillitatem, inermis habendus	ovatus (15 mm lng. × 12 diam.), subsiccus, albo-roseus, irregulariter dehiscens, setulis nigricantibus tenuibus fasciculatis rigidis longis armatus.
Semina	atra, compressa, reticulata (??); ubi descripta ? Quisnam illa vidit ?	adhuc ignota.	semina atra glabra, obtusa, compressiuscula, basi non truncata, areolato-alveolata.
Observaciones.....	No habiendo autor alguno, que yo conozca, descrito ni flores, ni frutos, ni semillas de esta especie, los datos que aquí se exponen, deben reputarse como deducidos por Britton y Rose del estudio cuidadoso de la lámina descubierta por el doctor Rose.	Las flores de esta especie fueron estudiadas y descritas por mí, sobre plantas vivas traídas del Chubut, y que florecieron en mi jardín, en La Plata, pero que no dieron fruta.	Esta especie floreció varias veces y maduró frutas, en mi jardín de La Plata, en ejemplares traídos de varias partes de Patagonia.

Partes comparatae	*Cereus Bertini*	*Cereus Duseni*	*Cereus patagonicus*
Cormus	cylindricus, erectus 15-40 alt. × 10-15 cm diam.	cylindricus, erectus v prostratus 20-60 lng. × 3-5 cm diam.	cylindricus, caespitosus, erectus 20-50 lng. × 5-8 cm diam.
Costae	10-12, prominulae, obtusae	6-8-10 prominulae, obtusae	9-12, prominulae, obtusiusculae.
Areolae	orbiculares, novae tomentosae flavidae	orbiculares, novae tomentosae albo-subflavescentes	orbiculares, turgidulae, albo-toment.
Spinae	graciles elongatae ± 15	graciles elongatae ± 6-18	robustae rigidae, bulbosulae, ± 8-14.
Spinae periferic.	±8-10 tenuiores, circ 10 mm lng. rectae	± 6-10 tenuiores, 5-10 mm lng. rectae	8-10 apice rectae acutae, 10-15 mm lng.
Spinae centrales	3-4 crassiores, 20-30 mm lng, *uncinatae*	1-4 crassiores, 20-40 mm lng *uncinatae*	1-4 validiores, rectae acutae, 15-25 lng.
Flores	subapicales 60 mm lng. × 100 mm diam.	subapicales 35 mm lng. × 35 mm diam inodori	subapicales, 40 mm lng ± 50 mm lat. suaveolentes.
Tubus calicinus	dense areolato-squamatus perbrevis	dense areolato-squamiferus brevis	areolato-squamoso, brevis.
Axillae squamarum.	glabrae ? setulis v. spinis 5-6 fasciculatis *armatae*	lanato-villosae, non setuliferae *inermes*	dense longeque villosae, villo isabellino, *armatae,* setulis praelongis faxiculatis.
Phylla	± 30	± 25-40	± 25-35.
Phylla externa	angusta acuminato-aristata, fuscorosea	angusta, acuminato-aristata, rubicunda	angusta acuminata rosea.
Phylla interna	oblonga, roseo-flavescentia, mucronata 40 mm lng. × 10 mm lt.	oblanceolata, valide mucronata, albo-rosea denticulata 18 × 8 mm	oblanceolata mucronata alba v. albo-rosea subintegra, 30-35 lng. × 7-9 mm lt.
Stamina	biseriata, filam. ?, antheris ?	biseriata, filam. albis, anth. flavidis	pluriseriata, fil. albis, anth. flavidis.
Stylus	ruber, stamina superans, crassus	roseus, crassus, stamina superans	roseus, crassiusculus, stamina superans.
Stigmata	16-partita, rubra v purpurina	12-partita, atro-purpurea	8-12 partita, violacea.
Fructus	spiniferus (??); ubi descriptus ? Quisnam illum vidit ?	adhuc ignotus, sed ob ovarii et tubi calicini imbecillitatem, inermis habendus	ovatus (15 mm lng. × 12 diam.), subsiccus, albo-roseus, irregulariter dehiscens, setulis nigricantibus tenuibus fasciculatis rigidis longis armatus.
Semina	atra, compressa, reticulata (??); ubi descripta ? Quisnam illa vidit ?	adhuc ignota.	semina atra glabra, obtusa, compressiuscula, basi non truncata, areolato-alveolata.
Observaciones	No habiendo autor alguno, que yo conozca, descrito ni flores, ni frutos, ni semillas de esta especie, los datos que aquí se exponen, deben reputarse como deducidos por Britton y Rose del estudio cuidadoso de la lámina descubierta por el doctor Rose.	Las flores de esta especie fueron estudiadas y descritas por mí, sobre plantas vivas traídas del Chubut, y que florecieron en mi jardín, en La Plata, pero que no dieron fruta.	Esta especie floreció varias veces y maduró frutas, en mi jardín de La Plata, en ejemplares traídos de varias partes de Patagonia.

Las descripciones, algo incompletas, que figuran en mis trabajos sobre la flora de la Patagonia y en *Cactacearum platensium tentamen,* son debidas a una promesa que me había hecho el doctor Albert Weber de enviarme un estudio detenido de estas especies, promesa que, desgraciadamente, no pudo cumplir a causa de la enfermedad que lo arrebató a la ciencia y a los amigos.

Resumiremos, pues, el resultado de la comparación del cuadro anterior en las breves líneas siguientes:

1° *Cereus Bertini* Cels concuerda con *Cereus Duseni* Web. por las espinas de sus areolas menos robustas, de las cuales las centrales mayores tienen la punta bruscamente doblada en gancho; ambas especies, por este carácter, se apartan, pues, netamente del *Cereus patagonicus* Web., que tiene espinas más cortas, mucho más robustas, más o menos bulbosas en la base y todas siempre con la punta derecha y muy aguda;

2° *Cereus Bertini* Cels se aproxima a *Cereus patagonicus* Web., por tener ambos el ovario y tubo calicino armado de numerosas y largas cerdas (a lo menos, según los datos de Britton & Rose), pero diferenciándose porque el *C. Bertini* parece tener ovario y tubo calicino lampiño, mientras el *C. patagonicus* lo tiene bien velloso y afelpado;

3° *Cereus Duseni* Web. se apartaría de ambos por tener el ovario y tubo floral muy velloso y afelpado, pero totalmente desprovisto de cerdas o espinas;

4° Los pétalos del *C. Bertini* serían rosado-amarillos, mientras en las otras dos especies son siempre blanco-rosados.

En base a lo que acabo de exponer, no puedo aceptar las sinonimizaciones de los señores Britton & Rose, y considero necesariamente como bien distintas y autónomas las tres especies, las cuales deben ser muy afines y fácilmente deben adscribirse a un solo género común. Me consta que existen formas intermediarias, fácilmente híbridas, entre las tres especies, las que concurren a enredar más la madeja y dificultar el criterio de los cactólogos.

Dando por agotado el tema de la autonomía específica de las tres especies, pasaremos a ocuparnos algo de su nomenclatura.

Cereus Bertini Cels no tiene sinonimia.

Cereus Dusenii Weber tiene sinonimia, pero muy corta y clara, habiendo sido considerado por los señores Britton & Rose como sinónimo de *Cereus patagonicus (The Cactaceae,* III, pág. 197), lo que resulta infundado según lo expuesto en el cuadro comparativo anterior.

Cereus patagonicus Weber tiene sinonimia y bastante enredada, debiéndosele cambiar nombre.

Cox, en su viaje a la Patagonia (1862-63), coleccionó esta planta, la que fué publicada por R. A. Philippi en los *Anales de la Universidad de Chile,* tomo XXIII (1863), página 453, con el nombre de *Echinocactus Coxi* Ph. *(nomen nudum).* En la misma obra, tomo y año, pocas páginas más adelante (pág. 465), describe la misma especie (con toda seguridad) dándole el nombre de *Echinocactus ? intertextus* Ph. *(an lapsus calami ?).* En 1897, yo publiqué la misma especie como *Cereus patagonicus* Weber *in litt.* En 1899, Suchumann, apercibido que existía un *Echinocactus intertextus* Englm. (1856), cambia el nombre de la especie en *Echinocactus Coxi* Schm. *(Gesamtb. d. Kakt.,* pág. 422). Por fin, Britton & Rose lo denominan *Melacocarpus patagonicus* (Web.) Britt. & Rose. ¿ Qué nombre, pues, llevará con justicia, según las leyes vigentes de la nomenclatura, la planta en cuestión ? Los nombres específicos del Philippi, sin duda alguna, tienen prioridad; pero el primer nombre es *nomen nudum rejiciendum.* Debemos, pues, aceptar el del *Echin. ? intertextus* Ph., pues ahora, figurando las dos plantas en género distinto, ya no existe más homonimia con la especie de Norte América. Por lo tanto, ya no tendremos *Cereus patagonicus* Wbr., sino *Cereus intertextus* (Phil.).

Por último, diremos dos palabras relativas al nombre genérico de estas cactáceas.

Schumann, en 1899, funda en el género *Cereus* una sección especial, *Ancistracanthi,* limitada por el carácter (algo aleatorio !) de las espinas ganchudas.

Britton & Rose, en 1922, entusiasmados por el descubrimiento de la lámina con flores del *Cereus Bertini,* tomando tal lámina como la expresión fiel y exacta de la dichosa tuna, fundan el nuevo género *Austrocactus,* cuyos caracteres yo me permito de juzgar algo vagos e hipotéticos, dado su origen.

Los mismos autores alejan totalmente del mismo el *Cereus patagonicus* (y su sinónimo *Cer. Duseni),* relegándolos en *Melacocarpus.*

A pesar de la autorizada opinión de los mencionados monógrafos, yo opino que las tres especies son sumamente afines, y constituyen una unidad biológica bien definida con divergencias específicas más o menos profundas; después de haber examinado y estudiado con atención las flores del *Cereus Bertini* en la reproducción que trae *The Cactaceae,* he notado cierta vaguedad de caracteres que hacen dudar algo de su exactitud absoluta, y me confirman que las diferencias de

las flores de *Cereus Bertini* y *Cereus patagonicus* no deben ser muy notables. Sostengo, pues, que las tres entidades vegetales, de que tratamos, no pueden ser separadas, y que todas tres deben figurar, una al lado de la otra, bajo una única agrupación genérica, para la cual acepto gustoso la denominación de *Austrocactus,* pues, sin referirse a formas morfológicas, se limita exclusivamente a la área geográfica de la dispersión de sus especies.

Por lo tanto, creo que, desde ahora en adelante, las tunas patagónicas discutidas deberán llamarse:

Austrocactus Bertini (Cels) Britton & Rose.
Austrocactus Duseni (Weber) Speg.
Austrocactus intertextus (Philippi) Speg.

VIII. **Echinofossulocactus** Lawrence. — Britton & Rose, *The Cactaceae,* III, pág. 109.

Este nombre genérico es: *hybridum et sesquipedale, prorsus exlex, ideo rejicendum.* Propongo, pues, que se deje en olvido el peregrino nombre resucitado, y que se substituya por el de Brittonrosea Speg., en honor de los valientes monógrafos; les pertenecerán las especies siguientes:

Brittonrosea albata (Dietrich)
— *anfractuosa* (Mrt.)
— *arrigens* (Link)
— *confusa* (Britton & Rose)
— *coptonogona* (Lemaire)
— *crispata* (DC.)
— *dichroacantha* (Mart.)
— *gladiata* (Link & Otto)
— *grandicornis* (Lemaire)
— *hastata* (Hopffer)
— *heteracantha* (Muehlenpfordt)
— *Lloydii* (Britton & Rose)
— *lamellosa* (Dietrich)
— *lancifera* (Dietrich)
— *multicostata* (Hildmann)
— *obvallata* (DC.)
— *pentacantha* (Lemaire)
— *phyllacantha* (Mart.)

Brittonrosea violaciflora (Quehl)
— *Wippermanni* (Muehlenpfordt)
— *zacatecasensis* (Britton & Rose)

IX. **Hickenia** Britton & Rose (1922) = *Hickenia microsperma* (Weber) Britt. & Rose.

En *The Cactaceae,* III, página 207, se instituye el nuevo género *Hickenia,* el cual, desgraciadamente, se halla preocupado *(Hickenia* Lillo (1919), *Asclepiaceae).*

Debiéndose, pues, cambiar el nombre a dicho género, propongo que sea substituído por el de Parodia Speg., dedicándolo a la memoria del doctor Domingo Parodi, uno de los primeros investigadores de la flora paraguaya, y que brindó los primeros artículos botánicos de la entonces naciente Sociedad Científica Argentina. La especie hasta ahora conocida llevará, pues, el nombre de *Parodia microsperma* (Weber).

A la cual tengo que agregar una nueva especie que, desde largos años, dormía olvidada entre los cartones de mi herbario:

Parodia paraguayensis Speg.

Diag. Subparva, obovata, saepius magna pro parte terra infossa, parte subterranea non costata nec areolifera sublaevi fusca, parte exerta convexula medio depresso-umbilicata costis, parum evolutis et perspicuis, 8-12 instructa; areiae-3-5 in quaque costa alternae vix prominulae, spinis typice 6, sat validis corneis subrigidis et subtrigonis, altera autem centrali magis robusta longior apice eximie uncinato-incurva; flores centrales mediocres v. subparvi aurei; ovarium parvum dense adpresseque squamulosum villo ochraceo denso vestitum non setiferum et abrupte in periantio, fere rotato, tubo calicino brevissimo, productum; phylla perianthica externa anguste linearia numerosa, ad axillas floccum villosum et setulas longiusculas tenues gerentia, interna glabra oblanceolata apice acutiuscule rotundata minute molliterque mucronulata, aurea; stamina numerosa polysticha, filamentis ochroleucis, antheris flavis; stylus stamina superans luteus gracilis, laciniis stigmaticis 6-8 stellatim patentibus aureis coronatus. Fructus et semina ignoti.

Hab. Ad fissuras rupium in Sierra de Amambay, Paraguay, Sept. 1883, lg. Karl von Guelich.

Los cormos crían a veces solitarios, a veces agrupados de 2 a 3, en las grietas de las barrancas áridas, siendo muy poco visibles, pues se hallan casi totalmente enterrados; tienen forma trasvada (30-45 mm alt. y diám.), prolongándose inferiormente en una larga raíz cilíndrica (50-75 mm lg. × 2-4 mm diám.) simple o ramosa; las tres cuartas partes que crían enterradas no llevan ni costillas, ni areolas, ni espinas, y sí sólo una que otra arruguita transversal, teniendo un color pardo igual al del suelo; la parte superficial más o menos convexa y con depresión sensible en el centro, ostenta de 8 a 12 costillas, o, mejor dicho, series longitudinales de tuberculitos, muy poco marcadas; las areolas, en número de 3 a 5 para cada costilla o serie, son muy poco aparentes, y sólo las más jóvenes del hoyo central ostentan un poco de vello aterciopelado blanquecino; cada areola típicamente está armada de 6 espinas, abortando con frecuencia la impar inferior, de las cuales 5 son periféricas más cortas (5-10 mm lg.), las superiores más débiles enderezadas, las otras arqueadas hacia abajo, todas con punta recta y aguda; la única central es mucho más robusta y rígida (15-20 mm lg.) que todas las demás y termina en punta aguda bruscamente enrulada en gancho; todas las espinas son rígidas y córneas, en la juventud de color ceniciento, por hallarse revestidas de una capa adherente de escamillas blanquecinas que caen con la edad, y entonces el eje de la espina ofrece un color amarillento de miel, semitransparente, tornándose opacas y moradas en la extremidad; dichas espinas (0,3-0,7 mm diám.) tienen el lado hacia el suelo semicilíndrico y el otro ventral con tres quillitas longitudinales no muy marcadas, pero bien visibles. Las flores, en número de 1 a 5, nacen en el borde del pocito de la parte superficial del cormo, siendo mediocres de tamaño (20-25 mm alt. y diám. cuando abiertos), de color amarillo de oro, revestidos de lana ocrácea con finas cerdas pardo-rojizas al exterior; el ovario ovalado (6-8 mm alt. y diám.), revestido de numerosas y pequeñas escamillas lineares escondidas por abundante lana, sin cerdas, que sale de sus axilas; el tubo periántico, sumamente corto, remata el ovario y, como éste, se encuentra también revestido de abundante lana ocrácea y larga, pero acompañada de delgadas y largas cerdas pardo rojiza que nacen de las axilas de los fillos exteriores lineares que lo forman, aumentando gradualmente de tamaño; los fillos internos o pétalos, en número de 25 a 30, forman la corola casi rotiforme, lampiños, de un lindo color amarillo de oro, de forma oblanceolada (12-15 mm lg. × 3-4 mm lt.), obtusamente acuminados al ápice, donde terminan en un mucrón muy pequeño y blando; los estambres,

bastante numerosos, son polísticos, con filamentos blanco-amarillentos y anteras amarillas; el estilo es cilíndrico, delgado, largo (12 mm lg. × 0,3-0,4 mm diám.), lampiño, amarillo, y termina en 5 a 8 ramitas estigmáticas (2,5-3 mm lg.), arqueadas para afuera, doradas. No he visto ni semillas ni frutos.

Esta especie difiere de la anterior por su aspecto, por el número y desarrollo de las costillas, por el menor número y mayor robustez de sus espinas casi trígonas y, por fin, por sus flores mucho más pequeñas.

X. **Echinocactus famatimensis** Speg. = Speg., *Plantas nuevas o interesantes,* nº 20 *(Anales de la Sociedad Científica Argentina,* XCII, pág. 118).

Aceptando la nueva nomenclatura empleada por Britton & Rose, esta especie deberá ser llamada, desde ahora en adelante, *Rebutia famatimensis* Speg.

XI. **Frailea pumila** (Lemaire) Britton & Rose = *The Cactaceae,* III, pág. 209.

He recibido numerosos ejemplares de las barrancas cerca de Santo Tomé, provincia de Corrientes, los que, cultivados en mi casa, florecieron cada año; he observado que la primera flor que producen en octubre o noviembre es normal, mientras las siguientes resultan todas cleistógamas.

Habiéndome parecido la clave dilemática de las especies del género *Frailea,* propuesta por Britton & Rose *(l. c.,* III, pág. 209), algo confusa y poco segura, me permito ofrecer otra de mi confección que tenía guardada desde tiempo :

1. Cormus cylindricus, simplex. 2.
   — subglobosus, caespitosus. 3.

2. Cormus glauco-cinereus, opacus; flores lutei. *Fr. gracillima.*
   — vivide viridis, nitidulus; flores ? *Fr. Knippeliana.*

3. Tuberculi areoliferi macula purpurea lunata marginatis. *Fr. cataphracta.*
   — unicolores, maculis destituti. 4.

4. Stigmata violaceo-purpurea; stylus albus; phylla lutea. *Fr. caespitosa.*
   — alba v. flava. 5.

5. Areolae villo atro-ferrugineo donatae. *Fr. phaeodisca.*
— albo v. cinerascente vestitae. 6.

6. Areolae spinis et centralibus erectis, et periphaericis radiantibus. *Fr. pumila.*
— periphaericis tantum, omnibus radiantibus armatae. 7.

7. Stigmata alba ut stylus; flores 25 mm lg. et lt. *Fr. Sehilinzkyana.*
— lutea. 8.

8. Flores evoluti majores, 30-40 mm lg. et lat.; costae 12-14; spinae 9-10. *Fr. Grahliana.*
— minores, 20-25 mm lg. et lat. 9.

9. Costae 8-12; spinulis 12-14. *Fr. Bruchi.*
— 12-24; spinulis 5-9. *Fr. pygmaea.*

Haré notar que mientras Fr. Haage, en la descripción del *Echinocactus Grahlianus* (in Schumann, *Gesamtbesc. d. Kakt., Nachträge,* pág. 106, 1898-1902), hablando de las semillas, dice: « *Samen ... glänzend, dunkelkastanienbraun, glatt* »; los señores Britton & Rose (*l. c.,* III, pág. 209) dicen: « *Seed puberulent* » y « *Seed brown, puberulent* » ... ¿Se tratará entonces de una sola especie, o las observaciones están equivocadas?

Tampoco no puedo aceptar el carácter de la pretendida pubescencia de las espinas como específico (*Fr. pumila),* pues todas las espinas y en todas las especies en la *juventud* se hallan revestidas de una pruinulosidad escamosa, que no tarda en desaparecer, parcial o totalmente, con mayor o menor rapidez.

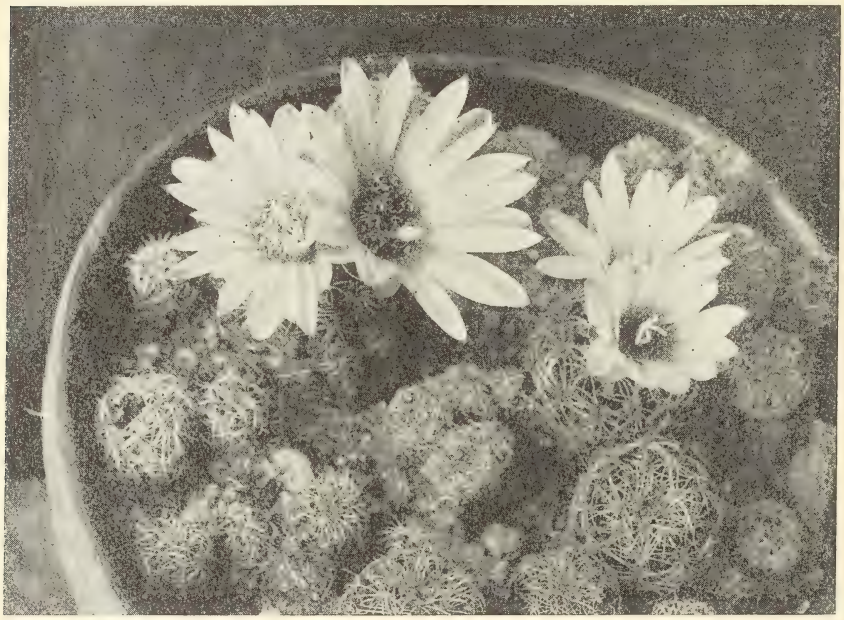
En la clave anterior figura una especie que no se ha descrito aún, y de la cual voy, pues, a dar el diagnóstico y la descripción correspondientes:

Frailea Bruchi Speg. (n. sp.)

Diag. Cormus globulosus, parvus, dense botryoso-caespitosus, costis 8-12, parum manifestis, in tuberculis subconoideo-hemisphaericis solutis, areolis parvis ellipsoideis spinulis 12-14 gracilibus, omnibus radiantibus subcylindricis papilloso-asperulis adpressis recurvis albis, floribus solitariis v. paucis majusculis campanulatis, tubo extus squamuloso-villosulo, petalis oblanceolatis acutiusculis roseo-violaceis, staminibus, stylo stigmatibusque flavicantibus. Fructus adhuc ignotus.

Hab. In montanis Sierra de Córdoba prope Alta Gracia, aest. 1918 (lgt. et comm. dr. C. Bruch).

Los cormos son casi globosos (10-20 mm diám. y alt.), más o menos umbilicados al centro, densamente cespitosos, formando almohadas o agrupaciones de 10 a 30 individuos, casi semiesféricas, de 100 a 150 mm de diámetro; cada uno de ellos ofrece de 8 a 12 costillas o, mejor, series longitudinales de tubérculos de color verde apagado y a veces



Frailea Bruchi Speg.

algo ceniciento y poco visible por el entrecruzamiento de las espinillas; las areolas son angostamente elípticas, armadas de 13 a 17 espinitas, todas radiantes, ninguna central, de 6 a 8 de cada lado, y de 1 a 3 en la extremidad inferior; todas estas espinitas son delgadas (2 a 5 mm lg. $\times$ 0,15-0,30 mm diám.), recostadas y encorvadas hacia abajo, relativamente rígidas, agudas, blancas, y debajo del microscopio salpicadas de numerosas papilas antrorsas. Las flores inodoras nacen al borde de la depresión central, en número de 1 a 3, siendo acampanadas (15-20 mm lg. y diám.) cuando abiertas, con tubo muy corto salpicado de escamillas lineares verde rojizas, con un mechoncito y a veces alguna cerdilla débil en las axilas; los fillos internos o pétalos, en número de más o menos 25, son inversamente lanceolados (15-18

lg. × 2-4 mm lat.), más o menos acuminado-redondeados, generalmente rematados por un mucrón pequeñísimo blando, de color rosado con línea central más obscura violácea, lampiños y muy enteros; los estambres, adheridos al tubo periántico, tienen filamentos casi blancos y anteras amarillas, el estilo bastante robusto, recto, blanco, supera de todos los estigmas a los estambres y lleva al ápice una corona de 5 a 8 ramitas estigmáticas cilíndricas (2,5-3 mm lg. × 0,5 mm diám.) amarillentas. A pesar de haber florecido sendas veces en La Plata, no he podido conseguir frutos.

XII. **AYLOSTERA** Speg. (nov. gen.).

Char. Cormus parvus brevis, e cylindraceo subglobosus, superne convexo-umbilicatus, costatus, costis fere in tuberculis solutis, areolis parvis aculeiferis; flores pleurogeni, infundibuliformes, *tubo elongato angusto solido cum stylo concreto,* phyllis rotato-patentibus rubris; fructus baccatus, subglobosus setulosus; semina subglobosa, basi truncata fusca opaca, dense minuteque papulosa, millimetrum non v. vix aequantia.

Nomen a Στερεός (farctus) et Αὖλος (tubus).

Aylostera pseudominuscula Speg.

Echinocactus pseudominusculus Speg., in litt. et adumbr.
Echinopsis pseudominuscula Speg., *Cact. plat. Tentam.,* nº 45.
Rebutia pseudominuscula Britt. & Rose, *The Cact.,* III, pág. 47.

Cuando publiqué esta especie hice notar el curioso carácter de esta especie de tener las paredes del tubo periántico soldadas con el estilo, carácter que no había sido indicado para ninguna otra cactácea, y por lo cual calzaba mal en el género *Echinopsis;* el haber trasladado esta especie a *Rebutia* no resuelve la cuestión, pues ésta también tiene el tubo periántico hueco e independiente del estilo. Opino, por lo tanto, que esta hermosa tunita debe constituir un tipo genérico aparte; fácilmente pertenecen al mismo la *Echinopsis pygmaea* R. E. Fries, el *Echinocactus Steinmanni* Solms-Laubach y tal vez la *Echinopsis deminuta* Weber.

La Plata, 22-I-1923.

LA CATÁSTROFE GLACIAL

(EXTRACTO DE UN LIBRO EN PREPARACIÓN)

POR F. DE BASALDÚA

El antiguo ecuador pasaba por Europa. — Mammuts, rinocerontes, leones, cocoteros y palmeras. — Toda esa fauna y flora pereció instantáneamente. — Tan sólo el hombre sobrevivió. — Clima tórrido transformado en glacial. — ¿Qué causas produjeron el espantoso cataclismo? — Lo que opinan Ed. Suess, Margerie, Morgan y otros sabios. — No les convencen sus propias hipótesis. — Mi nueva teoría. — Sus cinco bases fundamentales. — La línea del antiguo ecuador trazada por los yacimientos de mammuts frescos o fósiles. — El nuevo ecuador cortaba al anterior en Auste-erria, en la isla Oroluk (Micronesia) y en la isla Malayta (archipiélago de Salomón). — Los seres de esta región salvaron de la catástrofe. — Nuevos fundamentos corroborántes. — Mareas superficiales y mareas en el interior de la tierra. — Cómo se produce el desequilibrio. — Ecuador transformado en polo.

El ecuador, o por lo menos uno de los trópicos, pasaba por Europa en la edad preglacial que vamos a estudiar.

Hemos demostrado, en el prólogo, que desde la edad pliocena existía en el norte de Europa el hombre que talló los silex de Ipewich para cazar los mammuts, rinocerontes, leones y demás animales gigantescos con cuyas carnes se alimentaba. Agregaremos, solamente, como deducción perfectamente lógica, que el clima de Europa y del norte de Asia era entonces tórrido, indispensable para la existencia de aquella fauna y de aquella flora de cocoteros y palmeras, según vemos en los supervivientes que habitan ahora las zonas intertropicales.

Repentinamente se produjeron fríos helados y el clima tórrido se transformó en glacial.

Ahora bien; excepto el hombre que permaneció allí mismo porque su mayor inteligencia le permitió adaptarse al nuevo medio, guareciéndose en cavernas, abrigándose con pieles, etc., etc., toda aquella flora tropical, toda aquella fauna gigantesca murió instantáneamente, salvándose tan sólo unos pocos animales que, por encontrarse en el extremo sudeste, consiguieron huir hacia climas más benignos, pasando al Indostán por Siria, y por Suez al África ecuatorial actual.

¿Qué causas geológicas produjeron el espantoso cataclismo?

He leído atentamente libros que tratan de explicar este fenómeno, por el movimiento ascendente o descendente de la costra terrestre, especialmente la traducción francesa por de Margerie del libro de Ed. Suess, *Das Antlitz der Erdea,* París, 1900, y no he hallado explicación satisfactoria del terrible fenómeno.

Una de las más altas autoridades científicas contemporáneas, Mr. J. de Morgan, resume las diversas opiniones emitidas hasta hoy en estos términos:

« Hemos visto que al final de la edad pliocena comienza el período glacial. Muchas hipótesis se han emitido para explicar las causas del nacimiento y de la desaparición de los grandes macizos de nieve. Se ha argumentado sobre fenómenos cósmicos y astronómicos, pero parece que esas teorías deben, en parte, ser abandonadas.

« Piensan otros que el súbito enfriamiento que causó la formación de neveras fué debido a que se corrieron hacia el sur bancos de hielo rotos por la fuerza de mareas extraordinarias, o por movimientos sísmicos cuyo centro de acción estaba en las regiones árticas. Los hielos flotantes arrastrados por las corrientes, habiéndose acumulado sobre las costas de Europa, habrían producido un frío intenso al tiempo mismo que una gran humedad, de donde se originó la abundante condensación de hielo en las alturas y la gran extensión de « los glaciares » (véase Morgan, *Les premières civilisations,* págs. 75 y 76, París, 1909).

Esas hipótesis no convencieron a Morgan ni le sugirieron nuevas explicaciones; y como a mí tampoco me han satisfecho, séame permitido exponer lo que yo pienso al respecto, cumpliendo sencillamente con el deber de hablar en alta voz lo que habla silenciosamente la voz de mi pensamiento.

Establezcamos ahora los principales antecedentes del problema.

1° Es un hecho demostrado que en las postrimerías de la edad terciaria convivían, en Inglaterra, con el hombre de Ipswich el colosal mammut, el león y el oso speloeus, el mono, el rinoceronte tico-

rrino y muchos otros animales de las especies que hoy habitan en las zonas cálidas intertropicales;

2° Está comprobado, también, que en el norte de Inglaterra, en Suecia y en Noruega, florecían palmeras y cocoteros, magnolias, laureles y toda la flora propia de los climas tropicales;

3° Está igualmente demostrado que grandes manadas de mammuts o elefantes primigenios, antílopes, tigres, saigas, rinocerentes, etc., etc., habitaban en los territorios del *actual* casquete esférico boreal y en toda la nueva Siberia; que sus colosales cadáveres *conservan las carnes admirablemente frescas* bajo el hielo, sin que ofrezcan los cueros la más mínima señal de arrastre; y que se encuentran reunidos en grandes grupos en el norte de Siberia, allí donde la muerte los sorprendió mientras pastaban tranquilamente. Solamente en la isla Liakkow, Bunge recogió 2055 cadáveres de mammuts, de rinocerontes, de caballos salvajes, de antílopes, saigas, tigres, etc., etc, según lo dice Morgan en la nota 3, página 107 de la obra citada ;

4° Demuestra la afirmación anterior — *que los mammuts murieron mientras pastaban tranquilamente* — un detalle que, a mi juicio, no ha sido estimado en toda su trascendental importancia por los sabios europeos: es el que describe el señor Morgan en la página 106 de *Les premières civilisations,* en los términos siguientes, que copio en su propio idioma, así porque todos mis lectores lo comprendan, cuanto para no alterar su elocuente descripción :

« On ne peut dire que le mammouth fut plus nombreux en Sibérie qu'en Europe; car, dans certains graviers de la France, on recontre ses restes en abondance extrême. Toute fois, ce n'est que dans les toundras sibériennes qu'on le trouve parfaitement conservé, *gelé depuis des milliers d'années, « étant encore entre les dents des fragments de végétaux », bouleau, moleze, epicea, dont il se nourrissait.* ¿ La disparition des mammouths et des rhinocéros c'est-elle faite en Sibérie, graduellement ou d'une façon brutale? C'est ce que nous ne saurions le dire » ;

5° El mismo autor, apoyándose en los informes de Gaudry, *Patagonie, Annales paléontologiques du Museum,* dice que es muy difícil explicar la presencia de los grandes osarios de mammuts en Pikermi, en Marahga, en las islas Liakhow, en Nueva Siberia y en Patagonia.

Hace poco tiempo, diciembre de 1922, se ha encontrado en el territorio del Neuquen un inmenso osario de mammuts.

Hemos referido que el sabio Florentino Ameghino encontró, entre los lagos Musters y Colhué-Haupi, un fósil de tortuga cornuda, de

agua dulce, contemporánea del mammut, en el mismo horizonte geológico donde se encontró la tortuga cornuda de Australia; hecho que demuestra la unión de Sud América con el continente austral, donde también habitó el mammut, en época remotísima.

También hemos señalado la arquitectura Maïa en Tukatán, con capiteles de cabezas y trompas de elefantes; así como la existencia de un magnífico camino carretero que desaparece bajo las aguas del Atlántico, por sumersión del litoral del este americano.

Las citas precedentes sirven para establecer, de manera indubitable, la zona que en la edad terciaria-cuaternaria habitó el mammut y todo el género Elaphas, en Siberia, en Europa y en América; así como para constatar el hundimiento del este de América.

Aquella « zona de Elephas » puede establecerse trazando una línea de círculo máximo terrestre que partiendo de Nueva Siberia, que es donde en mayor cantidad se muestran sus cadáveres frescos, circunvale al mundo.

Tomemos por punto de partida la tangente con el círculo polar ártico *actual,* desde los 70° este de Greenwich, al sur del golfo de Obi, continuando por las proximidades de: Puerto Arcángel; Estocolmo; Amberes; Canal de la Mancha; Nantes; Santander; Lisboa; Santa Cruz de Tenerife; isla Sal (cabo Verde); intersección con el ecuador, *actual;* Pernambuco; cabo Frío (Río Janeiro); cabo de Hornos; tangente al círculo polar antártico *actual* a los 110° oeste de Greenwich, más o menos; estrecho de Cook (Nueva Zelandia); isla Humea (Nueva Caledonia); isla Malayta (archipiélago de Salomón); intersección con el ecuador *actual;* isla Croluk (Micronesia); Tokio; Aikala (Nueva Siberia); llegando así a Obi, en el sur del golfo, punto de partida, tangente al círculo polar ártico *actual.*

Séame permitido señalar la coincidencia del nombre *Obi* con la circunstancia de ser aquella localidad el sitio donde primeramente se descubrieron los grandes *osarios* de mammuts; pues en idioma eskera *Obi* significa « huesa », « sepultura », « enterratorio », « osario », nombre que parece haber sido impuesto por gentes exploradoras que hablaban nuestro idioma eskera.

Esta fué la línea del ecuador terrestre cuando se produjo la última gran catástrofe glacial.

Opino así porque sobre ella, y en sus inmediaciones, se encuentran los grandes depósitos de mammuts; conservados frescos los de Ankala, Obi y Arcángel; fosilizados otros como los de Estocolmo, Amberes, Nantes, Santander, Lisboa y Patagonia; y bajo las aguas del mar, o

en regiones no exploradas, los demás mammuts que vivieron sobre este gran círculo ecuatorial.

Las razones que fundamentan mi opinión son estas:

a) Desde sus orígenes, y muy especialmente al terminar la edad terciaria — cuando se produjo la catástrofe, — el interior del globo terráqueo, más de los 80 centésimos de su volumen, se componía de mineral en estado líquido, por ignición, contenido exteriormente por la costra solidificada por enfriamiento o irradiación al espacio exterior;

b) La densidad de la materia hirviente aumenta a medida que se aleja del centro de la tierra, o es tanto más flúida cuanto más cercana esté del foco calorífero;

c) El movimiento de rotación diurno de la tierra desarrolla una poderosa fuerza centrífuga, fuerza enorme que trata de lanzar tangencialmente al espacio la materia líquida del interior; materia que no puede escapar porque se lo impide la costra sólida exterior;

d) Esa materia interior, la más densa, porque es la más fría, la que empuja la fuerza centrífuga, va engrosando poco a poco, por adherencia o apegamiento, el interior de la corteza, la base de la costra que sustenta los continentes y el lecho de los mares.

Esa materia líquida, pegajosa y adherente, que es, naturalmente, la de mayor densidad por estar lejos del centro ígneo, se va enfriando paulatinamente, se transforma en cristales, en escorias, que se adhieren a la parte interior de la corteza terrestre, aumentando su espesor, y, por consecuencia, su peso;

e) Si el aumento de peso y de grosor fuera uniformemente repartido entre toda la corteza terrestre, en nada influiría sobre el equilibrio del mundo, que poco a poco se iría transformando en globo sólido; pero las cosas no suceden así sino de muy distinta manera, como vamos a verlo;

f) En primer lugar, mientras la línea del ecuador corre 27.777 metros por cada minuto de tiempo, ó 40.000.000 de metros cada 24 horas, los dos polos parecen inmóviles, en cuanto a la rotación terrestre.

De manera que la velocidad de rotación de la corteza va creciendo desde el cero polar hasta el máximum en el ecuador; y en igual proporción aumenta el espesor interior de la corteza, por adherencia de las materias más densas que lanza desde el centro la fuerza centrífuga;

g) En segundo lugar, el movimiento oscilatorio de la tierra — que

es el que determina las estaciones de verano, otoño, invierno, primavera — se verifica entre los trópicos de Cáncer y Capricornio, cada uno de los cuales mide 23°26′57″ a cada lado del ecuador. Es decir, que no solamente la luz y el calor del sol aumentan constantemente en la superficie de la tierra, a medida que desde los polos helados se va hacia el ecuador, sino que los 46°53′54″ de latitud que comprenden las dos zonas intertropicales es la parte que aumenta más considerablemente en peso y espesor de la corteza terrestre;

h) En tercer lugar, la fuerza de atracción que ejerce la luna, a nuestra vista, sobre la masa líquida de los mares en la superficie de la tierra, ¿por qué no ha de actuar, aunque no la veamos, sobre la masa líquida de mineral en fusión que forma el océano hirviente del interior de nuestra esfera?

Y así como vemos elevarse el límite de las más altas mareas, dos veces cada día, la masa enorme de las aguas del mar, así, estoy convencido de ello, oscila, especialmente, entre los trópicos del interior de la tierra, la marea de metal líquido, sincrónicamente con la marea de los océanos exteriores;

i) Durante cientos de millares de años, o de siglos, se fué espesando la capa de barniz, de escorias y cristales, que la fuerza centrífuga lanza incesantemente contra la parte interior de la corteza terrestre — especialmente en la zona intertropical donde es mayor el radio de la tierra, y mayor, por consecuencia, la fuerza centrífuga — como durante el mismo período de tiempo las mareas interiores hacen oscilar la masa enorme de los líquidos minerales... hasta que el mayor peso de la faja sólida intertropical, coincidente con alguna gran sizigia, hizo que *los trópicos se inclinasen,* es decir, que *se formaron nuevos polos y nuevo ecuador,* según el nuevo equilibrio de las masas líquidas y sólidas del planeta; sin alterar en lo más mínimo ni su movimiento diurno, ni la órbita que la tierra recorre en rededor del sol.

Y ese movimiento fué instantáneo, necesariamante: los polos cambiaron de posición, el ecuador mudó de lugar, y el régimen de los climas se transformó sobre una gran superficie de la tierra. Así, únicamente así, me explico que se hayan hallado millares de mammuts gigantescos *teniendo todavía entre los dientes los vegetales que comían,* porque la muerte los fulminó instantáneamente, mientras pastaban en su zona tropical, súbitamente transformada en zona glacial.

Así, solamente así, me explico que los cuerpos gigantescos *conserven las carnes frescas desde hace millares de años,* porque instantáneamente cubiertos por la nieve, y los hielos polares, aumentando el es-

pesor del blanco sudario durante los largos siglos transcurridos desde el momento que se produjo la catástrofe.

Lo mismo ocurrió, naturalmente, con la desaparición de la flora tropical de Europa y norte de Asia, que cambió por la que reina ahora, según las nuevas latitudes actuales. Y así se explica que las aguas del océano cubrieran todo el norte del hemisferio boreal donde antes pastaban los mammuts de Siberia.

Aquella catástrofe, ¿afectó a toda la tierra?

No; porque las zonas comprendidas entre las intersecciones del antiguo y nuevo ecuador, conservan ahora el mismo clima que tuvieron antes; circunstancia ésta que explica la supervivencia de los hombres de raza roja de Australia, así como la de muchos ejemplares de la flora y fauna anterior.

El marqués S. Yves d'Alveydre apoya nuestra opinión en estos términos: « La cuna de la raza roja fué el continente austral, tragado por el último gran diluvio; raza cuyos últimos vestigios se ven ahora en los indios de América, producidos por los trogloditas que se refugiaron sobre las cumbres de las montañas. » (Véase S. Yves, *Miss. des Juifs,* pág. 134.)

Es verdad que los indios de América proceden de la sumergida Austerria, mas no de trogloditas, como lo hemos demostrado al tratar de los pirhua, maïas, etc., etc.

Este fenómeno, esta instantánea transformación del ecuador en polo, y viceversa, debe haberse producido muchas veces en los millones de años transcurridos en las edades pasadas; y seguirá produciéndose en las edades futuras con mayores intervalos cada vez, hasta que cesará por completo cuando toda la tierra se haya transformado en una sólida esfera, por extinción o enfriamiento del fuego central.

Estas son las ideas que entrego a la crítica científica, con el solo anhelo de contribuir a su adelantamiento.

Estancia Sol de Mayo, Rawson (Chubut), febrero de 1923.

LA TEORÍA DE DARWIN Y LAS INDUSTRIAS DE FERMENTACIÓN

Por MARTINIANO LEGUIZAMÓN PONDAL

Los jonios eran la parte más voluble e inconstante del pueblo griego; su filosofía tiene este mismo carácter. Nada nos extraña entonces que Tales de Mileto, fundador de la escuela jónica, haya sido quien concibió la teoría de la evolución de las especies, la que a pesar de haber sido sostenida por el vidente Demócrito, fundador de la doctrina atómica y de la igualdad de la esencia de los átomos, fué olvidada durante 2000 años.

Bacon, quizá sin valorar, sostuvo que las especies podían ser modificadas por el hombre, idea combatida por Linneo y por Buffon, quienes sólo aceptaron la mutabilidad en las especies de gran parentesco, es decir, la evolución, pero sin salir del género; hasta que Lamark, en 1779, valientemente afirma que las especies se modifican continuamente, siendo imposible establecer caracteres absolutos para cada vegetal.

Goethe se declaró un acérrimo partidario del evolucionismo, lo mismo que Geoffroy de Saint-Hilaire; siendo Lamark el primero que aporta observaciones zoológicas para probar que la función hace al órgano, y que los caracteres adquiridos se heredan, modificándose con ello la especie.

Las exageraciones de Geoffroy de Saint Hilaire y las fogosas embestidas de Cuvier, el que pasaba, en su época, por ser la más alta y dominante autoridad científica, hicieron que el transformismo cayese de nuevo en el olvido, de donde lo sacó Darwin en 1859, consagrando que la evolución modifica la especie.

Sin duda alguna, entre las investigaciones que han señalado rumbos a los conocimientos en el pasado siglo se encuentran las pacien-

tes de Darwin, que comprueban hasta la evidencia el triunfo del más apto en la lucha por la vida, operándose una selección natural por la adaptación al medio ambiente y la herencia de los caracteres adquiridos.

Darwin efectuó estas observaciones en todos los organismos, a excepción de los microbios, pues eran seres de funciones desconocidas; y hoy que se conocen, podemos ver que han venido precisamente a corroborar la exactitud de la teoría evolucionista.

La fermentación conocida desde los tiempos más remotos era considerada como de causa desconocida, de ahí que las industrias derivadas quedasen estacionarias por espacio de siglos; pero, merced a Pasteur, el fenómeno de la fermentación fué explicado, permitiendo regular sus efectos, y a las industrias de fermentación apoyarse en principios científicos, elevándose de industrias rurales a industrias químicas en el sentido más lato de su acepción moderna.

LA LUCHA POR LA VIDA

En las fermentaciones es difícil asegurar el desarrollo exclusivo de ciertas células microbianas útiles, como conviene en la fabricación del alcohol, vino, cerveza, pan, etc., pues siempre intervienen otros microbios que, por ser nocivos, es ventajoso evitarlos.

Nos queda como solución buscar la manera para que en la lucha por la vida que se establece entre los microbios, triunfe los que darán el mayor rendimiento industrial.

El sagaz Effront, considerando que por diferencia de densidad las levaduras no se mezclan con los bacterios, agrega resina a las melazas, la que las hace más densas y por consiguiente caer al fondo junto con las levaduras, donde éstas, en la lucha por la vida que se entabla, triunfarán gracias al número en que han sido introducidas.

TRIUNFO DEL MÁS APTO

No siempre es el número el que impera, sobre todo cuando se trata de gérmenes que necesitan medios de condiciones diferentes, en este caso basta preparar un ambiente favorable al desarrollo de la especie deseada, y en la lucha que se establezca triunfará por ser más apta, orientándose la fermentación en el sentido conveniente.

Así, la fermentación alcohólica producida por levaduras, es acompañada por bacteriana que llegaremos a anular, teniendo en cuenta que hay cuerpos que, a ciertas temperaturas, tienen acción desfavorable sobre los microorganismos; basta sólo comparar la dosis máxima que pueden soportar las levaduras cultivadas y las que soportan las de razas salvajes, otros bacterios, etc.

En lo que concierne al ácido láctico, las levaduras le soportan en dosis más elevadas que los bacterios; el límite máximo para éstos es 0,25 por ciento, mientras que para aquéllos es 2 por ciento, lo que explica por qué una fermentación láctica, moderada al principio, de 0,5 por ciento de ácido láctico, es tan útil para asegurar el problema de las levaduras en la fermentación alcohólica y en la panárica.

En esta cuestión del triunfo del más apto es menester recordar que el medio ambiente actúa, no sólo por su composición química, sino también por otros factores, entre ellos la temperatura, así a partir de 35° la energía de las levaduras decrece rápidamente, en cambio los bacterios lácticos se desarrollan con una actividad enorme.

En la fabricación del pan, la fermentación no puede ser exclusivamente alcohólica, y no lo es porque en la harina, en la levadura del comercio, en el aire y en el agua hay infinidad de especies microbianas que provocan la formación de ácidos butírico, láctico, acético, alcoholes butílico, amílico, anhídrido carbónico, etc.

Sea que una parte del anhídrido carbónico aparezca directamente en la ecuación de fermentación secundaria, y otra aparezca por la acción de los bacterios oxidantes, el hecho es que éstos contribuyen a levantar la masa; y forman ácidos orgánicos, de acción benéfica mientras su proporción no se eleva.

Al principio de la fermentación, los *saccharomyces* se desarrollan rápidamente; pero, a medida que se eleva la temperatura, aumenta la actividad de los bacterios, quienes producen ácido butírico que detiene la acción de las levaduras; y para que la fermentación no sea exclusivamente bacteriana, hay necesidad de enfriar la pasta cuando llega a 35°, y dar un nuevo alimento a las levaduras para que puedan luchar contra los bacterios, también es conveniente iniciar la fermentación con una láctica, pues, independientemente del sabor que el ácido láctico da al pan, es capaz de exaltar la energía de las levaduras y detener el desarrollo de los bacterios.

Algunos, sin saber, provocan la fermentación láctica, agregando a la masa leche agria y entibiada a 34°; otros la vierten por el piso y el

aire de las panaderías para obtener así numerosos bacilos lácticos en la atmósfera.

La acción del aire también es útil en la fermentación panárica cuando se introduce en la pasta, porque mata a los bacilos butíricos que en su mayoría son anaerobios.

ADAPTACIÓN AL MEDIO Y HERENCIA DE LOS CARACTERES ADQUIRIDOS

En las fermentaciones industriales existen medios que son favorables a múltiples especies, de modo que si dejamos efectuarse espontáneamente las fermentaciones, los productos obtenidos son impuros y los rendimientos bajos, debido a que los microbios que pululan por todas partes, se desarrollan concurrentemente con las levaduras, viviendo a expensas del azúcar, o de las materias, amiláceas y dan productos nauseabundos.

Para obtener buenos rendimientos en fermentación, la teoría de Darwin nos permite prever los dos caminos a seguir : el método aséptico creado por Pasteur y el antiséptico por Effront.

El primero consiste en sembrar una levadura pura, es decir, obtenida partiendo de una sola célula, en un caldo esterilizado por el calor y conservado aséptico, lo que encarece la operación; por el consumo de combustible, lo complicado de los aparatos y delicado de la operación, tan es así que algunas cubas se infectan, obligando a perder el contenido.

El método antiséptico es sencillo, pues permite trabajar en cualquier cuba. Éste se debe a un chispazo genial de Effront, a quien se le ocurrió adaptar razas de levaduras a la acción de desinfectantes que previamente agregaba a los medios de cultivos en dosis cada vez mayores; y una vez aclimatadas bastaba verter, al producto que se desease fermentar, la dosis del desinfectante que destruye todos los demás gérmenes, permitiendo sólo el desarrollo de la levadura aclimatada.

Basados en estas consideraciones, se ha podido obtener razas de levaduras adaptadas a medios con diversos desinfectantes como ácidos minerales, fluoruros, sulfitos, etc., y como se heredan los caracteres adquiridos, se puede ir aumentando las dosis de desinfectantes hasta llegar a cifras no sospechadas, siendo numerosos los sabios que han contribuído con investigaciones de laboratorio a que se apliquen

las ideas de evolución de las especies a la vida de los microbios.

La causa inicial de la evolución, no obstante todas las explicaciones dadas, desde Darwin aceptando la selección natural, Naegeli manifestando que en la Naturaleza existe una tendencia a la perfección, Braum sosteniendo que se debe a causas internas, y Wagner a la emigración, queda todavía para la ciencia detrás de las barreras donde el Universo guarda el tesoro de sus enigmas, y tal vez observándola en los seres más sencillos, como los microbios, se pueda encontrar su explicación.

UNA DISTINCIÓN

Tenemos la satisfacción de dar a conocer a nuestros lectores que el Museo de Londres (British Museum) acaba de dar a uno de nuestros hombres de ciencia y miembro de nuestra Sociedad Científica Argentina una muestra de confianza poco común por su valer moral y científico.

Sábese que ese Museo tiene una resonancia mundial por sus colecciones valiosísimas, a las que cuida con un celo admirable, por sus publicaciones, fruto de una acrisolada escrupulosidad, por sus viajeros naturalistas que recorren silenciosos todo el mundo, por el poco número de naturalistas — pero elegidos — a quienes se permite estudiar sus colecciones, etc.

El hecho de que el Museo británico proponga a un naturalista de contribuir al estudio de sus colecciones, dando él el primer paso, es honroso y digno de llamar la atención; más aún tratándose de enviar esas colecciones a regiones lejanas con las contingencias inherentes a los viajes largos.

Estas y otras consideraciones sumamente favorables para nuestro ambiente científico y para nuestro país nos ha sugerido la carta siguiente que el Museo británico ha dirigido al director de la sección entomológica del Museo nacional de Historia natural, doctor Juan Brèthes, a raíz de la publicación de su último trabajo en estos *Anales*.

Señor... Veo con placer que tiene la intención de publicar una monografía de los Coccinélidos de Chile ; si le fuera gustoso, le mandaría para su determinación los ejemplares de ese país que existen en nuestras colecciones...

Acepte, señor, las seguridades de mi mayor consideración S. S. S. — *Gilbert J. Arrow.*

Dicha colección se encuentra ya en poder del doctor Brèthes.

N. de la D.

CONFERENCIAS

DEL DOCTOR TEÓFILO ISNARDI, SOBRE LA TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD

Se realizó el 20 de julio último, en el local de nuestra Sociedad, la sexta conferencia del ciclo que sobre la teoría de la relatividad ha organizado dicha institución. La conferencia estaba a cargo del doctor Teófilo Isnardi y su tema era *Introducción a la teoría general de la relatividad.*

Comenzó el conferenciante explicando cómo a pesar de que el « reposo absoluto » no puede constatarse en la mecánica de Newton y en la teoría especial de la relatividad, conservaba sin embargo realidad física el « movimiento absoluto ». Experiencias como la del péndulo de Foucault, permiten constatar el movimiento absoluto de rotación de la tierra, en la concepción newtoniana del espacio; y en general las leyes de la mecánica se modifican al pasar de un sistema inercial a otro acelerado, por intervención de las fuerzas de inercia (fuerzas centrífugas). La teoría general de la relatividad se propone sin embargo dar a las leyes físicas expresión independiente del sistema de referencia.

Se refirió luego a la igualdad de las masas inerte y gravitacional, cuyos conceptos explicó detenidamente; y mostró cómo dicha igualdad permite reducir las fuerzas de inercia a fuerzas gravitacionales, y los movimientos absolutos de la mecánica de Newton, a movimientos relativos con respecto a las demás masas del universo, según la concepción de Einstein.

Entrando ya al desarrollo de estas ideas, explicó el principio de la equivalencia en la mecánica de Newton, y su generalización a los fenómenos electromagnéticos (Einstein), deduciendo de ésta el despla-

zamiento de las líneas espectrales y la desviación de un rayo luminoso.

Para el estudio de la teoría desde un punto de vista general, explicó sus relaciones y analogía con la geometría de Riemann, deteniéndose a considerar la posibilidad de que el espacio físico no sea euclídeo, ilustrando su exposición con algunos ejemplos.

Finalmente enunció los postulados de la teoría general de la relatividad, refiriéndose al universo tetradimensional de Minkowski.

DEL DOCTOR RAMÓN G. LOYARTE, SOBRE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

En el local social, dictó el doctor Ramón G. Loyarte la séptima conferencia de la serie que sobre la teoría de la relatividad organizó nuestra asociación.

El conferencista comenzó recordando las relaciones de transformación de Lorentz y dijo:

« Estas ecuaciones traducen una métrica del universo tal que las distancias y duraciones pierden su valor absoluto; no serían cualidades intrínsecas del mundo exterior sino relaciones entre los objetos de este mundo y un observador bien determinado.

« Son, por otra parte, consecuencia de postulados que ha sido menester introducir a fin de conciliar resultados experimentales, que a la luz de la ciencia clásica eran irreductibles.

« A pesar de la relatividad ennnciada, esas relaciones permiten establecer relaciones métricas entre diferentes lugares, condición indispensable para poder hablar de una ciencia del universo.

« Dos observadores que se mueven relativamente con movimiento rectilíneo y uniforme disienten en la apreciación de las distancias y duraciones, pero las expresiones en que ambos traducen las leyes de los mismos fenómenos de la naturaleza son idénticas, resultado esencial que está contenido, justamente, en ecuaciones.

« Por su intermedio uno de los observadores puede inferir el conocimiento que de su mundo posee el otro. Sólo así es posible una ciencia de la naturaleza.

« En la ciencia clásica tal posibilidad es una consecuencia inmediata del valor absoluto de las distancias y duraciones. »

Se ocupó luego de la interpretación geométrica de Minkowski, de la definición de los elementos de longitud y de tiempo propio y de la formulación del principio de inercia.

Pasó, en seguida, a los temas relativos a la gravitación diciendo:

« Según acabamos de ver las leyes de la naturaleza son invariantes para todos los observadores que se mueven, relativamente con movimiento rectilíneo y uniforme, vale decir, que el principio restringido de relatividad sienta el postulado de la imposibilidad de reconocer por experimentos internos de cualquier naturaleza el movimiento de conjunto del sistema cuando es uniforme y rectilíneo.

« A nuestra inteligencia se impone, sin embargo, la imposibilidad de denunciar los movimientos de conjunto cualquiera sea su naturaleza, pues si estuviésemos absolutamente solos en el espacio ¿cómo se tendría conocimiento de tal hecho, no habiendo puntos de referencia?

« La posibilidad con que creía contar la mecánica clásica para reconocer movimientos acelerados proviene de la existencia de los llamados términos de inercia, que considera como fuerzas ficticias, quitando así realidad al indicado reconocimiento puesto que tan plausible resultaría, entonces, atribuir los fenómenos observados a un cambio de velocidad como a un campo de fuerzas de naturaleza conveniente.

« La llamada fuerza de gravitación posee todas las características de esas fuerzas ficticias y es equivalente, como se vió en la conferencia precedente, a una aceleración. »

« El postulado de equivalencia significa que es imposible venir en conocimiento de ninguna clase de movimientos del sistema, o lo que es lo mismo, que las leyes de los fenómenos naturales conservan su forma cualquiera sea el movimiento del observador que las estudia y, aún más, que el aspecto que ofrece la naturaleza a un observador en reposo en un campo gravitatorio, es idéntico al que percibe un observador que, en un espacio libre de aquella condición, se mueve con una cierta aceleración. Y de aquí que la teoría generalizada de la relatividad permita descubrir las influencias recíprocas entre la gravitación y los demás agentes físicos, en cuyo intento fracasó siempre la ciencia clásica.

« Ésta consideró a la gravitación como una fuerza o agente activo que actuase de cuerpo a cuerpo; con el principio de equivalencia pierde el carácter de tal, pero es forzoso admitir la curvatura del espacio. »

Llamó la atención sobre las confusiones corrientes entre el universo, que es la esquematización estática de los sucesos, con el espacio ordinario.

La teoría generalizada da cabida en el espacio, en realidad, a tres

dimensiones; que el espacio no es euclidiano sino curvo significa que no es posible representarse la realidad que percibimos por un sistema cartesiano. Para más claridad, la distancia accesible a nuestra observación entre dos puntos no es la recta euclidiana, sino la distancia mínima que liga ambos puntos sobre una cierta superficie.

Se ocupó luego de las ecuaciones de movimiento de un punto fuera de todo campo real de fuerzas — entre los que como se dijo no se cuenta la gravitación — mostrando que cuando se introduce en ellos la aproximación lograda por la ciencia clásica en el conocimiento de la naturaleza se reducen a las de la mecánica ordinaria, resultando al mismo tiempo el interesante corolario, accesible a la experiencia, de que los átomos de substancias idénticas del sol y de la tierra no tienen la misma frecuencia, de modo que las líneas del espectro solar deben correrse hacia el rojo.

Mencionó también que con esas ecuaciones se logra explicar, lo que a la mecánica clásica no le fué posible, el famoso desplazamiento del perihelio de mercurio.

A continuación se ocupó de la determinación de los potenciales gravitatorios.

DEL INGENIERO FÉLIX AGUILAR, SOBRE COMPROBACIONES ASTRONÓMICAS DEL PRINCIPIO DE RELATIVIDAD

Como antecedente para el estudio del movimiento del perihelio de mercurio, el ingeniero Aguilar, en la conferencia del 3 de agosto ppdo., se refirió a los elementos del movimiento kepleriano de los planetas al rededor del sol.

Historió brevemente las investigaciones de Le Verrier, que condujeron al descubrimiento de la rotación de la línea de los apsidos y las distintas hipótesis para explicar esta anomalía dentro de la con cepción newtoniana del universo.

Estudió los trabajos astronómicos realizados, tendientes a verificar la desviación de los rayos luminosos en el campo gravitacional del sol. Los resultados de las expediciones inglesas a Príncipe y a Sobral lo condujeron a la conclusión de que ellos apoyan la teoría de Einstein, sin permitir un estudio del comportamiento de la misma dentro del campo cubierto por las observaciones. Los resultados de la expedición Crocker del observatorio de Lick constituyen, en cambio, una confirmación ampliamente satisfactoria del efecto Einstein.

Analizó las condiciones en que deben ser conducidas las observaciones espectroscópicas tendientes a comprobar el desplazamiento hacia el rojo de las líneas del espectro solar, previsto por la teoría de relatividad. Estudió la meteorología del sol en cuanto interesa a estas investigaciones. Los resultados espectroscópicos obtenidos hasta ahora no permiten, según el ingeniero Aguilar, fundar una conclusión ni en pro, ni en contra de la teoría de relatividad.

BIBLIOTECA DE LA SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

OBRAS RECIBIDAS DESDE EL 1° DE ABRIL HASTA EL 1° DE AGOSTO DE 1923

Blas Cabrera, *Momento actual de la física,* 30 páginas, E. Maestre, Madrid, 1921.

P. Puig Adam, *Resolución de algunos problemas elementales en mecánica relativista restringida,* Madrid, 1923.

Buenaventura y Bassegoda Musté, *Contribución al estudio de las funciones de Hadamard,* 95 páginas, Madrid, 1923.

Moisés Amaral, *Las termas minerales de Tolhuaca,* 23 páginas, « La Ilustración, Santiago, 1922.

Oficina de publicaciones de la Asociación del trabajo, *La participación obrera en la gestión y beneficios de las empresas,* 28 páginas, A. De Martino, Buenos Aires, 1923.

José Babini, *Termodinámica gráfica,* 53 páginas, T. Palumbo, Buenos Aires, 1923.

Santiago de Tesillo, *Restauración del Estado de Arauco,* Universidad Central, Quito, 1923.

Arturo G. Frers, *Algunas monstruosidades en coleópteros,* 6 páginas, Coni, Buenos Aires, 1923.

Arturo G. Frers, *Metamorfosis de celeópteros argentinos,* 16 páginas, Coni, Buenos Aires, 1923.

P. Rivet, *Cranes de la région du Tchad,* 10 páginas, Emile Larose, París, 1914.

A. Ceriotti y A. Sanguinetti, *Extracto de Malta,* 7 páginas, T. Palumbo, Buenos Aires.

Escuela industrial de la Nación, *Extracto de la memoria correspondiente al año escolar de 1921,* 36 páginas, Compañía general de Fósforos, Buenos Aires, 1923.

Afranio Amaral, *Notas de Serotherapia,* 10 páginas, São Paulo, 1921.

Afranio Amaral, *Duas novas especies de colubrideos opisthoglyphos brasileiros,* 6 páginas, Boyd y Morrell, São Paulo, 1921.

Pedro T. Pagés, *Crisis ganadera argentina,* 102 páginas, Gadola, Buenos Aires, 1922.

Municipalidad de Salta, *El doctor Facundo Zuviría,* 29 páginas, « La Provincia », Salta, 1923.

Juan Bréthes, *La polilla del repollo,* 5 páginas, « La lectura », Buenos Aires, 1923.

Carlos López, *Monografía del venado Bura o cola prieta,* 37 páginas, Estudios Biológicos, Méjico, 1923.

Miguel de María y Campos, *Las quinas y su aclimatación en México,* 22 páginas, Estudios Biológicos, Méjico, 1923.

Carlos C. Hoffmann, *Restos de una antigua fauna del Norte entre los lepidópteros mexicanos,* 23 páginas, Méjico, 1922.

Carlos E. Porter, *Una peste de la palma de coquitos,* 2 páginas, Santiago, 1923.

Carlos E. Porter, *Breve reseña de la contribución de los zoólogos italianos al conocimiento de la Fauna de Chile,* 8 páginas, Santiago, 1922.

Carlos E. Porter, *Notas entomológicas,* 10 páginas, La Ilustración, Santiago, 1922.

Juan Bréthes, *Un phlebotomus nuevo para la República Argentina,* 10 páginas, E. Spinelli, Buenos Aires, 1923.

Juan Bréthes, *Description d'un nouveau genre et une nouvelle espéce d'Ipidae du Chili,* 3 páginas, Santiago, 1921.

Juan Bréthes, *Catalogue synonymique des coccinellides du Chili,* 9 páginas, Santiago, 1921.

Juan Bréthes, *Hyménoptères nouveaux du Chili,* 2 páginas, Santiago, 1921.

Luis C. Maglioni, *Cirugía,* 39 páginas, Imprenta San Martín, Buenos Aires, 1923.

Ministère de l'Instruction Publique, *Mision du service géographique de l'armée pour la mesure d'un Arc de Méridien équatorial en Amérique du Sud,* Gauthier-Villars et Cíe, París, 1922.

Revista del Archivo general Administrativo, 294 páginas, Imprenta Mercantil, Montevideo, 1922.

Mario da Veiga Cabral, *A Europa actual,* 429 páginas, Jacinto Ribeiro dos Santos, Río de Janeiro, 1923.

A. G. Frontini, *Un caso de contrabando y defraudación,* 114 páginas, S. Morovich, Buenos Aires, 1923.

Blas Cabrera, *Principio de relatividad,* 348 páginas, Imprenta Clásica española, Madrid, 1923.

Carnegie Endowment for International Peace, *Year Book 1922,* 249 páginás, Wáshington, 1922.

A. Mesnager, *Matériaux de construction. Pierres,* 514 páginas, J. B. Baillière et fils, París, 1923.

Sexto congreso médico latino-americano, *Boletín oficial,* 38 páginas, El Siglo XX, Habana, 1922.

Asociación internacional permanente de los Congresos de carreteras, *Cuarto congreso* (Sevilla 1923). *Ponencias generales,* Imprimerie Oberthur, Rennes (Paris), 1923.

Asociación internacional permanente de los Congresos de carreteras, *Cuarto Congreso* (Sevilla 1923). *Memorias,* Imprimerie Oberthur, Rennes (París), 1923.

M. Laubeuf y H. Stroh, *Sous-marins, Torpilles et Mines,* Baillière et fils, París, 1923.

SOCIOS ACTIVOS *(Conclusión)*

Lamenza, Francisco.
Lanfranco, Silvio.
Larco, Esteban.
Larreguy, José.
Lasso, Alfredo.
Latzina, Eduardo.
Laub, Jacobo J.
Lavalle, Francisco P.
Lea, Allan B.
Lebedinsky, Marco.
Leguizamón Pondal, Martno.
Lenhardtson, Emilio.
Loyarte, Ramón.
Lizer, Carlos.
Lombardi, Alberto,
Lorenzetti, Miguel V.
Lozano, Nicolás.
Lugones, Arturo M.
Luro, Rufino.
Mainini, Carlos.
Magnin, Jorge.
Magnin, Félix J.
Mallol, Emilio.
Mamberto, Benito.
Marín, Plácido.
Marcó del Pont, Enrique.
Maradona, Santiago.
Marotta, Pedro.
Martinent, Enrique.
Massini, Carlos.
Mayol, J. A. Jorge.
Maza, Benedicto.
Medina, José A.
Melo, Carlos F.
Meoli, Gabriel.
Mercante, Víctor,
Mercau, Agustín.
Mermoz, Fco. Alberto.
Mignaqui, Luis P.
Molina Civit, Juan.
Morales, Carlos María.
Moreno, Evaristo V.
Moreno, Jorge.
Moreno, José M.
Möhring, Walther.
Mosca, Juan C.
Narbondo, Juan L.
Nágera, Juan José.
Natale, Alfredo.
Negri, Mario L.
Nielsen, Juan.
Noceti, Domingo.
Novillo, Andrés B.
Ocampo, Manuel S.
O'Connor, Eduardo.
Odorisio, José A.
Olmos, Miguel.
Olivieri, Alfredo.
Onelli, Clemente.
Ortiz de Rosas, Jorge.
Ortuzar, Alejandro de.
Orús, José M.
Orús, Antonio (hijo).
Otamendi, Rómulo.
Otamendi, Gustavo.
Otamendi, Belisario.
Outes, Félix F.
Paez, José Mª.
Paitoví Oliveras, Antonio.
Palacio, Emilio.
Palma, Luis.
Palma, José M.
Paoli, Humberto J.
Parodi, Edmundo.
Parodi, Lorenzo R.
Pasman, Raúl G.
Paquet, Carlos.
Paulsen, Emilio F.
Paz Anchorena, José M.
Péndola, Agustín.
Pérez Hernández, Ángel.
Pestalardo, Agustín.
Petre, Martín.
Piana, Juan S.
Pico, Jorge A.
Quartino, José N.
Raffo, Bartolomé.
Rebuelto, Emilio.
Rebuelto, Antonio.
Renacco, Ricardo.
Ricaldoni, Horacio B.
Rodríguez Aravena, Santos.
Roffo, Juan.
Roldán, Raimundo.
Rokotnitz, Otto.
Romero, Julián.
Romero, Antonio.
Rospide, Juan.
Rossell Soler, Pedro A.
Sabaría, Enrique.
Sabatini, Ángel.
Salomone, Gabriel A.
Sáenz Valiente, Eduardo.
Sáenz Valiente, Anselmo.
Sánchez Díaz, Abel.
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez, Oviedo Cornelio.
Sanromán, Iberio.
Santángelo, Rodolfo.
Saporiti, Héctor J.
Sarhy, José S.
Sarhy, Juan F.
Scala, Augusto.
Schaefer, Guillermo F.
Schnack Benno, J.
Schmiedel, Ottomar.
Schneidewind, Alberto.
Schoo Lastra, Oscar.
Selva, Domingo.
Senet, Rodolfo.
Spota, Víctor J.
Solari, Miguel A.
Sobral, Arturo.
Soldano, Ferruccio A.
Sorojovich, Gustavo.
Spinetto, David J.
Storni, Segundo R.
Taiana, Alberto.
Tarelli, Carlos A.
Tello, Eugenio.
Torre Bertucci, Pedro.
Torello, Pablo.
Trelles, Rogelio A.
Trovati, Francisco.
Ucha, Manuel.
Uriarte Castro, Alfredo.
Urquiza, Carlos de.
Vallebella, Colón B.
Valentini, Argentino.
Valençon, Luis A.
Valerga, Oronte A.
Valiente Noailles, Luis.
Valle, Juan A.
Vanossi, Reinaldo.
Varela, Rufino (hijo).
Varela Gil, José.
Vidal, Antonio.
Wauters, Carlos.
Wernicke, Roberto.
Williams, Adolfo T.
White, Guillermo.
White, Guillermo J.
Zuloaga, Ángel M.
Zeman, Víctor.

SOCIOS ADHERENTES

Álvarez, Jerónimo.
Andisco, Juan F.
Basterreix, Francisco.
Buzzacarini David.
Canaveris, Rogelio G.
Dorado, Luis.
Frers, Arturo German.
Gandolfo José S.
Goñi, José.
Gonzáléz, Santiago.
Grau, Carlos A.
Lambertini, Miguel.
« La Sulfúrica ».
Maldonado, Bruzzone R.
Moresco, Enrique.
Massone, Atilio.
Nicola, Carlos de.
Pascual, Oliveras Antonio.
Peirano, Santiago F.
Pelosi, Elías.
Pini, Aldo S.
Real, Enrique B.
Repetto, Cayetano.
Soler, Antonio L.
Saez, Francisco A.
Sáenz Valiente, Casto.
Sheahan, Juan F.
Vernengo, Roberto E.
Vidal, Eduardo.
Vignaux, Juan C.
Weinstock, Zelman.
Zanetta, Alberto J.
Zanetta, Atilio.
Zapata, Ciriaco L.
Zimmermann Resta, Alfredo.

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACIÓN DIDÁCTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás.
Tornquist, Ernesto y Comp. (Lim.).

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA

ARGENTINA

DIRECTOR : INGENIERO JULIO R. CASTIÑEIRAS

SEPTIEMBRE-OCTUBRE 1923. — ENTREGAS III-IV. TOMO XCVI

ÍNDICE

RAMÓN G. LOYARTE, La hipótesis de los « Quanta » en la teoría estadística de la materia y en la teoría de la radiación 97
JOSÉ BABINI, Integración gráfica de las ecuaciones diferenciales de la cinética química 149
HANS KRIEG, Sobre el desarrollo de la distribución del colorido en los mamíferos. 172
OTTO GOTTSCHALK, Cálculo automático de sistemas hiperestáticos 177
FEDERICO KRUMM, Noticias topográficas y geológicas sobre la región situada al oriente del lago Ranco, en el sur de Chile y especialmente sobre la erupción volcánica más reciente « Los Azufres » 191
Segundo Congreso de Química (marzo de 1924) 199
Conferencias 201
Bibliografía 205
Biblioteca de la Sociedad Científica Argentina 207

BUENOS AIRES
IMPRENTA Y CASA EDITORA « CONI »
684, PERÚ, 684

1923

SMITHSONIAN INSTITUTION
FEB 9 1927
NATIONAL MUSEUM

JUNTA DIRECTIVA

(1923-1924)

Presidente	Ingeniero **Eduardo Huergo.**
Vicepresidente 1º	Doctor **Antonio Vidal.**
Vicepresidente 2º	Profesor **Juan Nielsen.**
Secretario de actas	Doctor **Reinaldo Vanossi.**
Secretario de correspondencia	Ingeniero **Miguel Ángel Solari.**
Tesorero	Ingeniero **Edmundo Parodi.**
Protesorero	Ingeniero **José Debenedetti.**
Bibliotecario	Ingeniero **Juan José Carabelli.**
Vocales	Doctor **Emilio C. Díaz.**
	Ingeniero **Arturo Grieben.**
	Ingeniero **Evaristo V. Moreno.**
	Doctor **Atilio A. Bado.**
	Ingeniero **Antonio Paitoví.**
	Ingeniero **Manuel J. Arce.**
	Ingeniero **Julio R. Castiñeiras.**
	Doctor **Salvador Debenedetti.**
Gerente	Señor **Juan Botto.**

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los *Anales (personalmente responsables de la tesis que sustentan en sus escritos)* que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarlo por escrito. Por mayor número de ejemplares deberán entenderse con la Casa editora « Coni ». Tienen, además, derecho a la corrección de dos pruebas. Los manuscritos, correspondencia, etc., se enviarán a la Dirección, **Cevallos, 269.** — La Dirección.

LA HIPÓTESIS DE LOS «QUANTA»

EN LA TEORÍA ESTADÍSTICA DE LA MATERIA Y EN LA TEORÍA DE LA RADIACIÓN (1)

POR EL DOCTOR RAMÓN G. LOYARTE

PRIMERA CONFERENCIA

Ecuaciones de Lagrange. Ecuaciones canónicas. — El teorema de Liouville. — Estructura discreta de la materia : la probabilidad de existencia de un estado. — Relación entre la entropía y la probabilidad : fórmula de Boltzmann. — La distribución de los elementos en el espacio de las fases en el caso del equilibrio. — La energía libre del sistema.

Las ecuaciones a las coordenadas generalizadas de Lagrange. Las ecuaciones canónicas. — Recordaremos primeramente algunas de las conocidas ecuaciones de la mecánica, presentando, de su contenido, el aspecto que conviene a las consideraciones futuras.

Si se tiene un sistema de N puntos materiales completamente libres son necesarias 3N magnitudes, tres por cada punto, para definir su posición. Si los puntos no son todos completamente libres, como ocurre, por ejemplo, si algunos de ellos están forzados a permanecer sobre ciertas líneas o superficies, o están ligados rígidamente entre sí, lo que se traduce matemáticamente en la existencia de cierto número m de ecuaciones de condición entre algunas coordenadas, el número de magnitudes que permite determinar la posición del sistema se reduce a

(1) Las presentes conferencias contienen, en esencia, las lecciones que dictara sobre esas cuestiones en la Universidad de La Plata, en la cátedra de física matemática, a un reducidísimo número de alumnos, los años 1920 y 1922. Su estudio

$3N - m = K$, o, en otras palabras, m de entre las 3N coordenadas se dejan expresar en función de las K restantes. El sistema tiene en ese caso K grados de libertad, y es claro que pueden utilizarse, en lugar de coordenadas cartesianas, otras cualesquiera (1).

Sean entonces $q_1, q_2, \ldots, q_K$, K magnitudes geométricas que definen la posición del sistema en el espacio, o como suele decirse, coordenadas generalizadas. Las coordenadas cartesianas de los puntos estarán ligadas a las q por relaciones de la forma

$$x_j = \varphi_j (q_1, q_2, \ldots, q_K)$$

y las componentes cartesianas de las velocidades por expresiones del tipo

$$\dot{x}_j = \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_K} \dot{q}_K,$$

donde $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ son las componentes generalizadas de la velocidad. Las $\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i}$ son solamente funciones de las q_i.

Para el cuadrado de $\dot{x}_j$ se tiene

$$\dot{x}_j^2 = \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_1}\right)^2 \dot{q}_1^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_K}\right)^2 \dot{q}_K^2 + 2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \ldots + \\ + 2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_{K-1}} \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_K} \dot{q}_{K-1} \dot{q}_K.$$

pondrá al lector en condiciones de penetrar en el vasto e interesante campo de la estadística molecular.

Va a continuación una lista de las obras consultadas :

PLANCK, *Theorie der Wärmestrahlung*, 4ª edición, 1921.

PLANCK, *Acht Vorlesungen uber theoretische physik*, Leipzig, 1910.

H. A. LORENTZ, *Les théories statistiques en thermodynamique*, Leipzig y Berlín, 1916.

BOLTZMANN, *Leçons sur la théorie des Gaz*.

GIBBS, *Elementare Grundlagen der statistichen mechanik* (original en inglés).

A. WASSMUTH, *Grundlagen und Anwendungen der statistichen mechanik*, Braunschweig, 1915.

E. TERRADAS, *Els élements discrets de la materia i la radiacio* (Barcelona).

ARTHUR MARCH, *Theorie der Strahlung und der quanten*. Leipzig, 1919.

W. WIEN, *Neuere probleme der theoretischen physik*, Leipzig y Berlín, 1913.

ARTHUR HASS, *Einführung in die theoretischen Physik*, 2º tomo, Berlín y Leipzig, 1921.

CLEMENS SCHAEFER, *Einführung in die theoretische Physik*, Berlín, 1921.

REICHE, *Teoría de los « quanta »* (traducción reciente de la casa Calpe).

(1) Véase, por ejemplo, PAUL APPEL, *Mécanique rationnelle*, tomo II, páginas 297 y siguientes; A. G. WEBSTER, *The Dynamics of particles, etc.*, página 97 y siguientes.

Como la energía cinética del sistema es :

$$L = \sum_{1}^{N} j \frac{1}{2} m_j \left(\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2\right),$$

se tendrá

$$2L = Q_{11}\dot{q}_1^2 + Q_{22}\dot{q}_2^2 + \ldots + 2Q_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \ldots$$

o

$$2L = \sum_{1}^{K} i \sum_{1}^{K} j \, Q_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

donde las Q_{ij} son solamente funciones de las q.

Si el sistema está sometido a fuerzas que admiten un potencial, las ecuaciones de Lagrange (1), que rigen su movimiento, se escriben

$$\frac{\partial}{\partial q_i}(L - U) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(L - U) = 0 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, K$$

donde U representa la energía potencial del sistema y es función sólo de las q.

El estado de movimiento del sistema queda definido según estas ecuaciones por las coordenadas generalizadas q_i y las velocidades generalizadas $\dot{q}_i$.

De un interés muy particular en la mecánica estadística son las ecuaciones canónicas (2), en las que el estado de movimiento del sistema queda definido por las coordenadas generalizadas y los impulsos generalizados $p = \frac{\partial L}{\partial q_i}$.

Ellas se escriben

$$\dot{q}_i = \frac{\partial E}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial E}{\partial q_i}$$

donde $E = L + U$ es la energía total del sistema.

De esas ecuaciones resulta en seguida

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = 0.$$

(1) APPEL, *loc. cit.*, página 316; WEBSTER, *loc. cit.*, página 115.

(2) APPEL, *loc. cit.*, página 405; WEBSTER, *loc., cit.*, página 126; ROUTH (edición alemana) *Die Dynamyk der sisteme starrer Körper: Die Höhere Dynamik*, página 348 y siguientes.

El teorema de Liouville. — Consideremos ahora un sistema formado por N puntos completamente libres, es decir, con 3N grados de libertad. Su estado dinámico queda definido si se conocen sus 3N coordenadas y sus 3N impulsos. La *fase,* usando la denominación de Gibb, queda definida por 6N magnitudes, correspondiendo a cada uno de los puntos 6 de ellas.

A cada fase corresponde una cierta distribución de los puntos con respecto a las coordenadas y los impulsos, pues podemos agrupar todos aquellos puntos cuyas coordenadas e impulsos están comprendidos dentro de ciertos límites; N_1 de entre ellos tendrán coordenadas e impulsos comprendidos, respectivamente, entre

$$\begin{array}{lllllll} q_1 & \text{y} & q_1 + dq_1 & \qquad & p_1 & \text{y} & p_1 + dp_1 \\ q_2 & \text{y} & q_2 + dq_2 & & p_2 & \text{y} & p_2 + dp_2 \\ q_3 & \text{y} & q_3 + dq_3 & & p_3 & \text{y} & p_3 + dp_3; \end{array}$$

N_2 de entre ellos estarán entre otros límites, siguiendo así.

En lugar de decir que un punto tiene velocidades e impulsos comprendidos dentro de ciertos límites, se puede recurrir a una representación geométrica ideal muy usada en la mecánica estadística y que consiste en lo siguiente : Imaginemos un espacio ideal de 6 dimensiones donde las coordenadas ortogonales son las coordenadas generalizadas y los impulsos, y llamémosle *espacio de las fases.*

Si lo imaginamos dividido en dominios elementales, el volumen de uno de ellos será, en general,

$$dq_1 dq_2 dq_3 dp_1 dp_2 dp_3.$$

Decir que un punto se encuentra dentro de uno de esos elementos de volumen es lo mismo que decir que sus coordenadas e impulsos se encuentran dentro de ciertos límites. Ese espacio generalizado tiene, como veremos, una significación profunda. La fase de un punto cualquiera queda determinada por la posición en ese espacio en el cual se mueve.

Consideremos ahora el elemento de volumen $\Delta\tau$ del espacio de las fases ocupado por un cierto número de puntos en un instante t de tiempo. Los puntos se mueven y con ellos el elemento $\Delta\tau$, que cambiará no solamente de posición sino también de forma.

El teorema de Liouville muestra que su volumen queda, sin embargo, invariado.

En efecto :

$$\Delta\tau = \Delta q_1 \,.\, \Delta q_2 \,.\, \Delta q_3 \,.\, \Delta p_1 \,.\, \Delta p_2 \,.\, \Delta p_3$$

es el tamaño del elemento en el instante t. Si transcurre el tiempo dt, las coordenadas y los impulsos de los puntos contenidos en él sufren los cambios

$$dq_1 = \dot{q}_1 dt \qquad dq_2 = \dot{q}_2 dt \qquad dq_2 = \dot{q}_3 dt$$

$$dp_1 = \dot{p}_1 dt \qquad dp_2 = \dot{p}_2 dt \qquad dp_3 = \dot{p}_3 dt$$

y por consiguiente, el volumen $\Delta\tau$ se convierte en

$$\Delta\tau' = \Delta\left(q_1 + \dot{q}_1 dt\right) . \Delta\left(q_2 + \dot{q}_2 dt\right) . \Delta\left(q_3 + \dot{q}_3 dt\right) \times$$
$$\times \Delta\left(p_1 + \dot{p}_1 dt\right) . \Delta\left(p_2 + \dot{p}_2 dt\right) . \Delta\left(p_3 + \dot{p}_3 dt\right).$$

Es, por otra parte,

$$\Delta\dot{q}_1 = \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_1} \Delta q_1, \quad \ldots, \quad \ldots$$

$$\Delta\dot{p}_1 = \frac{\partial \dot{p}_1}{\partial p_1} \Delta p_1, \quad \ldots, \quad \ldots$$

y, por lo tanto,

$$\Delta\tau' = \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 \,.\, \Delta p_1 \Delta p_2 \Delta p_3 \left(1 + \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_1} dt\right)\left(1 + \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_2} dt\right) \ldots \left(1 + \frac{\partial \dot{p}_4}{\partial p_1} dt\right) \ldots$$

y, por lo tanto, hasta términos de magnitudes del segundo orden

$$\Delta\tau' - \Delta\tau = \Delta\tau\left(\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_1} + \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_2} + \frac{\partial \dot{q}_3}{\partial q_3} + \frac{\partial \dot{p}_1}{\partial p_1} + \frac{\partial \dot{p}_2}{\partial p_2} + \frac{\partial \dot{p}_3}{\partial p_3}\right) dt,$$

y puesto que por las ecuaciones canónicas el paréntesis es nulo, resulta, como se dijo

$$\Delta\tau = \Delta\tau'.$$

Es decir, el tamaño

$$\Delta\tau = \int\int\int\int\int\int dq_1 dq_2 dq_3 dp_1 dp_2 dp_3$$

de un elemento del espacio de las fases, ocupado por un conjunto de puntos que se mueven según las ecuaciones de la mecánica clásica no se modifica en el transcurso del tiempo o, lo que es lo mismo, durante el movimiento.

Los puntos se comportan, en este sentido, como los puntos materiales de un líquido incompresible en movimiento.

Una representación de mayor alcance, utilizada por Gibb en la ge-

neralización de los métodos estadísticos y que mencionaremos de paso, consiste en lo que sigue: Si se tiene un sistema de N puntos completamente libres, es decir, de 3N grados de libertad, se le representa por un único punto en un espacio ideal a 6N dimensiones, las 3N coordenadas y los 3N impulsos. Ese espacio sería el espacio generalizado de las fases. A cada uno de sus puntos corresponde un estado posible del sistema, es decir, el conjunto de ellos representa, en un instante, todas las fases en que aquél puede encontrarse.

Si se prescinde del mecanismo del sistema y nos limitamos a enunciar su número K de grados de libertad, el hiperespacio en cuestión sería de 2K dimensiones.

Extructura atomística de la materia. La probabilidad de un estado o fase. — La experiencia enseña que la materia está constituída por elementes discretos o moléculas. En los gases se mueven rectilíneamente cambiando de dirección por los choques que se producen entre ellas.

En los sólidos, la hipótesis más simple es suponer que las moléculas oscilan al rededor de una posición de equilibrio estable. Tanto en uno como en otro caso la fase del sistema queda definida por la distribución de las moléculas en el espacio de las fases. Si se imagina dividido el espacio de 6 dimensiones en dominios elementales iguales, la fase queda determinada si se conoce, en el instante considerado, el número de moléculas que se encuentran en cada uno de los dominios.

Es claro que una misma fase puede realizarse de muchísimas maneras, pues ella depende de cuántas y no de cuáles moléculas se encuentran en los elementos del espacio de las fases. La distribución no se modifica, por ejemplo, si se cambian un cierto número de moléculas de un dominio con un número igual de moléculas de otro, aun cuando se tiene otra agrupación de los individuos o, como dice Planck, una nueva *complexión.*

A fin de que se entienda esto claramente hagamos una objetivación. Supongamos que hemos dividido el espacio de las fases en n dominios elementales y sea, como antes, N el número de moléculas.

Podemos construir N dados numerados de 1 a N, uno por cada molécula, con n caras cada uno, numeradas de 1 a n, una por cada dominio. Los números individualizen las moléculas y los dominios elementales. A cada tirada corresponde una distribución de las moléculas en el espacio de las fases, si se ubica cada molécula en el recinto elemental indicado por la cara que queda hacia arriba en el dado que la

representa. Por tiradas sucesivas se obtendrán todas las fases posibles del sistema.

Es claro que una misma fase puede realizarse de diferentes maneras, pues N_i dados que indicaban el dominio i pueden indicar en una nueva tirada el dominio j mientras que N_i dados que indicaban el dominio j pueden indicar el i. Si entre las dos tiradas no existe otra diferencia, se tienen dos complexiones de la misma fase.

Supongamos que en la fase en cuestión figuran N_1 moléculas en el dominio 1, N_2 en el dominio 2 y así siguiendo. El número de maneras cómo puede producirse esa fase o, lo que es lo mismo, el número de complexiones, es igual, como es evidente, al número de permutaciones que pueden hacerse con N letras, de modo que N_1 sean iguales a a, por ejemplo, N_2 a b, etc., o lo que es lo mismo al número de permutaciones que pueden hacerse con N moléculas, de tal manera que N_1 se encuentre en la celdilla 1, N_2 en la 2, etc.

Al número de complexiones que corresponde a una fase determinada se le considera en la mecánica estadística como la probabilidad del estado o fase.

Esta definición de la probabilidad de la existencia de una fase es, como salta a la vista, diferente de la definición matemática. Se le designa, por motivos que se pondrán más tarde en evidencia, con el nombre propio de *probabilidad termodinámica.*

El número de complexiones o probabilidad del estado considerado es, por lo que antecede, según resulta de la teoría de las permutaciones:

$$P = \frac{N!}{N_1!\,N_2!\,N_3!\ldots}. \qquad (1)$$

Al adaptar este resultado del problema matemático al problema físico de determinar el número de complexiones de un estado, admitimos, en realidad, que la próbabilidad que tiene una molécula de encontrarse en un dominio elemental es la misma para todos los dominios; en la objetivación empleada que la probabilidad de que salga una de las caras de uno cualquiera de los dados sea la misma para todas ellas.

Aquí aparece el fundamento de la elección de un espacio en el que las dimensiones son las coordenadas y los impulsos.

Los puntos se mueven y cambian de fase. Aquellos que se encuentran dentro de un volumen $\Delta\tau$ del espacio de las fases, en un cierto instante, se encontrarán más tarde dentro de otro volumen $\Delta\tau'$. La probabilidad de que una molécula se encuentre en una posición u otra, es la misma, pues, según las leyes de la dinámica, una molécula descri-

be un camino bien determinado en el espacio de las fases, que da todas las posiciones ocupadas por ella antes o después del instante considerado y es una ley fundamental del cálculo de probabilidades de que dos estados de un sistema que se determinan uno al otro son igualmente probables.

La probabilidad de que una molécula se encuentre dentro de $\Delta\tau$ o dentro de $\Delta\tau'$ es la misma, pero ella sólo puede suponerse proporcional a la extensión del dominio, si el dominio no modifica su tamaño con el tiempo. Como tal ocurre, según el teorema de Liouville, podemos suponer que los elementos de igual volumen del espacio de las fases son de la misma probabilidad.

Esto lo habíamos admitido implícitamente en el cálculo anterior.

Los elementos del espacio de las fases son invariantes únicamente cuando el espacio es tal que sus dimensiones son las coordenadas y los impulsos. Que el espacio de las fases así definido parece tener una significación profunda en la naturaleza lo evidenciará la teoría de los «quanta».

Relación entre la entropía y la probabilidad. Fórmula de Boltzman. — Boltzman ha sido el primero en demostrar, con motivo de sus trabajos sobre la teoría cinética de los gases, la existencia de una relación entre la entropía y la probabilidad. Tal relación puede establecerse como sigue. Como es conocido, todos los procesos que se producen en la naturaleza se realizan en el sentido en que la entropía aumenta. Si el sistema es aislado, es decir, si su energía permanece constante, la entropía tiene, en el estado de equilibrio, un valor máximo. Se puede interpretar este hecho diciendo que todos los procesos que se producen en el universo consisten en pasajes de estados menos probables a otros más probables.

Podemos objetivar esto recurriendo a un ejemplo — muy explotado — de H. A. Lorentz. Supongamos que en cierto espacio limitado se encuentran un gran número de moléculas gaseosas cumpliendo el movimiento irregular que corresponde a la temperatura del recinto. Imaginemos a éste dividido en dos partes iguales por una pared virtual y preguntemos cuál será la repartición del gas entre las dos mitades del espacio.

Puesto que cada molécula tomada individualmente tiene la misma probabilidad de encontrarse en uno u otro de los compartimentos, se puede organizar la lotería siguiente.

Imaginemos en una urna un número infinitamente grande de esfe-

ritas, muy grande aun con respecto a N; la mitad de ellas sean blancas y el resto rojas. Si sacamos un número de bolillas igual a N, obtendremos cierto número de un color y el resto del otro color. Si se hace corresponder a las bolillas blancas moléculas en uno de los recintos y a las rojas moléculas en el otro, esta jugada da cierta distribución del gas entre los recintos.

El problema de la distribución de las moléculas, que es el mismo que el de las esferillas blancas y rojas, puede someterse al cálculo de probabilidades. El resultado es que la distribución más probable corresponde a la igualdad de los números de bolillas rojas y blancas extraídas, o, lo que es lo mismo, a la igualdad del número de moléculas de ambos compartimentos.

Es claro que podemos admitir que tal repartición se producirá realmente por el movimiento de las moléculas.

Por otra parte, la termodinámica enseña que el estado final o de equilibrio del gas será aquel para el cual su entropía tiene el valor máximo.

Se ve así, en un caso concreto, la correspondencia entre la entropía máxima y el estado más probable.

Sentemos como postulado que : *la entropía de un sistema en un cierto estado depende exclusivamente de la probabilidad de ese estado.*

Las consecuencias teóricas y los resultados correlativos de la experiencia nos ilustrarán sobre el contenido real de esa ley.

Si indicamos con S la entropía de un estado y con P, como ya lo hemos hecho, su probabilidad, el postulado se traduce matemáticamente por la relación

$$S = f(P), \tag{2}$$

es decir, la entropía es igual a cierta función universal de la probabilidad. La forma de la función se determina escribiendo la probabilidad y la entropía correspondiente a un sistema compuesto por dos sistemas completamente independientes uno del otro.

Entre la entropía de uno de los sistemas en un estado dado y la probabilidad de ese estado se tendrá, por ejemplo,

$$S_1 = f(P_1) \tag{3}$$

y para el otro

$$S_2 = f(P_2). \tag{4}$$

Si esos dos estados de los sistemas existen simultáneamente, se tiene un sistema compuesto cuya probabilidad será

$$P = P_1 P_2 \tag{5}$$

y la entropia

$$S = S_1 + S_2 \tag{6}$$

y además

$$S = f(P). \tag{7}$$

Por las (3), (4), (5), (6) y (7) se tiene

$$f(P_1P_2) = f(P_1) + f(P_2), \tag{8}$$

relación funcional que permite determinar f.

Si se deriva con respecto a P_1 se tiene :

$$P_2\dot{f}(P_1P_2) = \dot{f}P_1) \tag{9}$$

y derivando esta ecuación con respecto a P_2, resulta

$$P_2P_1\ddot{f}(P_1P_2) + \dot{f}(P_1P_2) = 0, \tag{10}$$

o por la (5)

$$P\ddot{f}(P) + \dot{f}(P) = 0, \tag{11}$$

ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = 0,$$

que se integra muy fácilmente. El resultado es :

$$f(P) = k \log P + C, \tag{12}$$

donde k es una constante universal. También debe ser universal la C y, por lo tanto, según la (8) debe ser

$$C = 0.$$

Por la (7) se tiene

$$S = k \log P, \tag{I}$$

que es la ecuación de Boltzman. Ella es el eslabón de oro que vincula la mecánica con la termodinámica. Su descubrimiento constituye, como muy bien dice Lorentz, un progreso verdaderamente notable.

La entropía de una fase cualquiera. La distribución, entropía y energía libre, en el estado de equilibrio, de un sistema cuya energía permanece constante. — Para una fase o estado cualquiera se tiene, de acuerdo con las relaciones (1) y (I) :

$$S = k \log \frac{N!}{N_1!\,N_2!\,N_3!\ldots} = k \log N! - k\sum \log N_i \tag{13}$$

donde el índice i representa los subíndices 1, 2, 3, etc.

Esta expresión puede transformarse utilizando una fórmula debida a Stirling que dice

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \tag{14}$$

donde n es un número entero cualquiera. Para valores grandes de n puede escribirse

$$\log n! = n \log n - n, \tag{15}$$

resultado que puede obtenerse también en forma sencilla como sigue.

Si se representa gráficamente la función $y = \log x$ (fig. 1) donde x varía entre 1 y n el integral

$$A = \int_1^n \log x dx,$$

puede calcularse de dos maneras.

Es, primeramente,

$$\log x dx = d(x \log x) - dx$$

y, por lo tanto,

$$A = n \log n - n + 1.$$

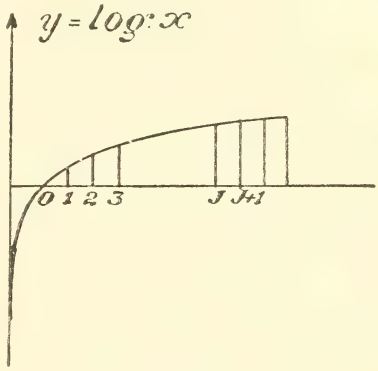


Fig. 1

Además, si se levantan ordenadas por los puntos de división 1, 2, 3, 4, . . ., n, respectivamente, se divide el área A en áreas elementales, las que, con excepción de las primeras, pueden considerarse como rectángulos de alturas iguales a log 2, log 3, . . ., log n, y cuyas bases son todas iguales a la unidad.

Si n es, como suponemos, muy grande se tiene, con muchísima aproximación :

$$A = \log 2 + \log 3 + \ldots + \log n = \log (1 . 2 . 3 \ldots n) = \log n!$$

y por comparación con el resultado de arriba, despreciando la unidad con respecto a los otros términos, resulta

$$\log n! = n \log n - n.$$

Introduciendo esta relación en la (13) y teniendo presente que

$$\sum N_i = N$$

resulta

$$S = kN \log N - k \sum N_i \log N_i. \tag{16}$$

Introduzcamos todavía las relaciones

$$\frac{N_1}{N} = \omega_1; \qquad \frac{N_2}{N} = \omega_2; \qquad \ldots \qquad \ldots, \tag{17}$$

o, de una manera general,

$$\frac{N_i}{N} = \omega_i \tag{17'}$$

siendo

$$\sum \omega_i = 1. \tag{18}$$

Se obtiene, dejando figurar solamente a N y a los ω_i,

$$S = kN \log N - k \sum N\omega_i (\log N + \log \omega_i). \tag{19}$$

Pero

$$k \sum N\omega_i \log N = kN \log N \sum \omega_i = kN \log N \tag{20}$$

y por consiguiente

$$S = - kN \sum \omega_i \log \omega_i \tag{21}$$

fórmula que da la entropía de un estado cualquiera de un sistema.

Consideremos el estado de equilibrio de un sistema aislado, es decir, cuya energía permanece constante. Si se indica a ésta con E, se puede escribir

$$E = N_1 \bar{\varepsilon}_1 + N_2 \bar{\varepsilon}_2 + N_3 \bar{\varepsilon}_3 + \ldots \tag{22}$$

designando $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_3$, etc., las energías medias de los elementos en los dominios elementales 1, 2, 3, etc., o también

$$E = N\left(\bar{\varepsilon}_1\omega_1 + \bar{\varepsilon}_2\omega_2 + \bar{\varepsilon}_3\omega_3 + \ldots\right) = N \sum \bar{\varepsilon}_i \omega_i. \tag{23}$$

De acuerdo con lo supuesto se tiene, además de la relación

$$\sum \omega_i = 1 \tag{18}$$

las relaciones

$$E = \text{constante}$$

$$S = \text{máximo} \tag{25}$$

de acuerdo con la termodinámica. Para el caso de equilibrio debe ser, por consiguiente:

$$\delta S = \sum \log \omega_i \delta\omega_i + \sum \delta\omega_i = 0, \tag{26}$$

donde las $\delta\omega_i$ no son todas arbitrarias, pues por las condiciones (18) y (24) debe ser

$$\sum \delta\omega_i = 0 \tag{27}$$

$$\delta E = \sum \bar{\varepsilon}_i \delta\omega_i = 0. \tag{28}$$

Si se multiplican estas relaciones por las constantes λ y β respectivamente y se suman luego con la (26), pueden considerarse todas las $\delta\omega_i$ libres o arbitrarias (método de Lagrange).

Por lo tanto, para que la suma obtenida sea cero, es menester que lo sean las coeficientes de $\delta\omega_i$. Así, resulta

$$\log \omega_i + \lambda + \beta\bar{\varepsilon}_i = 0$$

o

$$\log \omega_i + \beta\bar{\varepsilon}_i = \text{constante}$$

o introduciendo una nueva constante α:

$$\omega_i = \alpha e^{-\beta\bar{\varepsilon}_i}. \tag{31}$$

Es menester ahora calcular α y β. La primera no interesa y la eliminaremos en seguida de las fórmulas.

La entropía del equilibrio es, según esto:

$$S = -kN\sum\omega_i\left(\log\alpha - \beta\bar{\varepsilon}_i\right) \tag{32}$$

o

$$S = -kN\log\alpha\sum\omega_i + kN\beta\sum\bar{\varepsilon}_i\omega_i. \tag{33}$$

Pero se tiene la relación

$$\sum\omega_i = 1 \tag{18}$$

y por las (23) y (31) las

$$\alpha\sum e^{-\beta\bar{\varepsilon}_i} = 1 \tag{34}$$

$$\sum\bar{\varepsilon}_i\omega_i = \frac{E}{N}, \tag{35}$$

con cuyo auxilio la (33) puede escribirse

$$S = -kN\log\alpha + k\beta E \tag{36}$$

o

$$S = kN\log\sum e^{-\beta\bar{\varepsilon}_i} + k\beta E. \tag{37}$$

La constante β se determina con el auxilio de la termodinámica. Ella da para la temperatura absoluta T de un sistema, la relación

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T} \tag{38}$$

con cuyo auxilio resulta de la (36)

$$\frac{1}{kT} = -N\frac{d\log\alpha}{dE} + \beta + E\frac{d\beta}{dE}. \tag{39}$$

A fin de poner en evidencia que el primero y último término del segundo miembro de esta relación se anulan, escribamos

$$Z = \sum e^{-\beta\bar{\varepsilon}_i} \tag{40}$$

y por las (34) y (35)

$$\alpha Z = 1 \qquad \text{o} \qquad \log \alpha = -\log Z \tag{41}$$

$$E = N\alpha \sum \bar{\varepsilon}_i e^{-\beta\bar{\varepsilon}_i} = -N\alpha \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{N}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}. \tag{42}$$

Resulta

$$-N\frac{d\log\alpha}{dE} = N\frac{d\log Z}{dE} = \frac{N}{Z}\frac{dZ}{dE}$$

$$E\frac{d\beta}{dE} = -\frac{N}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dE} = -\frac{N}{Z}\frac{dZ}{dE}$$

y por consiguiente

$$\beta = \frac{1}{kT}. \tag{43}$$

La (37) se convierte así en

$$S = kN \log \sum e^{-\frac{\bar{\varepsilon}_i}{kT}} + \frac{E}{T}. \tag{44}$$

La energía libre, definida por la relación termodinámica

$$F = E - TS \tag{45}$$

es

$$F = -kNT \log \sum e^{-\frac{\bar{\varepsilon}_i}{kT}}. \tag{46}$$

Conocida F se determina la entropía y la energía del sistema por las relaciones termodinámicas

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \tag{47}$$

$$E = F - T\frac{\partial F}{\partial T}. \tag{48}$$

Ocupémosnos ahora de la función de distribución. Como tal debemos entender a una función que nos da el número de elementos discretos contenidos en uno cualquiera de los dominios elementales.

Teníamos la relación

$$\frac{N_i}{N} = \omega_i$$

y por la (31),

$$\frac{N_i}{N} = \alpha e^{-\frac{\bar{\varepsilon}_i}{kT}} \tag{49}$$

y eliminando α con auxilio de la (34)

$$N_i = N \frac{e^{-\frac{\bar{\varepsilon}_i}{kT}}}{\sum e^{-\frac{\bar{\varepsilon}_i}{kT}}}; \tag{50}$$

es claro, pues, que N_i es la función de distribución buscada.

SEGUNDA CONFERENCIA

Los gases ideales monoatómicos. Calores específicos. — El caso de gases poliatómicos. — El cuerpo sólido como sistema de osciladores. — Las oscilaciones infinitamente pequeñas de un sistema de osciladores con K grados de libertad al rededor de una configuración de equilibrio. — La energía libre. La energía media de los osciladores. El calor específico Desacuerdo con los resultados experimentales.

Gases ideales. Ecuación de estado. Calores específicos. — Apliquemos los resultados obtenidos a los gases en estado ideal, es decir, a gases en un estado en que la energía potencial es nula. La energía total será, en esas condiciones, la suma de las energías cinéticas de las moléculas.

Consista el gas en N moléculas monoatómicas de masa m que ocupan el volumen V bajo la presión p. Si las coordenadas y los impulsos varían de una manera continua o, lo que es lo mismo, si todos los puntos del espacio de las fases representan posibles estados de las moléculas, se puede imaginar descompuesto en dominios infinitamente pequeños. La suma de la energía libre se convierte en un integral extendido sobre todo el espacio de las fases.

Como energía media de un elemento de un dominio puede tomarse la de una cualquiera de las moléculas. Se tiene :

$$\bar{\varepsilon}_i = \varepsilon = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}_2). \tag{51}$$

No introducimos la energía de rotación por cuanto en el caso de gases monoatómicos ella es oculta, o, en otras palabras, no se modi-

fica por el choque. Esto equivale a decir que las moléculas de los gases monoatómicos se comportan como si fuesen perfectamente esféricas y absolutamente lisas.

La energía libre

$$F = -kNT \log \sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} \tag{52}$$

se convierte, por lo que antecede, en

$$F = -kNT \log \iiiint\!\!\int e^{-\frac{m}{2kT}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)} dxdydzdm\dot{x}dm\dot{y}dm\dot{z} \tag{53}$$

pues la suma se convierte en un integral sobre todo el espacio de las fases, siendo, por la elección de coordenadas:

$$\begin{aligned} q_1 &= x & p_1 &= m\dot{x} \\ q_2 &= y & p_2 &= m\dot{y} \\ q_3 &= z & p_3 &= m\dot{z}. \end{aligned} \tag{54}$$

La integración con respecto a x, y, z debe extenderse sobre todo el volumen ocupado por el gas, mietras que con respecto a $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ entre $-\infty$ y $+\infty$. Es

$$\iiint dxdydz = V \tag{55}$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2kT}\dot{x}^2} dm\dot{x} = \sqrt{2mkT} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{2m\pi kT}, \tag{56}$$

lo que resulta por la substitución

$$\sqrt{\frac{m}{2kT}}\,\dot{x} = u, \tag{57}$$

y lo mismo para los integrales con respecto a $\dot{y}, \dot{z}$. Substituyendo en la (53) los valores de los integrales resulta

$$F = -kNT \log \left[V (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} \right]. \tag{58}$$

Por la expresión de la energía libre F en función del volumen y de la temperatura del gas queda definido su comportamiento termodinámico.

Se tiene para la presión

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} \tag{59}$$

y, por lo tanto,

$$p = \frac{kNT}{V}, \tag{60}$$

relación que contiene no solamente las leyes de Boyle-Mariotte y Gay Lussac, sino también la regla de Avogadro, pues en ella la presión depende únicamente del número N de moléculas y no de la naturaleza del gas.

La ecuación de estado de los gases ideales, tal cual figura en la física general, es

$$p = \frac{RnT}{V} \tag{61}$$

si n es el número de gramo-moléculas del gas. La constante R es una constante universal para todos los gases cuyo valor es

$$R = 8{,}315 \,.\, 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{grado}}. \tag{62}$$

Por comparación se obtiene

$$kN = Rn. \tag{63}$$

Si n es un gramo-molécula e indicamos con N_0 el número de moléculas resulta :

$$kN_0 = R \qquad \text{o} \qquad k = \frac{R}{N_0}, \tag{64}$$

lo que muestra que la constante universal es la R referida no a gramo-moléculas sino a la molécula misma.

Para la energía del gas resulta :

$$E = F - T\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{3}{2} NkT, \tag{65}$$

y esta es la energía cinética total del sistema, de acuerdo con lo supuesto.

Por otra parte, la termodinámica enseña que la energía interna de un gas ideal, que depende como es sabido únicamente de la temperatura, está dada en unidades mecánicas por la relación

$$E = JnC_vT, \tag{66}$$

donde C_v es el calor molar, n el número de gramo-moléculas y J el equivalente mecánico del calor, siendo

$$J = 4{,}184 \,.\, 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{cal}}. \tag{67}$$

Por comparación de las (65) y (66) y teniendo presente la (63) resulta :

$$C_v = \frac{3}{2}\frac{Nk}{Jn} = \frac{3}{2}\frac{R}{J}, \tag{68}$$

y substituyendo los valores de R y J

$$C_v = \frac{3}{2}\frac{8{,}315}{4{,}184}\,\text{cal} = 2{,}981\ \text{cal.} \tag{69}$$

De la termodinámica resulta también la relación

$$C_p - C_v = \frac{R}{J}, \tag{70}$$

donde C_p y C_v son los calores molares a presión y a volumen constantes. De esta relación y de la (68) se obtiene

$$C_p = \frac{5}{2}\frac{R}{J}, \tag{71}$$

y por consiguiente

$$\frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}, \tag{72}$$

donde c_p y c_v son los calores específicos. Como es sabido, la experiencia da también para los gases monoatómicos ese mismo valor para la relación entre los calores específicos.

Al expresar la energía cinética de cada átomo se han dejado de lado las rotaciones, a causa de que si se suponen esféricos sus energías de rotación no se modifican por los choques o, en otras palabras, la energía de rotación es oculta. Las coordenadas de las rotaciones no son estadísticas. Es decir, aun cuando el átomo tiene mecánicamente 6 grados de libertad son estadísticos solamente los tres de las translaciones.

Si se tiene un gas ideal cuyas moléculas rígidas tienen g grados de libertad se tiene — como probaremos en el capítulo siguiente — para la energía de N moléculas

$$E = \frac{g}{3}\cdot\frac{3}{2}NkT = \frac{1}{2}gNkT = \frac{1}{2}RTgn, \tag{73}$$

y de idéntica manera que antes

$$C_v = \frac{1}{2}g\frac{R}{J} \tag{74}$$

$$C_p = \frac{1}{2}(2+g)\frac{R}{J}, \tag{75}$$

y por lo tanto

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{2+g}{g}. \tag{76}$$

Veamos cómo se cuentan los grados de libertad. Si la molécula tiene un átomo es $g = 3$, pues las rotaciones no se modifican por los choques; si tiene dos átomos (fig. 2) los choques no modifican la rotación según la recta de unión A_1A_2; son grados estadísticos, por lo tanto, las dos rotaciones restantes y las tres traslaciones, es decir, 5. Si tiene 3 átomos los grados de libertad son 6. Los resultados aparecen en el cuadro adjunto

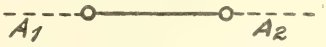


Fig. 2

Número de átomos	Grados de libertad g	$\frac{C_p}{C_c} = k$
1	3	1,66
2	5	1,4
3	6	1,33

que están en muy buena concordancia con los resultados experimentales.

La función de distribución que resulta para los gases ideales de la (50), o lo que es lo mismo de la (49), es la conocida de Maxwell. Para gases monoatómicos es :

$$f = N\alpha e^{-\frac{m}{2kT}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}. \tag{77}$$

Teoría del cuerpo sólido. El oscilador lineal. Las oscilaciones infinitamente pequeñas de un sistema de osciladores con K *grados de libertad al rededor de una configuración de equilibrio.* — Hemos dicho ya que la representación más sencilla del cuerpo sólido es un sistema de osciladores que cumplen oscilaciones infinitamente pequeñas al rededor de una configuración de equilibrio.

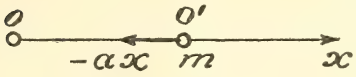


Fig. 3

Según esta concepción, si una molécula es desviada de su posición de reposo nace una fuerza elástica, dirigida hacia la posición de equilibrio y proporcional al apartamiento momentáneo. La molécula cumple merced a ella un movimiento armónico.

Debemos ocuparnos por esto del oscilador lineal. Sea O (fig. 3) la posición de reposo de un punto material de masa m. Si se encuentra en

un instante dado en O′ actúa sobre él una fuerza proporcional a OO′.

Haciendo coincidir un eje x de coordenadas de origen O con la dirección OO′ la ecuación de movimiento se escribe

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -ax. \tag{78}$$

El integral general es de la forma

$$x = \mathrm{A}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{a}{m}}\,t - \Theta\right), \tag{79}$$

donde Θ y A son constantes arbitrarias y que permiten satisfacer las condiciones iniciales, cualesquiera que ellas sean.

La frecuencia ν del oscilador está dada por la relación

$$2\pi\nu = \sqrt{\frac{a}{m}}. \tag{80}$$

La energía, que es constante, se determina calculando la energía potencial para la elongación máxima, en cuyo instante no existe energía cinética.

Si A es la amplitud, se tiene:

$$\mathrm{E} = \int_0^{\mathrm{A}} axdx = \frac{1}{2}a\mathrm{A}^2 \tag{81}$$

y eliminando a entre esta relación y la anterior resulta

$$\mathrm{E} = 2\pi^2 m\mathrm{A}^2\nu^2. \tag{82}$$

De este resultado haremos uso más tarde. Para las aplicaciones inmediatas escribamos la energía de otro modo. Si en un momento dado el oscilador tiene la elongación x y la velocidad $\dot{x}$, la energía se expresa por la suma

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^x axdx = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ax^2 \tag{83}$$

de las energías cinética y potencial.

Antes de aplicar los resultados estadísticos al oscilador lineal es menester estudiar el problema de las oscilaciones infinitamente pequeñas de un sistema de osciladores con K grados de libertad, al rededor de una configuración de equilibrio.

La energía potencial es función exclusiva de las coordenadas, de modo que, desarrollando según la serie de Taylor, se tiene

$$U = U_0 + \sum_1^K i q_i \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 + \frac{1}{2}\sum_1^K i \sum_1^K j q_i q_j \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 + \dots \tag{84}$$

limitando el desarrollo hasta el tercer término por la pequeñez de los q. El subíndice cero se refiere a la posición de equilibrio. Puesto que para la posición de equilibrio en U un mínimum debe ser

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 = 0$$

y además

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} = \text{const} = C_{ij}.$$

Así resulta

$$2U = \sum_1^K i \sum_1^K j C_{ij} q_i q_j. \tag{85}$$

Para la energía cinética se había encontrado

$$2L = \sum_1^K i \sum_1^K j Q_{ij} q_i' q_j' \tag{86}$$

donde las Q_{ij} son funciones de las q solamente. Es fácil ver que si las oscilaciones son infinitamente pequeñas las Q_{ij} pueden considerarse como constantes. Basta para ello desarrollarlas en serie de Taylor.

Gauss ha demostrado que se pueden introducir nuevas coordenadas $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_K$, por una transformación lineal, de tal modo que U y L queden expresados por la suma de términos en $\dot{\varphi}^2$ y φ^2 respectivamente.

Es decir, si se introducen nuevas coordenadas φ definidas por la transformación lineal

$$\begin{aligned} q_1 &= b_{11}\varphi_1 + b_{12}\varphi_2 + \dots + b_{1K}\varphi_K \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ q_K &= b_{K1}\varphi_1 + b_{K2}\varphi_2 + \dots b_{KK}\varphi_K \end{aligned} \tag{87}$$

pueden determinarse las b, que son funciones de los Q_{ij}, de modo que sea:

$$2U = d_1\varphi_1^2 + d_2\varphi_2^2 + \dots + d_K\varphi_K^2 \tag{88}$$

donde las d son constantes.

Resulta, al mismo tiempo:

$$2L = e_1\dot{\varphi}_1^2 + e_2\dot{\varphi}_2^2 + \ldots + e_K\dot{\varphi}_K^2 \tag{89}$$

donde los e son constantes.

El problema es el mismo que se presenta cuando se tiene, por ejemplo, la ecuación de un elipsoide referido a ejes cualesquiera y se le quiere referir a los ejes principales.

Las coordenadas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_K$ se llaman *coordenadas principales* o *normales.*

Las ecuaciones de Lagrange eran

$$\frac{\partial}{\partial q_i}(L - U) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i'} = 0 \tag{90}$$

y puesto que para oscilaciones infinitamente pequeñas las Q_{ij} son constantes, L no depende de las q y queda

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i'} = 0, \tag{91}$$

ecuación que vale para coordenadas cualesquiera. Para las coordenadas principales es

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} = 0 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, K. \tag{92}$$

De ésta, y de las (88) y (89) resulta

$$e_i\ddot{\varphi}_i + d_i\varphi_i = 0 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, K \tag{93}$$

que representa un movimiento armónico para la coordenada φ_i. Es decir, a cada coordenada normal corresponde un movimiento oscilatorio o, en otras palabras, el sistema de osciladores con K grados de libertad equivale a K osciladores lineales.

Si el sistema consiste de N moléculas, cada una de las cuales tiene g grados de libertad, el número K de grados de libertad del sistema es Ng y equivale a Ng osciladores lineales.

Podemos demostrar ahora la generalización efectuada para gases ideales cuyas moléculas tienen g grados estadísticos de libertad. Para un gas ideal la energía potencial es nula.

La energía cinética de una molécula puede escribirse

$$\varepsilon = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\sum_1^{g-3} ie_i\dot{\Phi}_i^2 \tag{94}$$

donde a la energía de rotación se le ha dado la forma cuadrática, de acuerdo con la transformación (87). Si se utilizan los ángulos de Euler φ, θ y Φ para describir el movimiento rotatorio de la molécula, las Φ_i son funciones lineales de esos ángulos. Si las tres rotaciones son ocultas es $g = 3$, y se puede dejar de lado el segundo término de la (94); si es sólo una la rotación oculta es $g = 5$ y la suma constará de sólo dos términos en $\dot{\Phi}_i^2$.

En el cálculo de la energía libre aparecen $2g$ integrales en lugar de las 6 que figuran en la (53), pues las coordenadas del espacio de las fases son las g coordenadas $x, y, z, \Phi_1, \ldots$, y los g impulsos correspondientes. De esos $2g$ integrales g son de la forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{C}{2kT}\dot{u}^2} d\dot{u} = \sqrt{2C\pi kT} \tag{95}$$

donde la constante C es o m o e_i.

El resultado final es

$$F = -kNT \log \left[V \,.\, B \,.\, m^{\frac{3}{2}} (2\pi kT)^{\frac{g}{2}} \right], \tag{96}$$

donde V proviene de la integración con respecto a x, y, z y la constante, por la integración con respecto a las Φ_i.

De la (96) resulta otra vez la ecuación de estado (60) que vale entonces también para moléculas complejas, como comprueba la experiencia.

Para la energía resulta

$$E = \frac{1}{2} gNkT, \tag{97}$$

es decir, a cada molécula corresponde por grado de libertad la energía

$$\frac{E}{Ng} = \frac{1}{2} kT.$$

Esto constituye el teorema de la *equipartición de la energía.*

La energía libre de un sistema de osciladores según la mecánica estadística clásica. La energía. El calor molar : ley de Dulong y Petit. — Si se tiene un sistema constituído por N osciladores lineales, la energía libre

$$F = -k\,NT \log \sum e^{-\frac{\bar{\varepsilon}_i}{kT}} \tag{99}$$

se escribe

$$F = -kNT \log \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2}\dot{x}^2} e^{-\frac{1}{2}ax^2} dx \,.\, dm\dot{x} \tag{100}$$

si, como supone la mecánica clásica, las coordenadas y los impulsos varían de una manera continua.

Los integrales que figuran en la (100) son del mismo tipo que otros calculados anteriormente. Resulta

$$F = -kNT \log 4\pi kT \sqrt{\frac{m}{a}} \tag{101}$$

o, por la (80)

$$F = -kNT \log \frac{2kT}{\nu}. \tag{102}$$

Si se tiene un sistema compuesto por N moléculas monoatómicas, como a cada una corresponden tres grados de libertad, equivale a 3N osciladores lineales, y por lo tanto

$$F = -3kNT \log \frac{2kT}{\nu}. \tag{103}$$

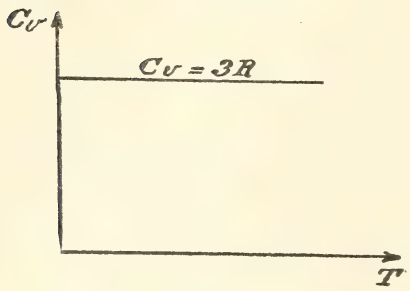


Fig. 4

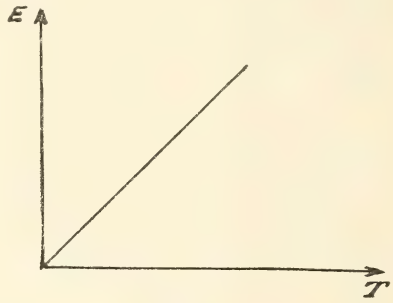


Fig. 5

Para la energía se tiene

$$E = F - T\frac{\partial F}{\partial T} = 3kNT \tag{104}$$

y para un gramo-molécula según la (63)

$$E = 3RT. \tag{105}$$

Para el calor molar se obtiene

$$C_v = \frac{\partial E}{\partial T} = 3R = 5{,}96 \frac{\text{caloría}}{\text{grado}}. \tag{106}$$

Es decir, según la mecánica estadística clásica el calor molar de los cuerpos sólidos es una constante, igual a 5,96 caloría-grado, independiente de la temperatura. Esto constituye la Ley de Dulong et Petit.

Las representaciones de la energía y del calor molar en función de la temperatura, están dadas por las figuras 4 y 5.

Estos resultados teóricos están en completo desacuerdo con los resultados experimentales, pues el calor específico disminuye con la temperatura hasta anularse cerca del cero absoluto como lo han evidenciado los trabajos de Nernst y su escuela. Como se verá, la hipótesis de los « quanta », introducida por Planck para explicar los fenómenos de la radiación, permite también explicar teóricamente el comportamiento de los cuerpos sólidos con la temperatura.

TERCERA CONFERENCIA

Hipótesis de los «quanta». — Energía media de un oscilador. — Teoría del calor específico de Einstein. — La teoría de Debye. — La entropía en el cero absoluto. Teorema de Nernst.

La hipótesis de Planck : los «quanta» . — Planck ha introducido en 1906 la hipótesis de que no todos los puntos del espacio de las fases, como lo admite la teoría clásica, sino solamente algunos, representan posibles estados de los elementos discretos.

En el caso de un oscilador lineal, que es el que nos interesa actualmente, el estado o fase queda definido por su coordenada q y su impulso $m\dot{q}$ y, por lo tanto, el espacio de las fases se reduce a un plano.

A fin de deducir la ecuación de la trayectoria de un oscilador en ese plano, recordemos que

$$q = x = \mathrm{A} \operatorname{sen} 2\pi\nu t \tag{107}$$

$$p = m\dot{x} = 2\pi m \mathrm{A}\nu \cos 2\pi\nu t, \tag{108}$$

de las que resulta para la trayectoria buscada

$$\frac{q^2}{\mathrm{A}^2} + \frac{p^2}{(2\pi m \mathrm{A}\nu)^2} = 1, \tag{109}$$

relación que muestra que las fases de cada oscilador se encuentran sobre una elipse. Todas ellas son semejantes, puesto que la relación entre los ejes es igual a $2\pi m\nu$, es decir, constante.

Según la teoría clásica, si se considera en cierto instante un sistema de osciladores, sus puntos representativos estarán distribuídos sobre todas las elipses imaginables del espacio de las fases, que obedecen, naturalmente, a la (109).

Según la hipótesis de Planck, ellos estarán distribuídos solamente sobre elipses del plano de las fases (fig. 6) tales, que dos cualesquiera de ellas encierren cierta área elemental finita h. Es decir dos cualesquiera de las trayectorias posibles limitan el área elemental

$$\iint dqdp = h. \tag{110}$$

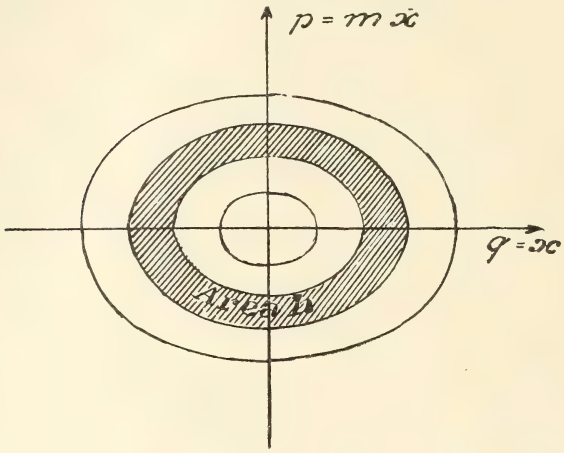


Fig. 6

Puesto que el área de una de las elipses es

$$S = 2\pi^2 A^2 m\nu \tag{111}$$

y la energía de un oscilador está dada por

$$E = 2\pi^2 A^2 \nu^2 m \tag{112}$$

resulta

$$S = \frac{E}{\nu}. \tag{113}$$

Si se indica con el subíndice n la enésima elipse posible y con $n - 1$ la anterior, debe ser, de acuerdo con la (113):

$$S_n = \frac{E_n}{\nu}, \qquad S_{n-1} = \frac{E_{n-1}}{\nu}, \tag{114}$$

y según la hipótesis de Planck (véase fig. 6);

$$S_n - S_{n-1} = h = \frac{E_n - E_{n-1}}{\nu} \tag{115}$$

o

$$E_n - E_{n-1} = h\nu. \tag{116}$$

Como la primera trayectoria debe encerrar también el área h, se obtiene, escribiendo la (116) para todos los n comprendidos entre 0 y n y sumando:

$$E_n = nh\nu, \tag{117}$$

lo que muestra que la energía sólo puede ser un múltiplo entero de

$$\varepsilon = h\nu \tag{118}$$

que será el «quanta» elemental de energía.

Tal es su dimensióu, como salta a la vista. La de h es una energía por un tiempo.

Las elipses así definidas corresponden a estados estacionarios, estados en los que los osciladores pueden perdurar sin absorber o emitir energía. Los cambios que pueden sufrir en un instante dado los osciladores sólo pueden consistir en el pasaje de una trayectoria estacionaria a otra, absorbiendo o emitiendo un número entero de «cuantas» elementales de energía.

Del hecho de que por la suposición de Planck resulta que la energía varía en forma discreta, las amplitudes y velocidades máximas sólo pueden tener ciertos valores.

Por las (112) es

$$A = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\frac{2E}{m}} \tag{119}$$

y, por lo tanto, de acuerdo con la (117) los valores posibles de A están dados por la relación

$$A = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\frac{2n\varepsilon}{m}} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{120}$$

y las velocidades máximas según las (108) y (119)

$$\dot{q}_{\text{máx}} = \dot{x}_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2n\varepsilon}{m}}. \tag{121}$$

De manera semejante se cuantifican otros mecanismos. Sobre la segunda teoría de Planck, referente a la absorción, nos ocuparemos en el capítulo dedicado a la radiación.

La energía libre de un sistema de osciladores según la hipótesis de Planck. La energía. El calor específico : Teoría de Einstein. — Se trata de calcular ahora la energía libre de un cuerpo sólido constituído por N moléculas monoatómicas con el auxilio de la teoría de los «quanta».

La energía libre de estos N átomos está dada por la relación

$$F = -3kNT \log \sum e^{-\frac{\bar{\varepsilon}_i}{kT}} \tag{122}$$

pues los N osciladores equivalen a 3N osciladores lineales.

El problema se reduce a calcular la $\sum$ con el auxilio de la hipótesis de Planck. Es

$$\bar{E}_i = E_n = nh\nu.$$

Escribiendo además

$$\frac{h\nu}{k} = \Theta \tag{123}$$

la suma se convierte en

$$\sum_0^\infty n e^{-n\frac{\Theta}{T}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\Theta}{T}}} \tag{124}$$

pues constituye una progresión geométrica cuya razón es $e^{-\frac{\Theta}{T}}$.

Resulta entonces

$$F = 3kNT \log \left(1 - e^{-\frac{\Theta}{T}}\right). \tag{125}$$

Para la energía del sistema se tiene :

$$E = F - T\frac{\partial F}{\partial T} = 3N\nu h \frac{1}{e^{\frac{\nu h}{kT}} - 1}. \tag{126}$$

reemplazando a Θ por su valor. Es decir la energía de cada grado de libertad es

$$\frac{E}{3N} = \frac{\nu h}{e^{\frac{\nu h}{kT}} - 1} = \frac{\nu h}{e^{\frac{\Theta}{T}} - 1}, \tag{127}$$

mientras que la teoría clásica daba el valor $\frac{1}{2}kT$.

Como resulta fácilmente de la (126) o (127) la dimensión de Θ es la de una temperatura.

Para calcular el calor molar debemos considerar a N como el número de moléculas de un gramo-molécula, en cuyo caso, por la (63), es $N = \frac{R}{k}$ y, por consiguiente, la energía molar

$$E_c' = 3R\Theta \frac{1}{e^{\frac{\Theta}{T}} - 1}. \tag{128}$$

Para el calor molar resulta

$$JC_v = \frac{\partial E'}{\partial T} = 3R \frac{\left(\frac{\Theta}{T}\right)^2 e^{\frac{\Theta}{T}}}{\left(e^{\frac{\Theta}{T}} - 1\right)^2}. \tag{129}$$

Discutamos primeramente dos casos límites.

I. T *muy grande respecto a* Θ. Se tiene el caso de temperaturas elevadas. Como para $T = \infty$, $\frac{\Theta}{T} = 0$, el quebrado toma forma indeterminada. Con el auxilio de la regla de L'Hopital se establece fácilmente que en este caso su valor límite es igual a la unidad. Por lo tanto

$$\lim_{\frac{\Theta}{T}=0} JC_v = 3R, \tag{130}$$

lo que muestra que la ley enunciada por Dulong et Petit es tan sólo una ley límite para temperaturas muy altas. Esto está de acuerdo con la experiencia.

II. T *muy pequeña respecto a* Θ. Es decir, la temperatura es muy baja. Para $T = 0$, $\frac{\Theta}{T} = \infty$. El valor límite del quebrado de la (129) es cero. Luego

$$\lim_{T=0} JC_v = 0, \tag{131}$$

que dice que el calor específico de los sólidos se anula a temperaturas muy bajas, lo que está en armonía perfecta con los resultados experimentales de los últimos tiempos.

Si se representa gráficamente la magnitud $\frac{JC_v}{3R}$ en función de $\frac{\Theta}{T}$ valiéndose de la expresión (129), se obtiene la curva de la figura 7.

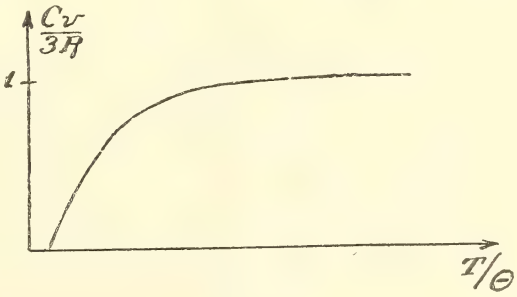


Fig. 7

Para los casos extremos discutidos, esta teoría responde cuantitativamente, y en todas partes, por lo menos cualitativamente, de los hechos de la experiencia, lo que en forma alguna puede hacerlo la teoría clásica.

Para bajas temperaturas la curva que da la teoría de Einstein decrece demasiado rápidamente, con respecto al decrecimiento que revelan las medidas.

De antemano Einstein había expresado que su teoría era susceptible de ser perfeccionada, por cuanto, en realidad, no hay derecho a suponer que todos los osciladores tienen la misma frecuencia.

En este sentido han perfeccionado la teoría particularmente Debye y también Karmann y Born.

La teoría del calor específico de Debye. — Debye identifica las oscilaciones elásticas de la materia con las oscilaciones de las moléculas diciendo que aquéllas no son en realidad otra cosa que la superposición de los movimientos oscilatorios de éstas. Este mismo raciocinio había sido hecho anteriormente por Madelung y Einstein.

Si se tiene un cuerpo elástico compuesto por N moléculas, el número de grados de libertad es 3N, y ese mismo es el número total posible de oscilaciones.

Como según la teoría de la elasticidad, que considera a la materia continua, el número posible de oscilaciones que pueden establecerse en un cuerpo es infinito, Debye supone, de acuerdo con su hipótesis, que sólo tienen existencia real las 3N primeras, empezando a contar desde la frecuencia menor posible. Se tiene, según esto, un espectro de 3N oscilaciones, cuyas frecuencias están limitadas por cierto valor máximo ν_m.

Por la relación (125), que da la energía libre para 3N frecuencias, resulta que la de un oscilador de frecuencia ν es

$$F = kT \log\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right). \tag{132}$$

Si el número de frecuencias comprendidas entre ν y $\nu + d\nu$ la indicamos con $f(\nu)\, d\nu$, donde $f(\nu)$ es la función de distribución de las oscilaciones, resulta para la energía libre del cuerpo, vale decir de las 3N oscilaciones:

$$F = kT \int_0^{\nu_m} f(\nu) \log\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) d\nu \tag{132}$$

debiendo ser

$$\int_0^{m} f(\nu)\, d\nu = 3N, \tag{134}$$

por lo que se ha dicho más arriba.

Para continuar con la resolución del problema es menester estudiar la distribución de las oscilaciones elásticas, es decir, es necesario determinar la función $f(\nu)$.

Principio de Raleigh y Jeans. — Vamos a deducir la distribución de energía oscilatoria en un cuerpo elástico suponiéndolo, para mayor sencillez, un cubo. En un cuerpo limitado sólo son posibles, como es sabido, oscilaciones estacionarias, longitudinales y transversales. Se trata de determinar cuál es el número de frecuencias comprendidas entre ν y $\nu + d\nu$.

Partiremos del hecho conocido de que en una cuerda o barra de longitud l son posibles todas las oscilaciones compatibles con la condición

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{l}{n} \qquad (135)$$

donde λ es la longitud de onda y n el número de divisiones; los puntos de división son los nodos.

En un cubo aparecen en lugar de puntos nodales, planos nodales paralelos a las caras, pudiendo, muy bien, ser diferentes los números n de división correspondiente a las tres direcciones de las aristas.

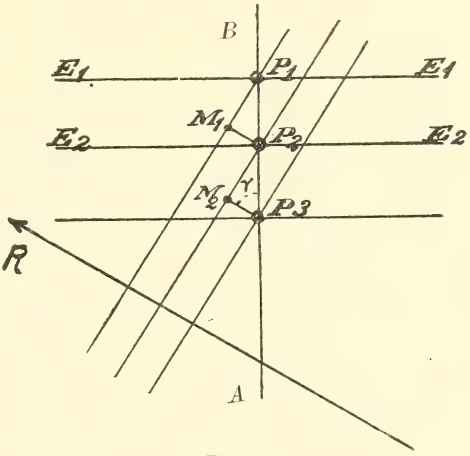


Fig. 8

Consideremos (fig. 8) un sistema de ejes x, y, z que coincidan con tres aristas del cubo y sean n_1, n_2, n_3 los números de división según esas tres direcciones, respectivamente. Sea RR la dirección de propagación de una onda cualquiera y α, β, γ sus ángulos de dirección. Consideremos lo que ocurre en un plano que contenga la dirección RR y sea paralelo a z. Sea ese plano el del papel; AB sea la dirección paralela a z y E_1E_1, E_2E_2, etc., las trazas de los planos nodales perpendiculares al eje z y cuya distancia entre sí será igual a $\frac{a}{n_3}$ si a es la arista del cubo.

Los planos de onda del rayo RR que pasan por P_1, P_2, P_3, etc., deben tener una diferencia de fase de $\frac{\lambda}{2}$, pues P_1, P_2, P_3 deben ser nodos

de las ondas estacionarias correspondientes a la dirección dada. Es decir, que

$$M_1P_2 = M_2P_3 = \frac{\lambda}{2},$$

o puesto que es

$$M_2P_3 = P_2P_3 \cos\gamma \qquad \text{y} \qquad P_2P_3 = \frac{a}{n_3},$$

resulta :

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{a}{n_3} \cos\gamma,$$

e idénticamente para los otros ejes. Resulta así el triple de ecuaciones

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{2a}{\lambda} \cos\alpha \\ n_2 &= \frac{2a}{\lambda} \cos\beta \\ n_3 &= \frac{2a}{\lambda} \cos\gamma. \end{aligned} \tag{136}$$

Es además

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

y por lo tanto,

$$\frac{2a}{\lambda} = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_2^2} \tag{137}$$

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \pm \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \\ \cos\beta &= \pm \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \\ \cos\gamma &= \pm \frac{n_3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}. \end{aligned} \tag{138}$$

Las relaciones (137) y (138) muestran que a cada triple de valores n_1, n_2, n_3 corresponde una oscilación propia de longitud de onda y dirección bien determinada.

El número de frecuencias comprendidas en cierto intervalo $d\nu$ se puede calcular recurriendo a una construcción geométrica sencilla. En el octante de los valores positivos de un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales imaginemos construída una red espacial de

puntos, situados a una distancia igual, según las tres direcciones, y que tomaremos como unidad. A cada punto de la red corresponde un triple n_1, n_2, n_3 de valores, y recíprocamente a cada triple de valores de n corresponde un punto de la red. Por lo tanto, de acuerdo con lo que antecede, a cada punto de la red corresponde una onda estacionaria de frecuencia y dirección determinada.

La distancia de un punto de la red al origen de coordenadas es

$$r = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{2a}{\lambda} = \frac{2a}{v}\nu = r, \tag{139}$$

donde se ha remplazado a λ por su valor $\frac{v}{\nu}$, si se indica con v la velocidad de propagacion de la onda.

El número de oscilaciones comprendidas entre ν' y $\nu'' = \nu' + d\nu'$ será, por lo tanto, igual al número de puntos de la red comprendidos en una región del octante limitado por las superficies esféricas de radios

$$r' = \frac{2a}{v}\nu' \qquad \text{y} \qquad r'' = \frac{2a}{v}\nu''. \tag{140}$$

Como en término medio en la unidad de volumen existe un punto de la red, el número buscado será igual al volumen

$$V = \frac{1}{8} 4\pi r'^2 (r'' - r')$$

de la región indicada. De esta relación y de las dos anteriores resulta

$$f(\nu)\, d\nu = \frac{4\pi a^3 \nu^2}{v^3}\, d\nu = \frac{4\pi V \nu^2}{v^3}\, d\nu \tag{141}$$

indicando ahora con V el volumen del cubo a^3.

El calor específico (continuación). — Continuemos ahora con el problema del calor específico. La relación (141) supone que en cada dirección existe una sola onda estacionaria por frecuencia, si la substancia está *llena* de oscilaciones longitudinales y transversales, es menester contar una onda por cada dirección para las primeras y dos por frecuencia para las segundas.

Es decir, indicando con los subíndices l y t lo referente a las ondas longitudinales y transversales, respectivamente, se tiene

$$f_l(\nu)\,d\nu = \frac{4\pi V\nu^2}{v_l^3}\,d\nu, \qquad f_t(\nu)\,d\nu = 2\,\frac{4\pi V\nu^2}{v_t^3}\,d\nu, \tag{142}$$

de modo que la $f(\nu)$ de las fórmulas (133) y (134) es

$$f(\nu) = f_l(\nu) + f_t(\nu). \tag{143}$$

Poniendo para abreviar

$$\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3} = \frac{3}{v^3} \tag{144}$$

con lo que se introduce, en lugar de las velocidades de propagación v_l y v_t, cierta velocidad media v, resulta

$$f(\nu) = \frac{12\pi V\nu^2}{v^3}. \tag{145}$$

La relación (134) permite calcular, con la (145) a ν_m. Es

$$\frac{12\pi V}{v^3}\int_0^{\nu_m} \nu^2 d\nu = 3N \tag{146}$$

de donde

$$\nu_m = v\sqrt[3]{\frac{3N}{4\pi V}}. \tag{147}$$

Si se introducen las substituciones

$$z = \frac{h\nu}{kT}, \tag{148}$$

$$\Theta = \frac{h\nu_m}{k} = \frac{hv}{k}\sqrt[3]{\frac{3N}{4\pi V}} \tag{149}$$

la (133) se convierte, teniendo presente la (145), en

$$F = \frac{9kNT^4}{\Theta^3}\int_0^{\frac{\Theta}{T}} z^2 \log(1 - e^{-z})\,dz \tag{150}$$

con la que se puede calcular la entropía, la energía y el calor específico. Consideremos, como antes, los dos casos extremos.

1° *Altas temperaturas :* Si es T muy grande con respecto a Θ, lo es

en general con respecto a $\frac{h\nu}{T}$, y por consiguiente z es muy pequeño, en cuyo caso se puede escribir

$$\log(1 - e^{-z}) = \log z,$$

pues es

$$e^{-z} = 1 - z + \ldots,$$

y por la pequeñez de z es suficiente tomar los dos primeros términos.

Se debe calcular entonces el integral

$$\int_0^{\frac{\Theta}{T}} z^2 \log z dz$$

que por la substitución $z = e^x$ se convierte en

$$\int_{-\infty}^{\log \frac{\Theta}{T}} e^{3x} x dx,$$

integral que se calcula en seguida por partes. Se obtiene finalmente

$$\int_0^{\frac{\Theta}{T}} z^2 \log z dz = \frac{1}{3}\frac{\Theta^3}{T^3}\log\frac{\Theta}{T} = -\frac{1}{3}\frac{\Theta^3}{T^3}\log\frac{T}{\Theta},$$

y por consiguiente

$$F = -3NkT\log\frac{e^{\frac{1}{3}}T}{\Theta}. \tag{151}$$

Para la entropía se deduce

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = 3Nk\log\frac{e^{\frac{1}{3}}T}{\Theta} + 3Nk, \tag{152}$$

y para la energía

$$E = F + TS = 3NkT, \tag{153}$$

de donde resulta en seguida, como antes, que la ley de Dulong et Pteit es tan sólo una ley límite, válida para temperaturas elevadas.

2° *Bajas temperaturas :* Si T es muy pequeña con respecto a Θ, es $\frac{\Theta}{T}$, y en general, z muy grande. El integral que figura en la energía libre se convierte en

$$\int_0^\infty z^2 \log(1 - e^z)\, dz = -\frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{z^3 dz}{e^z - 1} = -\frac{\pi^4}{45}.$$

Resulta, por lo tanto,

$$F = -\frac{\pi^4}{5}\frac{NkT^4}{\Theta^3}. \tag{154}$$

Para el valor de la entropía se obtiene

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{4}{5}\pi^4\frac{NkT^3}{\Theta^3}.$$

Este resultado corresponde al teorema de Nernst según el cual la

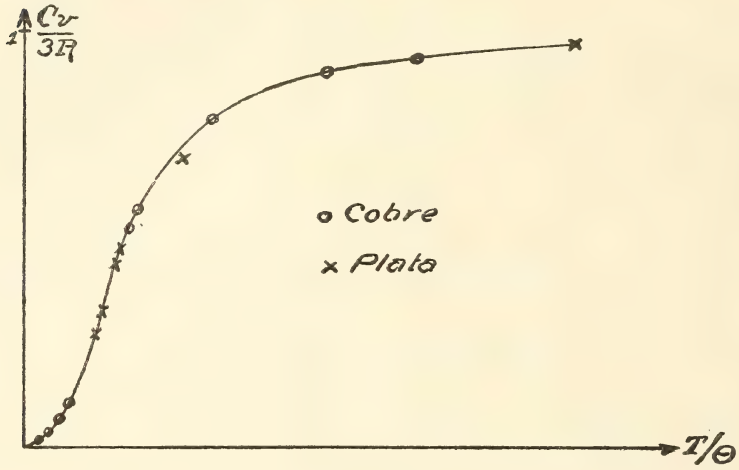


Fig. 9

entropía de un cuerpo sólido o líquido disminuye ilimitadamente con la temperatura.

Para la energía resulta

$$E = F + TS = \frac{3}{5}\pi^4\frac{NkT^4}{\Theta^3}$$

y para el calor molar

$$C_v = \frac{12}{5}\frac{\pi^4 RT^3}{\Theta^3},$$

fórmula que concuerda en forma notable con los resultados experimentales, como lo demuestra la figura 9, donde la línea llena representa la curva teórica y las cruces los resultados experimentales.

CUARTA CONFERENCIA

Teoría de la radiación : Los resultados de la teoría clásica; La teoría quantista de Planck.

La energía que emite en el tiempo dt una superficie elemental dS en el interior de un ángulo elemental sólido $d\Omega$ que forma el ángulo Θ con la normal es

$$E = E \cos \Theta \, . \, dS d\Omega dt, \qquad (1)$$

donde la constante E es para una substancia dada función de la temperatura y representa la energía que emite en la unidad de tiempo la unidad de superficie en el interior de un cono de ángulo sólido uno y cuyo eje coincide con la normal al elemento. Se le denomina *intensidad específica de la radiación.* La energía es emitida en forma de ondas de diferentes frecuencias de modo que será en general

$$E = \int_0^\infty E_\nu d\nu, \qquad (2)$$

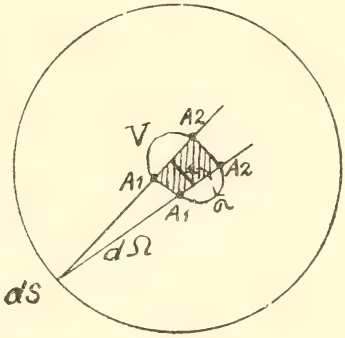


Fig. 10

donde E_ν es la intensidad específica de radiación correspondiente a la frecuencia ν, o, lo que es lo mismo, $E_\nu d\nu$ es la energía proveniente de ondas cuyas frecuencias están comprendidas entre ν y $\nu + d\nu$.

Como un haz de un color cualquiera puede descomponerse en dos haces de la misma intensidad polarizados rectilineamente en direcciones normales entre sí se puede escribir

$$E_\nu = 2I_\nu, \qquad (3)$$

donde I_ν es la intensidad específica de luz polarizada rectilineamente.

Conocida E_ν puede calcularse la energía de radiación de la frecuencia ν contenida en cada centímetro cúbico del medio, es decir, el cociente de dividir la energía de radiación contenida en un elemento de volumen, por el volumen mismo.

Supongamos que se tiene un medio en el que la radiación es uniforme y aislemos con el pensamiento un elemento V de volumen (fig. 10); la radiación que pasa a través de él proviene de todos los elemen-

tos de superficies que lo envuelven. Como es evidente, se puede elegir, sin limitar en forma alguna la generalidad del raciocinio, a una esfera de radio r.

Un elemento dS de la esfera emite en el interior del cono elemental de abertura $d\Omega$, en el tiempo dt, un cuantum de energía representada por la (1).

Si las ondas tardan el tiempo dt en pasar de A_1 a A_2, es decir, si $A_1A_2 = cdt$, indicando con c la velocidad de la luz en el medio, es claro que la energía contenida en cierto instante en el elemento de volumen sombreado y proveniente de dS, es la emitida por ésta en el intervalo dt.

Puesto que

$$\Theta = 90^\circ \qquad \text{y} \qquad d\Omega = \frac{\sigma}{r^2}$$

si se indica con σ el corte normal del cono elemental en la región sombreada, esa energía tiene el valor

$$\frac{EdS\sigma}{r^2}\,dt = \frac{EdS\,.\,\sigma\,.\,A_1A_2}{cr^2}.$$

Para obtener toda la energía contenida en V proveniente de dS se debe sumar sobre todos los conos elementales que parten de dS y cortan a V. Esa energía es

$$\frac{EdS}{cr^2}\sum \sigma A_1A_2 = \frac{EdS}{cr^2}\,V,$$

y para obtener la energía total contenida en V se deben sumar las energías provenientes de todos los elementos dS, o, lo que es lo mismo, integrar la expresión con respecto a S.

Se tiene así para la energía total buscada

$$\frac{4\pi E}{c}\,V,$$

y por lo tanto, la densidad u de la energía será

$$u = \frac{4\pi E}{c} = \frac{8\pi}{c}\int_0^\infty I_\nu d\nu, \tag{4}$$

y por descomposición espectral

$$u_\nu = \frac{8\pi}{c}\,I_\nu. \tag{5}$$

La radiación de un sistema aislado en equilibrio termodinámico o radiación negra. — Consideremos ahora un medio homogéneo e isótropo que posea para la frecuencia ν poderes de emisión y de absorción finitos. Formemos con él un sistema aislado. Un sistema semejante debe estar limitado por superficies que reflejen totalmente las ondas que incidan sobre ellas.

Su estado final o, lo que es lo mismo, su estado de equilibrio estable, se produce cuando la temperatura alcanza en todas partes el mismo valor. En ese estado de equilibrio termodinámico la entropía tiene el valor máximo compatible con la energía supuesta.

Por la homogeneidad e isotropía del medio, la radiación debe ser, en el estado de equilibrio, idéntica en todas partes y en todas las direcciones o, en otras palabras, la intensidad específica I_ν debe ser independiente del azimut de polarización y de la dirección del rayo.

Además, puesto que la temperatura debe tener en el estado de equilibrio un valor igual y constante en todas partes, se sigue que a todo haz divergente de ondas que se propaga en una dirección cualquiera corresponde un haz idéntico convergente que se propaga en sentido contrario, pues el transporte de energía por radiación en un sentido, debe ser igual a lo que transporta la radiación en el mismo tiempo en sentido contrario. Se trata, pues, de un equilibrio dinámico.

Estas consideraciones valen en todas partes, aun sobre la superficie que limita el medio donde la homogeneidad cesa. La radiación en un medio dado, en estado de equilibrio, no dependerá por lo tanto de la manera cómo se ha limitado ni de su extensión, y la intensidad específica I^ν queda definida para toda temperatura de equilibrio por la naturaleza del medio.

En general, los sistemas estarán compuestos por un conjunto de cuerpos, razón por la cual consideraremos dos medios homogéneos, separados por una superficie plana, en equilibrio termodinámico. Sean $I_\nu I_\nu'$ y vv' las intensidades de radiación y velocidades de propagación de las ondas en cada uno de ellos respectivamente. El problema consiste en determinar cuál es, en este caso, la magnitud cuyo valor no depende del lugar del sistema que se considere.

La energía que emite el elemento de superficie dS de la superficie de separación (fig. 11) en el interior del cono elemental (1) de abertura $d\Omega$ en un tiempo dado, debe ser necesariamente la energía que se refleja del haz convergente (2) de abertura $d\Omega$ más la energía que se refracta del haz convergente (3) de abertura $d\Omega'$, haces cuyas posicio-

nes y aberturas son los que corresponden a leyes de la reflexión y refracción.

Es

$$d\Omega = \text{sen}\,\Theta d\Theta d\varphi \tag{6}$$

donde $d\varphi$ es la abertura azimutal del haz

$$d\Omega' = \text{sen}\,\Theta' d\Theta' d\varphi' \tag{7}$$

$$\varphi = \varphi' \tag{8}$$

$$\frac{\text{sen}\,\Theta}{\text{sen}\,\Theta'} = \frac{v'}{v}. \tag{9}$$

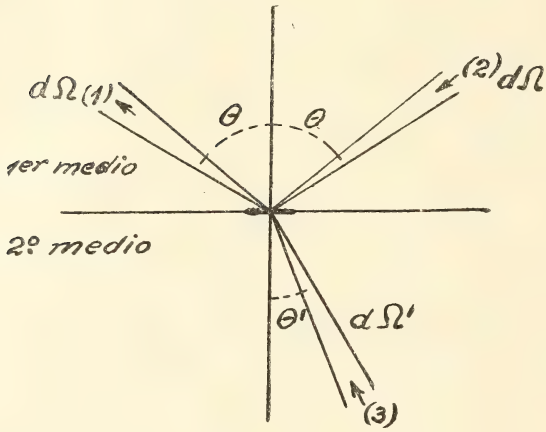


Fig. 11

La energía que emite la superficie dS en el interior del cono (1) en el tiempo dt es

$$\text{I}, \cos\Theta d\Omega d\text{S} dt d\nu. \tag{10}$$

Si, como suponemos, el sistema está en equilibrio termodinámico, la energía que incide sobre dS es igual a la que emite dS en su interior y que está dada también por la (10).

Si R es el poder de reflexión de la superficie con respecto al primer medio, es decir, la relación entre la energía reflejada y la incidente, de la energía que llega sobre dS por el cono (2) se refleja en el interior del (1) la cantidad

$$\text{RI}\ \cos\Theta d\Omega d\text{S} dt d\nu. \tag{11}$$

Del mismo modo la que llega por el cono elemental (3) a dS es igual a la que emite dS, cuyo valor es

$$\text{I}, \cos\Theta' d\Omega' d\text{S} dt d\nu,$$

de la que se refracta propagándose por el cono (1) la cantidad

$$(1 - R') I_\nu' \cos \Theta' d\Omega' dS dt d\nu, \tag{12}$$

si indicamos con R′ el poder de reflexión de la superficie con respecto al segundo medio; 1 — R′ será, por lo tanto, la relación entre la energía refractada y la incidente.

Se tiene, por lo que antecede:

$$I_\nu \cos \Theta d\Omega = R I_\nu \cos \Theta d\Omega + (1 - R') I_\nu' \cos \Theta' d\Omega' \tag{13}$$

y puesto que de las relaciones (6), (7), (8) y (9) se obtiene

$$\cos \Theta' = \frac{v}{v'} \cos \Theta \frac{d\Theta}{d\Theta'}$$

$$\frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{v}{v'} \frac{d\Theta}{d\Theta'}$$

la (13) puede escribirse

$$\frac{I_\nu}{I_\nu'} \frac{v^2}{v'^2} = \frac{1 - R'}{1 - R}. \tag{13}$$

Como v y v' son constantes e I_ν e I_ν' son, para el estado de equilibrio supuesto, independientes del lugar y de la dirección, resulta que el miembro de la izquierda no depende ni del ángulo de incidencia ni del azimut de polarización, y lo mismo ocurrirá con el miembro derecho. Su valor queda determinado si se le conoce para cierto ángulo de incidencia y cierto azimut de polarización.

Si las ondas están polarizadas normalmente al plano de incidencia se tiene para el ángulo de polarización

$$R = 0 \qquad R' = 0,$$

y, por consiguiente, el segundo miembro de la (13) tendrá para cualquier incidencia y azimut de polarización el valor uno. Será, entonces, siempre,

$$R = R', \tag{14}$$

$$I_\nu v^2 = I_\nu' v'^2. \tag{15}$$

La magnitud que en un sistema compuesto no depende del lugar ni de la dirección es, entonces, el producto de la intensidad específica por el cuadrado de la velocidad de propagación de las ondas. Ese producto será, de acuerdo con las suposiciones anteriores, cierta fun-

ción universal $f(\nu T)$ de la frecuencia y de la temperatura, de modo que podemos escribir en forma completamente general

$$v^2 I_\nu = f(\nu T) \tag{16}$$

y el problema de la emisión y de la distribución espectral de la radiación consiste en la determinación de f.

Si una parte del sistema es el éter, se tiene

$$I_\nu = \frac{1}{c^2} f(\nu T) \tag{17}$$

indicando con c la velocidad de las ondas en él.

La magnitud I_ν que se refiere a cierta temperatura T expresada en función de ν es lo que constituye el llamado *espectro normal* de la energía radiada.

Si se tiene un recinto aislado en cuyo interior se encuentran algunos cuerpos que emiten y absorben, en contacto con el éter, tan pronto como el sistema alcanza el equilibrio termodinámico, la radiación tendrá el espectro normal I_ν que corresponde a la temperatura del equilibrio.

Si uno de los cuerpos tiene el poder E_ν de emisión y el R_ν de absorción de la energía I_ν que incide sobre él, se reflejará la cantidad $R_\nu I_\nu$, de modo que, en suma, parte de él la energía $E_\nu + R_\nu I_\nu$, y puesto que existe equilibrio debe ser igual a I_ν que es lo que se propaga en sentido contrario. Luego es

$$E_\nu + R_\nu I_\nu = I_\nu, \tag{18}$$

de donde

$$I_\nu = \frac{E_\nu}{1 - R_\nu}, \tag{19}$$

relación que vale, como es evidente, para cualquiera de las substancias del recinto y constituye la llamada ley de Kirchhoff, que dice que el cociente de dividir el poder de emisión por el de absorción tiene el mismo valor para todas las substancias.

Si $R_\nu = 0$, es decir, si el cuerpo no refleja absolutamente nada, en cuyo caso se le llama *cuerpo negro,* es

$$I_\nu = E_\nu, \tag{20}$$

relación que dice que la intensidad específica del espectro normal o, en otras palabras, el espectro que corresponde al equilibrio termodinámico, es igual al de emisión de un cuerpo negro a la misma temperatura.

La radiación normal se hace accesible a las medidas haciendo un pequeño agujero en el recinto, o, lo que es lo mismo, un pequeño agujero en un recinto constituye un cuerpo negro. Esta realización se debe a W. Wien y a Lummer.

Las determinaciones experimentales dan las curvas de la figura 12, que se refieren a diferentes temperaturas. En ellas se ha dibujado I_λ en lugar de I_ν.

Las fórmulas de I_ν deducidas teóricamente con el auxilio de la termodinámica y la electrodinámica, utilizando la mecánica estadística clásica, no podían dar cuenta satisfactoria de los hechos. Una deducida por Lord Rayleigh representaba bien tan sólo la distribución para las frecuencias menores, mientras que otra deducida por W. Wien representaba con exactitud solamente la distribución para frecuencias elevadas.

Fig. 12

La ley de distribución de la energía en las frecuencias, deducida con el auxilio de la teoría de los « quanta », se ajusta con mucha exactitud a los hechos y contiene como leyes límites las dos anteriores.

Conviene mencionar aquí también dos leyes de importancia en la teoría de la radiación. Una de ellas, la ley de Stefan Boltzman, da la dependencia entre la energía total radiada E por un cuerpo negro y la temperatura. Según ella,

$$E = aT^4, \tag{21}$$

es decir, la energía radiada es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura.

La otra es la ley del desplazamiento de W. Wien, según la cual el producto de la longitud de onda que corresponde al máximo de la curva del espectro normal I_λ por la temperatura es una constante. Es decir que si la temperatura aumenta, el vértice de la curva se desplaza hacia las ondas más cortas. Este hecho es de importancia en la técnica de la iluminación; con el auxilio de esta ley es cómo se calculan, también, las temperaturas del sol y de las estrellas.

Tanto la ley de Stefan Boltzmann como la de Wien se deducen teóricamente y son comprobadas por la experiencia.

Decir que una superficie emite o absorbe ondas caloricas o luminosas, en una palabra, ondas electromagnéticas, es una manera de expresar un hecho sin penetrar en la esencia del fenómeno.

La emisión y absorción se verifican, como es evidente, por elementos materiales. Como, según la teoría de Maxwel, sólo pueden generarse ondas electromagnéticas si existen corrientes o cargas oscilatorias, mejor dicho, siempre que las cargas tengan una aceleración, debemos suponer que la emisión en los cuerpos sólidos provienen de los movimientos oscilatorios de cargas eléctricas, electrones o átomos cargados. Esta suposición tiene un fundamento muy sólido, entre otros hechos, en el fenómeno de Zeemann, que es a la vez una prueba del fundamento de la teoría electromagnética de la luz.

Consideremos por esto un oscilador lineal o, como le denomina Planck habitualmente, un resonador, de masa m — masa material más masa electromagnética — y de carga e, y sea ν_0 la frecuencia de sus oscilaciones propias.

Su energía es, en un instante dado,

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + 2\pi^2 m\nu_0^2 x^2. \tag{22}$$

Si la energía permaneciera constante, la ecuación de movimiento se obtiene escribiendo que $d\varepsilon = 0$, con lo que resulta

$$\ddot{x} + 4\pi^2\nu_0^2 x = 0. \tag{23}$$

El movimiento del resonador sería un movimiento armónico sin amortiguamiento.

Pero una carga e que se mueve con movimiento variado irradia energía. Si el movimiento es uniforme lleva el campo electromagnético consigo y no irradia nada.

Con el auxilio del teorema de Poynting se encuentra (1) que el flujo de energía a través de una superficie cerrada que envuelve a la carga en movimiento es

$$\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{x}^2. \tag{24}$$

Es claro que si $\ddot{x}$ es la aceleración que corresponde al instante t, el flujo a través de una superficie esférica corresponde al momento $t + \frac{r}{c}$.

(1) Véase ABRAHAN, *Theorie der Elektrizität*, tomo II.

Para calcular la energía irradiada por el oscilador a través de una superficie cualquiera cerrada que lo contiene, es menester integrar sobre un tiempo grande, pues el flujo dado por la (24) tan pronto tiene una dirección como la opuesta. Podemos, no obstante, considerar a la (24) como la energía irradiada en una unidad de tiempo.

Conviene transformar un poco la (24). Se tiene para la energía radiada en el tiempo de una oscilación τ.

$$\frac{2e^2}{3c^3}\int_0^\tau \ddot{x}^2 dt \tag{25}$$

y puesto que

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}\ddot{x}) = \ddot{x}^2 + \dot{x}\dddot{x} \tag{26}$$

$$\frac{2e^2}{3c^3}\int_0^\tau \ddot{x}^2 dt = \frac{2e^2}{3c^3}\left[\dot{x}\ddot{x}\right]_0^\tau - \frac{2e^2}{3c^3}\int_0^\tau \dot{x}\dddot{x} dt. \tag{27}$$

Ahora bien, la experiencia enseña que las ondas emitidas por los cuerpos son muy poco amortiguadas, de modo, que el primer término del segundo miembro es muy pequeño con respecto al segundo, pues si se escribe $x = \mathrm{A}\cos 2\pi\nu_0 t$, prescindiendo para el cálculo de esta aproximación del amortiguamiento, se anula $\dot{x}$ para $t = 0$, y $\ddot{x}$ para $t = \tau$.

Por consiguiente, puede considerarse, con gran aproximación, como energía radiada en la unidad de tiempo a

$$-\frac{2e^2}{3c^3}\dot{x}\dddot{x}. \tag{28}$$

En un recinto en estado de equilibrio termodinámico, en el que existen algunos cuerpos que emiten y absorben (donde se encuentran los resonadores) en contacto con el éter, se tiene un campo electromagnético: el campo de las ondas. La carga eléctrica e se encontrará bajo la acción de la componente E_x de la fuerza eléctrica. El trabajo que ejecuta esta fuerza sobre el electrón en el tiempo dt está dado por la relación

$$e\mathrm{E}_x dx = e\mathrm{E}_x \frac{dx}{dt} dt = e\mathrm{E}_x \dot{x} dt, \tag{29}$$

de modo que el trabajo gastado en la unidad de tiempo es

$$e\mathrm{E}_x \dot{x}.$$

Se puede escribir ahora en seguida la ecuación de movimiento del resonador, pues por el principio de conservación de la energía, el aumento de la energía del oscilador en la unidad de tiempo debe ser igual al trabajo recibido menos la energía radiada. Así se tiene

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = e\mathrm{E}_x\dot{x} - \frac{2e^2}{3c^3}\dot{x}\dddot{x}, \tag{31}$$

de donde resulta

$$\ddot{x} - \omega\dddot{x} + n_0^2 x = \frac{e}{m}\mathrm{E}_x \tag{32}$$

donde se ha puesto para simplificar los cálculos

$$\omega = \frac{2e^2}{3c^3 m}; \qquad n_0 = 2\pi\nu_0. \tag{33}$$

La solución de la ecuación diferencial (32) es la superposición de las oscilaciones propias que corresponden a la ecuación sin segundo miembro y de las forzadas que determina la fuerza E_x.

Se trata entonces primeramente de la solución de la ecuación

$$\ddot{x} - \omega\dddot{x} + n_0^2 x = 0. \tag{34}$$

Como el amortiguamiento es pequeño, la frecuencia de esta oscilación es, con una aproximación muy grande ν_0 o $\frac{n_0}{2\pi}$.

La integración se obtiene escribiendo

$$x = \mathrm{B}e^{zt} \tag{35}$$

y por lo tanto z debe cumplir la relación

$$n_0^2 + z^2 - \omega z^3 = 0, \tag{36}$$

ecuación de tercer grado que tiene una raíz real y dos complejas. La primera carece de sentido físico.

Sean las complejas

$$z = \alpha \pm i\beta. \tag{37}$$

El movimiento del resonador será, por la fórmula de Euler, de la forma

$$x = \mathrm{B}e^{\alpha t}\cos\beta t, \tag{38}$$

donde, puesto que la energía disminuye por la radiación, debe ser α

negativo. Como el amortiguamiento es muy pequeño, la frecuencia de las oscilaciones de elongación apreciable es ν_0 y, por consiguiente,

$$\beta = 2\pi\nu_0 \qquad \text{y} \qquad \alpha = -\gamma\nu_0 \tag{39}$$

si γ es el decrecimiento logarítmico de las oscilaciones.

Substituyendo en la (36) a z por el valor expresado por la (37) y anulando por separado las partes real e imaginaria, resulta

$$n_0^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \omega\alpha^3 + 3\alpha\beta^2\omega = 0, \tag{40}$$

$$2\alpha + \beta^2\omega - 3\alpha^2\omega\beta = 0, \tag{41}$$

relaciones que permiten determinar α y β.

En la (41) puede despreciarse a $3\alpha^2\omega\beta$ con respecto a $\beta^2\omega$ y esto con gran aproximación, luego resulta

$$\alpha = -\frac{1}{2}\beta^2\omega \tag{42}$$

y puesto que de antemano sabemos que $\beta = 2\pi\nu_0$

$$\alpha = -\frac{2}{6}\cdot\frac{4\pi^2 e^2 \nu_0^2}{c^3 m} \tag{43}$$

si se introduce al mismo tiempo el valor de ω. De la ecuación (40) se obtiene, en seguida, el mismo valor, reemplazando β^2 por la expresión (42) y despreciando los términos que corresponda.

El decrecimiento logarítmico de las oscilaciones es, por las (39) y (43):

$$\gamma = \frac{4}{3}\pi^2 \frac{e^2}{c^3 m}\nu_0. \tag{44}$$

La ecuación de movimiento para el caso en que existe una fuerza periódica puede escribirse

$$\ddot{x} - \frac{\gamma}{2\pi^2\nu_0}\dddot{x} + 4\pi^2\nu_0^2 x = \frac{e}{m}E_x, \tag{45}$$

y se trata ahora de determinar el movimiento forzado, pues las oscilaciones propias se extinguen por radiación.

La fuerza periódica E_x será de la forma

$$E_x = A_\nu \cos 2\pi\nu t$$

o la parte real de

$$A_\nu e^{i2\pi\nu t} \tag{46}$$

Como en el campo electromagnético existen todas las frecuencias posibles, E_x será en realidad una suma de términos de la forma $A_\nu \cos 2\pi\nu t$. Pero como el movimiento propio es muy poco amortiguado, sólo producirán oscilaciones forzadas de amplitud apreciable las frecuencias ν muy próximas a ν_0.

La oscilación forzada será de la forma de la parte real de

$$x = Be^{i(2\pi\nu t - \Theta)},$$

de donde

$$\dot{x} = i2\pi\nu Be^{i(2\pi\nu t - \Theta)}$$

$$\ddot{x} = -4\pi^2\nu^2 Be^{i(2\pi\nu t - \Theta)} \tag{47}$$

$$\dddot{x} = -i8\pi^3\nu^3 Be^{i(2\pi\nu t - \Theta)},$$

y por la (45)

$$B\left\{4\pi^2(\nu_0^2 - \nu^2) + i\frac{8\pi^3\nu^3\gamma}{2\pi^3\nu_0}\right\}e^{-i\Theta} = \frac{e}{m}A_\nu \tag{48}$$

$$B = \frac{e}{m}\frac{A_\nu e^{-i\Theta}}{4\pi^2\left\{(\nu_0^2 - \nu^2) + i\frac{\gamma}{\pi}\frac{\nu^2}{\nu_0}\right\}} \tag{49}$$

$$B = \frac{e}{4\pi^2 m}\frac{A_\nu e^{-(\Theta + \varepsilon)}}{\sqrt{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2\frac{\nu^6}{\nu_0^2}}} \tag{50}$$

y así se tiene por la (47) la oscilación forzada.

La energía del oscilador para las oscilaciones forzadas es, puesto que ν debe ser sumamente cercana a ν_0:

$$\varepsilon = 2\pi^2 m\nu_0^2 x_{\max}^2, \tag{51}$$

pues cuando la elongación alcanza el valor máximo $x_{\max}$ no existe energía cinética. Es además $x_{\max}$ la amplitud de x.

Es

$$x_{\max}^2 = \frac{e^2}{16\pi^4 m^2}\frac{A_\nu^2}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2\frac{\nu^6}{\nu_0^2}}. \tag{52}$$

Puesto que $x_{\max}$ tiene un valor apreciable solamente si ν es muy próximo a ν_0, se tiene

$$(\nu_0^2 - \nu^2)^2 = (\nu_0 + \nu)^2(\nu_0 - \nu)^2 = 4\nu_0^2(\nu_0 - \nu)^2$$

$$\frac{\nu^6}{\nu_0^2} = \nu_0^4,$$

con lo que la (52) se transforma en

$$x_{\max}^2 = \frac{e^2}{16\pi^4 m^2 \nu_0^2} \frac{A_\nu^2}{4(\nu_0 - \nu)^2 + \left(\frac{\gamma}{\pi}\nu_0\right)^2}. \tag{53}$$

Este es el cuadrado de la amplitud máxima proveniente de la frecuencia ν, y para calcular la energía debemos sumar los cuadrados provenientes de todas las frecuencias. Es decir, debemos integrar la (53) con respecto a ν. Se tiene

$$\sum x_{\max}^2 = \frac{e^2}{16\pi^4 m^2 \nu_0^2} \int_0^\infty \frac{A_\nu^2 d\nu}{4(\nu_0 - \nu)^2 + \left(\frac{\gamma}{\pi}\nu_0\right)^2} \tag{54}$$

$$\sum x_{\max}^2 = \frac{e^2}{16\pi^4 \nu_0^2 m^2} \frac{\pi^2}{2\gamma\nu_0} \overline{A_\nu^2} \tag{55}$$

si $\overline{A_\nu^2}$ es un valor medio del cuadrado de las A_ν.

Reemplazando γ por su valor dado por la (44) e introduciendo luego $\sum x_m^2$ en lugar de $x_{\text{máx}}^2$ en la (51) resulta :

$$\varepsilon = \frac{3c^3}{64\nu_0^2\pi^2} \overline{A_\nu^2}. \tag{56}$$

Por otra parte, la densidad de la radiación debe ser igual a la energía electromagnética contenida en un centímetro cúbico.

Debe ser, por lo tanto,

$$u = \frac{8\pi}{c} \int_0^\infty I_\nu d\nu = \frac{1}{8\pi} (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 + H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) \tag{57}$$

si se indican con $E_x, \ldots$ y $H_x, \ldots$, las componentes de las fuerzas eléctricas y magnéticas, respectivamente. Para ondas que se propagan en el éter la energía eléctrica y magnética son iguales y por la homogeneidad de la radiación debe ser $E_x = E_y = E_z$; $H_x = H_y = H_z$. Es entonces $E_x = H_x$, etc., luego

$$\frac{8\pi}{c} \int_0^\infty I_\nu d\nu = \frac{3}{4\pi} \overline{E_x^2} = \frac{3}{8\pi} \int_0^\infty A_\nu^2 d\nu, \tag{58}$$

y por descomposición espectral

$$\frac{8\pi}{c} \int_{\nu - \frac{d\nu}{2}}^{\nu + \frac{d\nu}{2}} I_\nu d\nu = \frac{3}{8\pi} \int_{\nu - \frac{d\nu}{2}}^{\nu + \frac{d\nu}{2}} A_\nu^2 d\nu, \tag{59}$$

y por consiguiente

$$\frac{8\pi}{c}\,\overline{I_\nu} = \frac{3}{8\pi}\,\overline{A_\nu^2}. \tag{60}$$

Poniendo el valor de $\overline{A_\nu^2}$ que da la (60) en la (56), se tiene finalmente

$$I_\nu = \frac{\nu^2}{c^2}\,\varepsilon, \tag{61}$$

relación que liga la intensidad específica de radiación con la energía de un oscilador.

Pero según la hipótesis de los «quanta» la energía media de un oscilador es

$$\varepsilon = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \tag{62}$$

y por consiguiente

$$I_\nu = \frac{h\nu^3}{c^2}\,\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \tag{63}$$

y, por lo tanto, la función universal de distribución es

$$f(\nu T) = \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{64}$$

Si se introduce λ en lugar ne ν se tiene :

$$I_\lambda\,|\,d\lambda\,| = I_\nu\,|\,d\nu\,| \tag{65}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \tag{66}$$

y por consiguiente

$$|\,d\nu\,| = \frac{c\,|\,d\lambda\,|}{\lambda^2} \tag{67}$$

e

$$I_\lambda = \frac{c^2 h}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{\frac{ch}{k\lambda T}} - 1}, \tag{68}$$

que representa la intensidad específica que emite normalmente a su superficie un cuerpo negro a la temperatura T en el éter.

Para pequeños valores de λT, es decir, para grandes frecuencias, la (61) se convierte en

$$I_\lambda = \frac{c^2 h}{\lambda^5}\,e^{-\frac{ch}{k\lambda T}}, \tag{69}$$

pues se puede despreciar el 1 con respecto al exponencial en el denominador. Se tiene así la ley de distribución de Wien.

Si λT es grande, $\frac{ch}{k\lambda T}$ es pequeño y desarrollando en serie el exponencial limitándose a los dos primeros términos, resulta :

$$I_\lambda = \frac{ckT}{\lambda^4} \tag{70}$$

que es la fórmula de Lord Rayleigh.

La fórmula de Planck representa, como ya se dijo, satisfactoriamente los hechos experimentales, conteniendo las fórmulas de distribución, que eran válidas solamente para algunas regiones del espectro.

De la relación (4) resulta, por la (68), para la energía contenida en un centímetro cúbico :

$$u = \alpha \frac{48\pi h}{c^3} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 = aT^4, \tag{71}$$

donde

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots = 1{,}0823.$$

La (71) es la fórmula de Stefan Boltzmann. Las medidas experimentales dan para la constante a el valor

$$a = 7{,}061 \,.\, 10^{-15} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \text{ grado}^4}. \tag{72}$$

La longitud de onda λ_m que corresponde al vértice de la curva de I_λ se determina escribiendo

$$\frac{dI_\lambda}{d\lambda} = 0.$$

La diferenciación da la ecuación transcendente

$$e^{-z} + \frac{z}{5} - 1 = 0, \tag{73}$$

donde

$$z = \frac{ch}{k\lambda_m T}. \tag{74}$$

La raíz de la ecuación transcendente es

$$z = 4{,}9651. \tag{75}$$

Se tiene así la ley de Wien

$$\lambda_m T = \frac{ch}{kz}. \tag{76}$$

Las medidas de Lummer y Pringshein dan

$$\frac{ch}{kz} = 0{,}294 \text{ cm gr.} \tag{77}$$

De las (72) y (77) se obtiene

$$k = 1{,}346 \,.\, 10^{-16} \frac{\text{erg}}{\text{grado}} \qquad h = 6{,}548 \,.\, 10^{-27} \text{ erg seg.}$$

INTEGRACIÓN GRÁFICA

DE LAS

ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA CINÉTICA QUÍMICA

POR EL INGENIERO JOSÉ BABINI

Las ecuaciones diferenciales que aparecen en el estudio de la cinética química traducen analíticamente la «ley de acción de masa» y están dadas por expresiones de la forma

$$v = \frac{dx}{dt} = F(x), \qquad (1)$$

donde x es la masa activa, v la velocidad de reacción y t el tiempo.

Integrada la ecuación (1) se llega a una expresión del tipo $\varphi(tx) = 0$ de la cual se deduce la función

$$x = F_1(t) \qquad (2)$$

y por eliminación de x entre 1 y 2, la función

$$v = F_3(t). \qquad (3)$$

Estas funciones (2) y (3) son muy importantes, pues permiten prever los valores de la masa activa y de su velocidad de transformación en un instante cualquiera de la reacción.

Las ecuaciones diferenciales de la cinética química presentan, en su integración, un doble inconveniente :

1° De carácter analítico, por cuanto, si bien en las reacciones aisladas la integración es siempre posible, aunque a veces larga y engorrosa; en las reacciones simultáneas aparecen sistemas de ecua-

ciones diferenciales difíciles de integrar y, a veces, dependiendo de cuadraturas no resolubles por medios elementales;

2° De carácter algebráico, cuando se trata de determinar las expresiones (2) y (3); determinación que en muchos casos es difícil de efectuar, dada la forma generalmente trascendente de la integral.

De aquí la necesidad de recurrir a medios auxiliares (númericos, gráficos o mecánicos) que obvíen esos inconvenientes y faciliten la integración de esas ecuaciones.

En este trabajo nos proponemos utilizar un método gráfico que elimina los inconvenientes anteriores, aunque, como todos los procedimientos gráficos de integración, no es exacto, sino aproximado.

Aplicaremos el método a casos concretos de los siguientes tipos de transformaciones :

1° Reacciones aisladas : *a)* monomoleculares; *b)* bimoleculares; *c)* trimoleculares;

2° Reacciones catalíticas;

3° Reacciones opuestas y laterales;

4° Reacciones sucesivas : *a)* monomoleculares; *b)* mono y bimoleculares; *c)* bimoleculares;

5° Transformaciones radioactivas.

Esbocemos previamente el método para el caso de una reacción aislada (1).

Consideremos una terna de ejes ortogonales y midamos, con módulos convenientes, el tiempo t sobre el eje de las abscisas, la masa activa x sobre el eje de las ordenadas y los valores de la velocidad de reacción v sobre el eje de las cotas.

Representemos ese triedro (fig. 1) por el método de Monge, considerando el plano tOx como plano horizontal, el tOv como plano vertical y el xOv como plano de perfil.

Sea c en el cuadrante xOv la curva representativa de la función (1) y $M_1(x_0 t_0)$ en el cuadrante xOt un punto perteneciente a la curva a representativa de la función (2).

Recordando las propiedades fundamentales del método de Monge, se deduce que el punto $M_2)t_0 v_0)$, en el cuadrante tOv es el punto correspondiente de la curva b representativa de la función (3).

(1) El fundamento general del método puede verse en E. Zondadari, *Integrazione delle equazioni differenziali ordinarie coi metodi della geometria descrittiva,* S. E. Dante Alighieri, Milano, 1917.

Tomando OU = 1, la recta UM_2' tiene por coeficiente angular

$$\frac{OM_2'}{OU} = OM_2' = v_0 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0}$$

por lo tanto, es paralela a la tangente de la curva a en el punto M_1. Sea M_1N_1 esa tangente y consideremos que el punto N_1, próximo a M_1

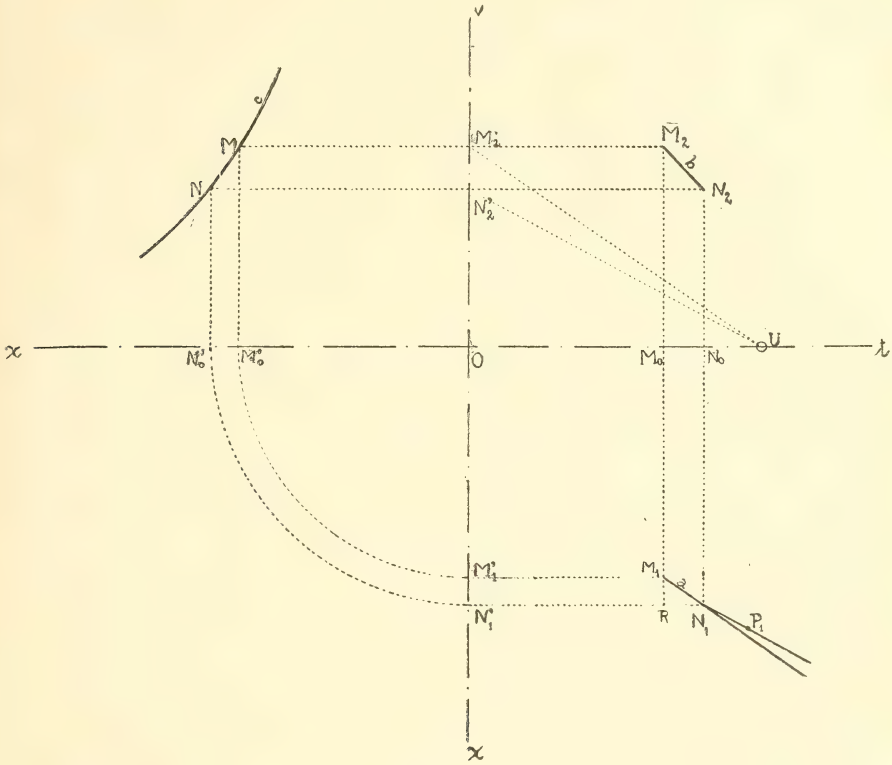


Fig. 1

en esa recta, en el sentido creciente de las t, pertenezca a la curva a.

En esta substitución de tangente por cuerda estriba la inexactitud del método y de ella depende su aproximación, cuanto menor es el intervalo M_0N_0, tanto menor será el error cometido.

Operando con N_1 en la misma forma que con M_1 y así sucesivamente, obtendremos las curvas a y b.

En cuanto al punto inicial M_1, se determina de acuerdo a las condiciones iniciales de la reacción. Si x es la masa activa transformada tendremos $t_0 = x_0 = 0$ y el punto inicial M_1 será el origen O y si x

es la masa activa presente tendremos $t_0 = 0$ y x_0 será la cantidad inicial de masa activa y el punto inicial M_1 estará sobre el eje de las x.

Como las variables t, v, x se miden en unidades distintas y sus valores numéricos, expresados en la unidad correspondiente, son en general muy distintos, convendrá utilizar módulos diferentes para cada variable y, en este caso, hay que tener en cuenta la siguiente observación.

Si m_1, m_2, m_3 y m_4 representan, en centímetros, los módulos con que medimos t, v, x y la unidad, respectivamente, tendremos :

$$M_1R = m_3(x_1 - x_0) = m_3\Delta x$$

$$N_0M_0 = N_1R = m_1(t_1 - t_0) = m_1\Delta t$$

$$OM_2' = m_2 v$$

$$OU = m_4$$

y siendo los triángulos $M_2'OU$ y M_1RN_1 semejantes, se verificará

$$\frac{M_1R}{N_1R} = \frac{M_2'O}{OU}$$

$\therefore$

$$\frac{m_3\Delta x}{m_1\Delta t} = \frac{m_2 v}{m_4},$$

y siendo

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

se llega a

$$m_1 m_2 = m_3 m_4,$$

relación fundamental que se debe verificar entre los módulos y que tendremos en cuenta al calcularlos.

1. REACCIONES AISLADAS

a) Monomoleculares. — Consideremos el caso de la descomposición del AsH_3, cuya constante de velocidad es $K = 0{,}0906$ (1) midiendo el tiempo en horas y supongamos una masa activa inicial de 0,5 moles.

(1) VAN'T HOFF, *Leçons de chimie physique* (1ere partie), página 191, París, 1898.

La función (1) será

$$v = \frac{dx}{dt} = 0{,}0906\,(0{,}5 - x),$$

siendo x la masa activa transformada.

Adoptando como módulos :

$$m_1 = \frac{2\text{ cm}}{\text{hora}}, \qquad m_2 = \frac{15\text{ cm}}{\text{moles}},$$

$$m_2 = \frac{300\text{ cm}}{\text{moles}}\text{ hora}, \qquad m_1 = 40\text{ cm},$$

construímos, en la figura 2 (1), la curva c, en este caso particular una recta, de la cual dibujamos únicamente la parte AB ($0 \leq x \leq 0{,}5$).

Adoptando intervalos de tiempo de media hora, es decir, $0{,}5 \times 2 = 1$ centímetro construímos, de acuerdo al método expuesto, las curvas a y b.

La a tiene por asíntota la recta M'P' paralela al eje de las abscisas a la distancia $0{,}5 \times 15 = 7{,}5$ centímetros y la b tiene por asíntota el eje de las abscisas.

Con el gráfico así construído tendremos que para un tiempo representado por el segmento OM_0, los segmentos M_0M_1, M_0M_2 y M_1M' representan, respectivamente, la masa activa transformada, la velocidad de reacción y la masa activa presente.

Por ejemplo, para $t = \frac{OU}{2} = 20$ horas, tendremos $x = \frac{UP_1}{15} = 0{,}42$ moles, según el gráfico y según el cálculo analítico $x = 0{,}418$ moles, valor bastante aproximado al valor que da el gráfico.

b) Bimoleculares. — Consideremos el caso de la saponificación del acetato de etilo para el cual la constante de velocidad es $K = 2{,}3$ (2) midiendo el tiempo en minutos y supongamos que las cantidades iniciales de éter y agua sean 0,02 y 0,026 respectivamente.

La función (1) será

$$v = \frac{dx}{dt} = 2{,}3\,(0{,}02 - x)\,(0{,}026 - x),$$

donde x es la masa activa transformada.

(1) La figura 2 y siguientes son reproducciones reducidas de las láminas originales y es a estas últimas a las que se refiere el texto.

(2) VAN'T HOFF, *Op. cit.*, página 194.

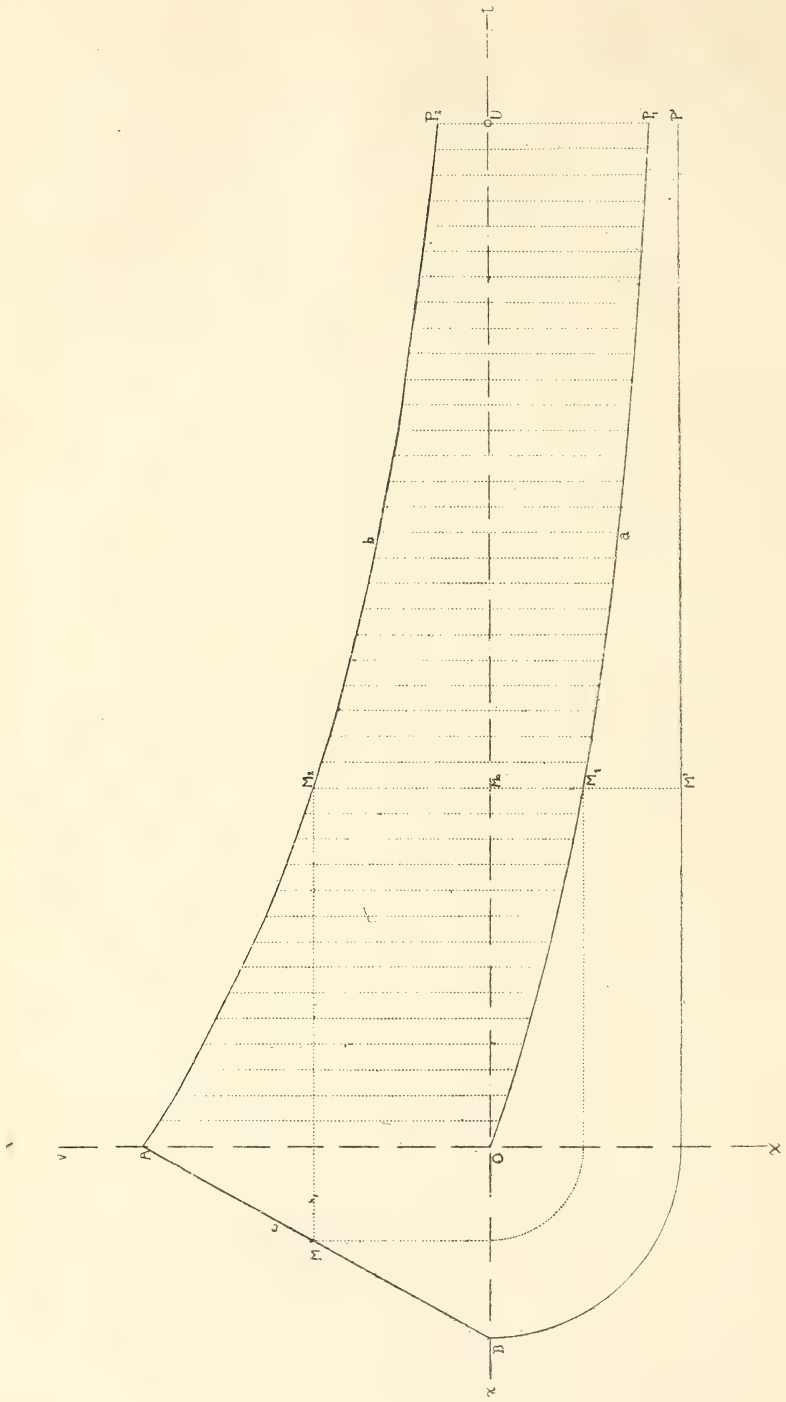


Fig. 2

Adoptando como módulos

$$m_1 = \frac{2 \text{ cm}}{\text{minuto}}, \qquad m_3 = \frac{500 \text{ cm}}{\text{moles}},$$

$$m_2 = \frac{10.000 \text{ cm}}{\text{moles}} \text{ minuto}, \qquad m_4 = 40 \text{ cm},$$

construímos, en la figura 3, la curva c, en este caso una parábola ordinaria de la cual dibujamos únicamente la parte AB ($0 \leq x \leq 0{,}02$).

Adoptando intervalos de tiempo de un minuto, es decir, 2 centímetros, construímos las curvas a y b.

Lo mismo que en el caso anterior la curva a tiene por asíntota la recta M'P' paralela al eje de las abscisas, a la distancia $0{,}02 \times 500 = 10$ centímetros y la b tiene por asíntota el eje de las abscisas.

Con el gráfico así construído tenemos que, para un tiempo representado por el segmento OM_0, los segmentos M_0M_1, M_0M_2 y M_0M' representan, respectivamente, la masa activa transformada, la velocidad de reacción y la masa activa presente.

Por ejemplo, para $t = \frac{OU}{2 \text{ cm}} = 20$ minutos, tenemos según el gráfico $x = \frac{UP_1}{500 \text{ cm}} = 0{,}0119$, y según el cálculo analítico, para el mismo tiempo, $x = 0{,}0116$, obteniéndose con el gráfico un error relativo bastante pequeño.

c) Trimoleculares. — Consideremos el caso de la reacción del cloruro ferroso, clorato de potasio y ácido clorhídrico, para la cual la constante de velocidad es $K = 1{,}04$ (1), midiendo el tiempo en minutos y supongamos que las cantidades iniciales de los tres cuerpos sea igual a 0,1 moles. Con estos datos la función (1) será

$$v = \frac{dx}{dt} = 1{,}04\,(0{,}1 - x)^3,$$

donde x es la masa activa transformada.

Adoptando como módulos

$$m_1 = \frac{0{,}5 \text{ cm}}{\text{minuto}}, \qquad m_3 = \frac{100 \text{ cm}}{\text{moles}},$$

$$m_2 = \frac{8000 \text{ cm}}{\text{moles}} \text{ minuto}, \qquad m_4 = 40 \text{ cm},$$

(1) VAN'T HOFF, *Op. cit.*, página 197.

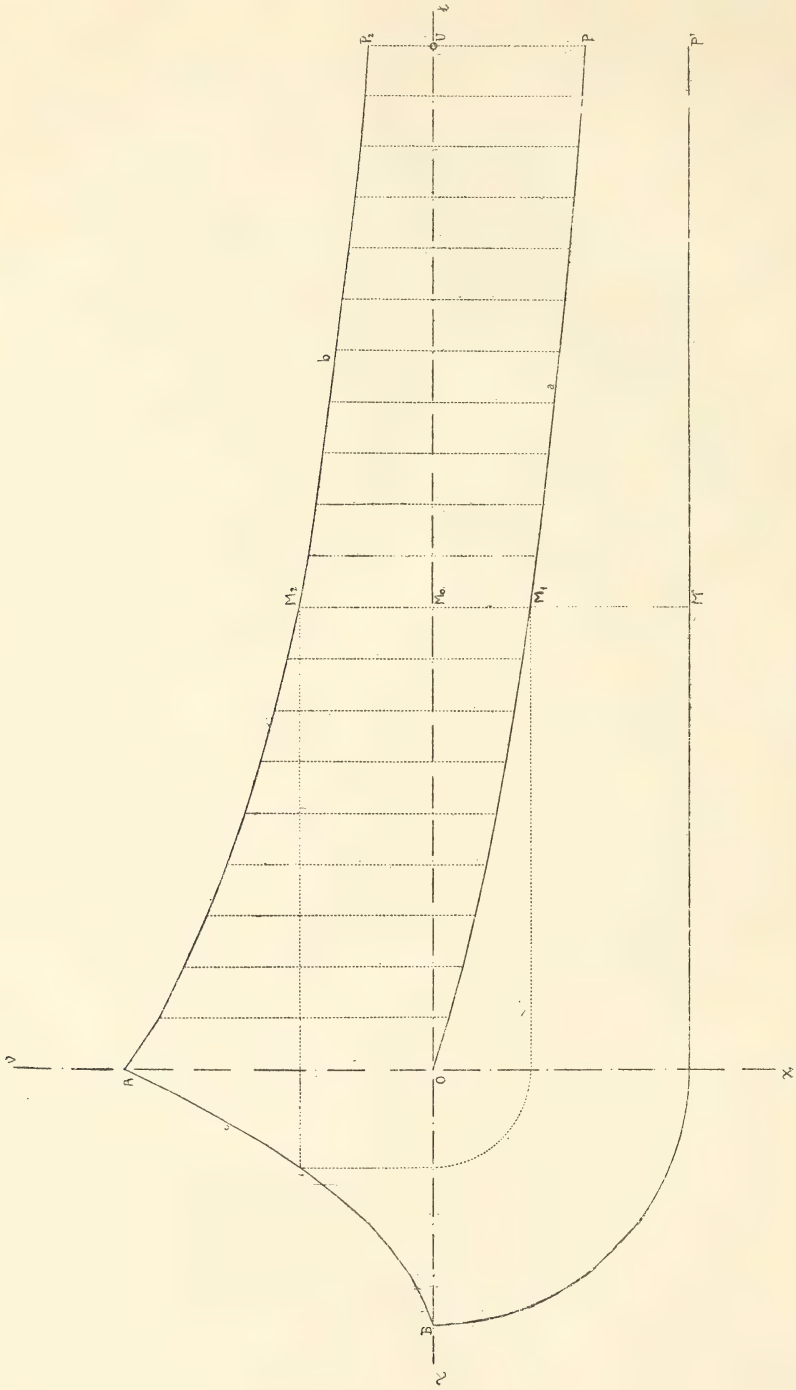


Fig. 3

construímos, en la figura 4, la curva c, en este caso una parábola cúbica de la cual dibujamos únicamente la parte AB ($0 \leq x \leq 0{,}1$).

Adoptando intervalos de 4 minutos, es decir, $4 \times 0{,}5 = 2$ centímetros, construímos las curvas a y b.

La primera tiene como asíntota la recta M'P' paralela al eje de las abscisas a la distancia $0{,}1 \times 100 = 10$ centímetros, y la segunda tiene por asíntota el eje de las abscisas.

Con el gráfico así construído tenemos que, para un tiempo representado por el segmento OM_0, los segmentos M_0M_1, M_0M_2 y M_1M' representan, respectivamente, la masa activa transformada, la velocidad de reacción y la masa activa presente.

Por ejemplo, para $t = \frac{OU}{0{,}5} = 80$ minutos el gráfico da:

$$x = \frac{UP_1}{100} = 0{,}0395,$$

siendo, según el cálculo analítico, para ese tiempo $x = 0{,}0387$.

2. REACCIONES CATALÍTICAS

Consideremos el caso de la obtención del SO_3 por la acción catalítica del Pt, reacción que obedece a la ecuación

$$v = \frac{dx}{dt} = K \frac{a - x}{\sqrt{x}}.$$

Suponiendo una cantidad inicial de SO_2; $a = 300$ milímetros de mercurio y teniendo en cuenta que la constante de velocidad $K = 0{,}201$ (1), midiendo el tiempo en minutos, la función (1) será

$$v = \frac{dx}{dt} = 0{,}201 \frac{300 - x}{\sqrt{x}}.$$

Adoptando los módulos

$$m_1 = \frac{1 \text{ cm}}{\text{minuto}}, \qquad m_3 = \frac{0{,}03 \text{ cm}}{\text{mm}},$$

$$m_2 = \frac{0{,}9 \text{ cm}}{\text{mm}} \text{ minuto}, \qquad m_4 = 30 \text{ cm},$$

(1) W. C. Mc. Lewis, *Traité de chimie physique*, tomo I, página 379, París, 1920.

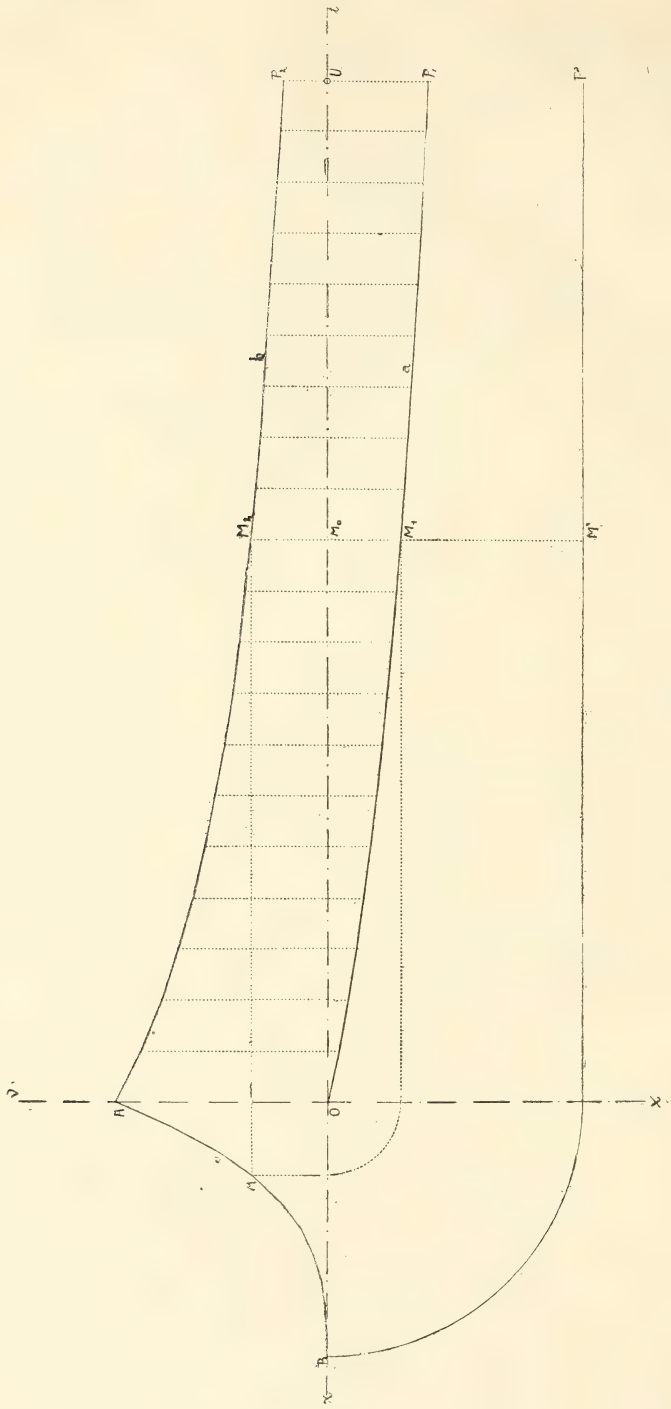


Fig. 4

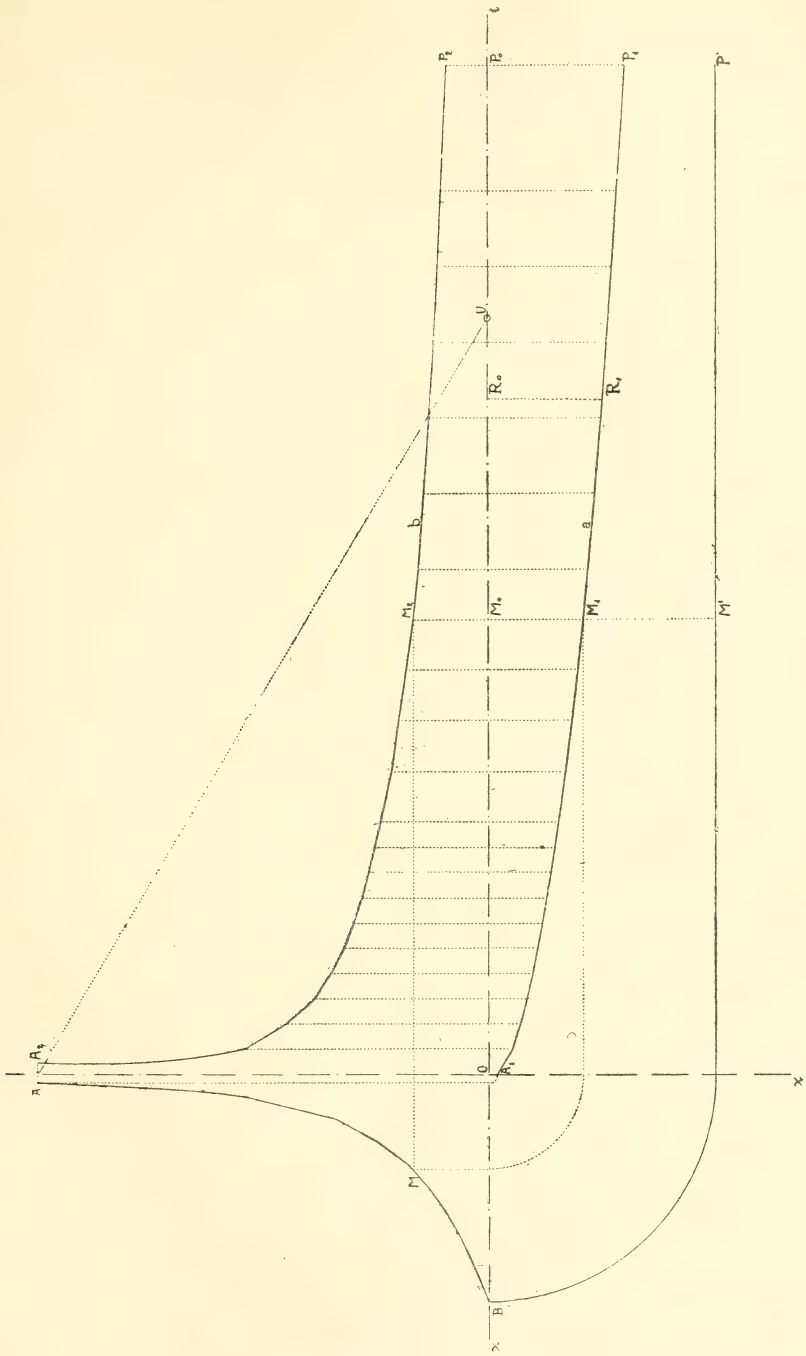


Fig. 5

construímos, en la figura 5, la curva c, que en este caso es una parábola cúbica de asíntota al eje de las cotas y de la cual dibujamos la parte AB ($10 \leq x \leq 300$).

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales $t = 0$, $x = 0$, $v \rightarrow \infty$, la curva a tiene como primer segmento la parte OA_1 del eje de las x, obteniéndose las curvas a y b, por el método conocido, a partir del punto A_1.

La curva a tiene como asíntota la recta M'P' paralela al eje de las abscisas a la distancia $300 \times 0{,}03 = 9$ centímetros, y la curva b tiene como asíntota el eje de las cotas y el eje de las asíntotas.

Con el gráfico así construído tenemos que, para un tiempo representado por el segmento OM_0, los segmentos M_0M_1, M_0M_2 y M_1M' representan, respectivamente, la cantidad de SO_3 presente, la velocidad de reacción y la cantidad de SO_2 presente.

Como en este caso la integración analítica de la función (1) llega a una integral que no puede reducirse a la forma (2), no podemos efectuar una comprobación directa del gráfico mediante el cálculo analítico; en cambio, podemos verificarlo indirectamente.

Así, por ejemplo, según el cálculo analítico, para que la cantidad de SO_2 se reduzca a la mitad, es decir, $x = 150$ milímetros, es necesario un tiempo $t = 27^m8$; según el gráfico para obtener ese resultado, se necesita un tiempo representado por el segmento OR_0, siendo $R_0R_1 = 150 \times 0{,}03 = 4{,}5$ centímetros; segmento representativo de $t = 26{,}7$ minutos, valor aproximado en menos del 4 por ciento.

3. REACCIONES OPUESTAS Y LATERALES

Los ejemplos anteriores hacen ver claramente cómo puede aplicarse el método a cualquier reacción química aislada de orden cualquiera o de tipo cualquiera, con tal de conocer la expresión $v = F(x)$.

Lo mismo puede decirse respecto a las reacciones simultáneas opuestas y laterales.

En efecto en las reacciones opuestas y laterales se conocen las expresiones que dan las velocidades v_1 y v_2 de las reacciones parciales

$$v_1 = f_1(x)$$

$$v_2 = f_2(x),$$

de donde se deduce, como velocidad de reacción, en las opuestas

$$v = v_1 - v_2 = f_1(x) - f_2(x)$$

y en las laterales

$$v = v_1 + v_2 = f_1(x) + f_2(x),$$

es decir, se obtienen para v, expresiones de la forma $v = F(x)$, con las cuales se procede, gráficamente, como en el caso de las reacciones aisladas.

Las curvas c, en las reacciones laterales y opuestas, pueden obtenerse también como suma o diferencia gráfica de las curvas representativas de $v_1 = f_1(x)$ y $v_2 = f_2(x)$.

4. REACCIONES SUCESIVAS

a) Monomoleculares. — Consideremos el caso de la reducción del permanganato de potasio por el ácido oxálico, reducción que puede esquematizarse así :

$$Mn_2O_7 \rightarrow MnO_2 \rightarrow MnO.$$

Llamando x, y, z las cantidades de Mn_2O_7, MnO_2 y MnO, respectivamente, que están presentes en un instante dado y suponiendo una cantidad inicial x_0 de x, se tienen las ecuaciones :

$$x + y + z = x_0$$

$$x' = \frac{dx}{dt} = -K_1 x$$

$$z' = \frac{dz}{dt} = K_2 y$$

$$x' + y' + z' = 0$$

siendo K_1 y K_2 las constantes de velocidad, cuyos valores están dados por

$$e^{-K_1} = 0{,}82 \qquad K_1 = 0{,}1985$$

$$e^{-K_2} = 0{,}98 \text{ (1)} \qquad K_2 = 0{,}0202.$$

Suponiendo la cantidad inicial $x_0 = 1$, las condiciones iniciales de la reacción son :

$$t = 0 \qquad \begin{array}{ll} x = 1 & x' = -0{,}1985 \\ y = 0 & y^1 = 0{,}1985 \\ z = 0 & z' = 0. \end{array}$$

(1) J. W. Mellor, *Higher Mathematics for students of Chemistry and Physics*, página 429, London, 1905.

Adoptando los módulos

$$m_1 = \frac{2 \text{ cm}}{\text{minuto}}, \qquad m_3 = \frac{10 \text{ cm}}{\text{moles}},$$

$$m_2 = \frac{150 \text{ cm}}{\text{moles}} \text{ minuto}, \qquad m_4 = 30 \text{ cm},$$

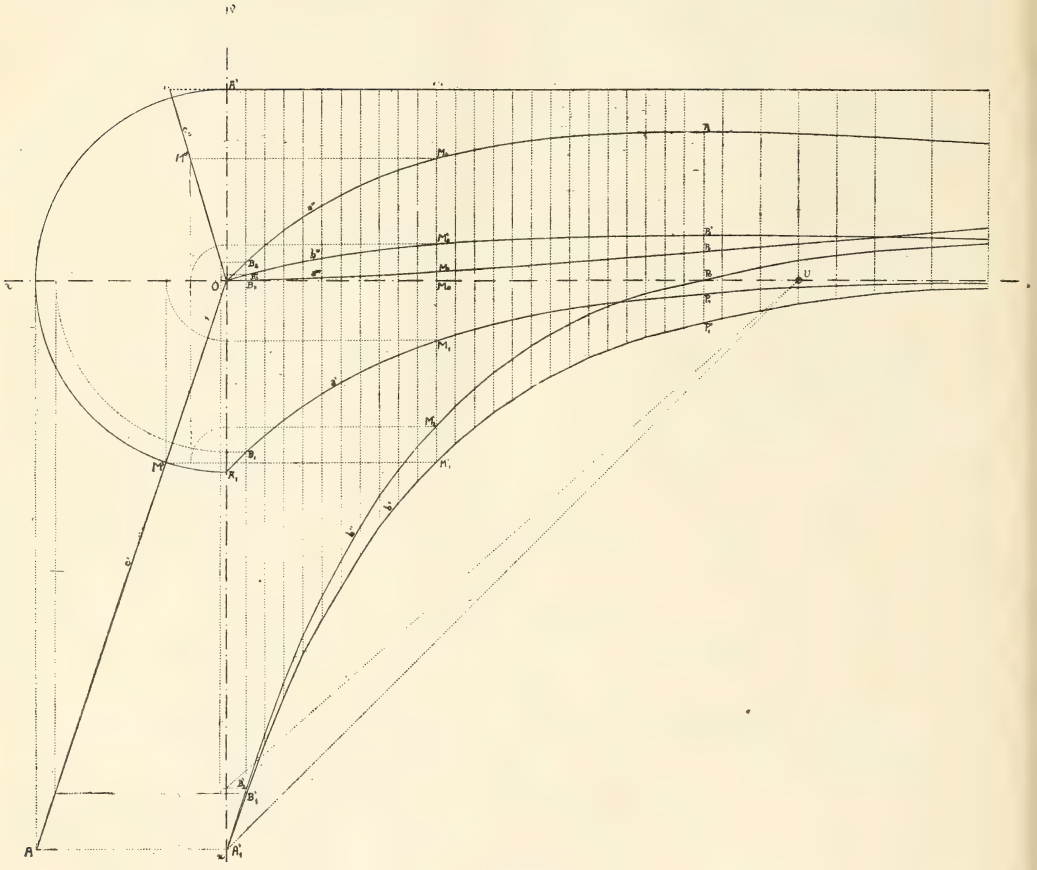


Fig. 6

construímos, en la figura 6, la recta c' representativa de la ecuación $x' = -0{,}1985x$ y de la cual dibujamos únicamente la parte OA $(0 \leq x \leq 1)$ y mediante ella construímos la curvas a' y b' representativas de la variación de x y x' respecto a t. Para construir las curvas representativas de la variación de las demás variables, construímos previamente la recta c'', representativa de la función $z' = 0{,}0202y$, dibujando de ella la parte OR $(0 \leq y \leq 1)$.

Teniendo en cuenta que los valores iniciales de x' e y' son iguales en valor absoluto, obtenemos en $OB_2 \parallel A_1B_1$ el primer segmento de la curva a'' representativa de la variación de y respecto a t, con el cual y mediante c'' obtenemos en B_3B_3' el valor correspondiente de z', valor que llevamos en $B_1'B_2'$ obteniendo así, en B_3B_2' el valor de y', con el cual, de acuerdo al método gráfico, seguimos obteniendo los puntos de las curvas a'', b'' y b''' representativas de la variación de y, y' y z'. Por último, por simple diferencias gráficas, obtenemos las curvas a''' representativas de la variación de z respecto a t.

Todas las curvas tienen por asíntota el eje de las abscisas, excepto a''' que tiene por asíntota la recta A'M paralela a ese eje a la distancia $1 \times 10 = 10$ centímetros.

Al punto P_0, intersección de b'' con el eje de las abscisas, corresponden los máximos P_2 y P_3' de a'' y b''' y el punto de inflexión P_3 de a'''.

Con el gráfico así construído tenemos que, para un tiempo representado por el segmento OM_0, los segmentos M_0M_1, M_0M_2, M_0M_3, M_0M_1', M_0M_2', M_0M_3' y M_3M representan, respectivamente, los valores de x, y, z, x', y', z' y de $1 - z = x + y$ en ese instante.

Así, por ejemplo, el máximo de y se verifica, según el gráfico, para

$$t = \frac{OP_0}{2 \text{ cm}} = 12{,}55 \text{ minutos},$$

siendo

$$x = \frac{P_0P_1}{10 \text{ cm}} = 0{,}071, \qquad x' = \frac{P_0P_1'}{150 \text{ cm}} = 0{,}0153,$$

$$y = \frac{P_0P_2}{10 \text{ cm}} = 0{,}778, \qquad y' = 0,$$

$$z = \frac{P_0P_3}{10 \text{ cm}} = 0{,}151, \qquad z' = \frac{P_0P_3'}{150 \text{ cm}} = 0{,}0153.$$

Para ese estado, el cálculo analítico (1) da

$$t = 12{,}8 \text{ minutos}, \qquad \begin{array}{ll} x = 0{,}079, & x' = 0{,}00156, \\ y = 0{,}773, & y' = 0, \\ z = 0{,}148, & z' = 0{,}00156, \end{array}$$

aproximadamente iguales a los valores dados por el gráfico.

(1) Las fórmulas que dan directamente esos valores pueden verse en G. VIVANTI, *Nuovi esercizi di analisi infinitesimale,* página 315, Pavía, 1916.

b) Mono y bimoleculares. — Consideremos la misma reacción estudiada en el caso anterior y que mediante ciertas condiciones experimentales puede esquematizarse así :

$$Mn_2O_7 \rightarrow MnO_2$$

$$MnO_2 + C_2H_2O_4 \rightarrow MnO.$$

Llamando x, y z las cantidades de Mn_2O_7, MnO_2 y $C_2H_2O_4$ presentes, respectivamente, en un instante dado y suponiendo a y b las cantidades iniciales de Mn_2O_7 y $C_2H_2O_4$ se tienen las ecuaciones :

$$x + y - a = z - b$$

$$x' = \frac{dx}{dt} = - K_1 x$$

$$z' = \frac{dz}{dt} = - K_2 yz$$

$$x' + y' = z',$$

donde K_1 y K_2 son las constantes de velocidad que tienen por valor (1) :

$$K_1 = 0{,}69 \qquad K_2 = 0{,}006364.$$

Suponiendo $a = 100$ y $b = 120$, las condiciones iniciales de la reacción serán :

$$\begin{array}{lll} & x = 100, & x' = -69, \\ t = 0, & y = 0, & y' = 69, \\ & z = 120, & z' = 0. \end{array}$$

Adoptando los módulos

$$m_1 = \frac{3 \text{ cm}}{\text{minuto}}, \qquad m_3 = \frac{0{,}1 \text{ cm}}{\text{moles}},$$

$$m_2 = \frac{0{,}2 \text{ cm}}{\text{moles}} \text{ minuto}, \qquad m_4 = 6 \text{ cm},$$

construímos, en la figura 7, la recta c representativa de la ecuación $x' = -0{,}69x$, de la cual dibujamos la parte OA ($0 \leq x \leq 100$) y mediante ella obtuvimos las curvas a' y b' representativas de la variación de x y x'.

(1) J. W. Mellor, *Op. cit.*, página 431.

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales pueden determinarse los primeros segmentos OB_2 y A_3B_2 de las curvas a'' y a''' representativas de la variación de y y z, respectivamente, con los cuales y mediante la construcción gráfica de una cuarta proporcional, se obtiene B_0B_2' representativo del valor correspondiente de z', con el cual, por diferencia gráfica, se obtiene el segmento B_0B_2' representativo del valor correspondiente de y'.

Con esos segmentos se puede proseguir la construcción de las cur-

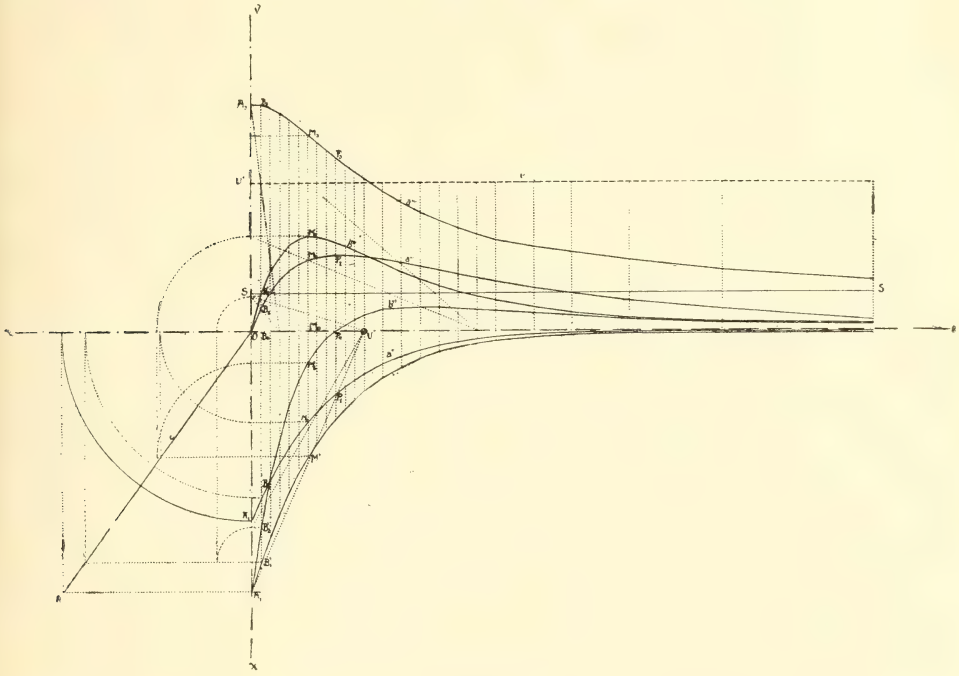


Fig. 7

vas a'' y a''', al mismo tiempo que se construyen las curvas b'' y b''' representativas de la variación de y' y z' respectivamente.

Para la construcción de la cuarta proporcional hemos considerado un eje e a la distancia OU′ del eje de las abscisas y tal que esa distancia representa el valor $\frac{1}{K_2} = y\frac{z}{z'} = 157$, medido con un módulo $\frac{m_2^2}{m_1} = \frac{0,1^2}{0,2} = 0,05$, de donde OU′ = 7,85 centímetros.

Todas las curvas tienen por asíntota el eje de las abscisas, excepto a''' que tiene por asíntota el eje SS′ paralelo al anterior a la distancia OS = (120 — 100) 0,1 = 2 centímetros.

Con el gráfico así construído tenemos que, para un tiempo representado por el segmento OM_0, los segmentos M_0M_1, M_0M_2, M_0M_3, M_0M_1', M_0M_2' y M_0M_3' representan, respectivamente, los valores de x, y, z, x', y', z' en ese instante.

En este caso la ventaja del método gráfico sobre el analítico es evidente, por cuanto la integración analítica del sistema de ecuaciones diferenciales que definen este tipo de reacciones sucesivas, conduce, en el caso adoptado por nosotros ($a \neq b$) a una ecuación diferencial de Riccati que no cumple ningún criterio de integrabilidad y no resoluble, por lo tanto, por cuadraturas; y aun en el caso más sencillo ($a = b$) (1), se llega a una ecuación de Bernouilli, una de cuyas cuadraturas es resoluble únicamente por serie, exigiendo largos y engorrosos cálculos para la determinación de los valores numéricos.

No es, pues, posible verificar nuestro gráfico por comparación con el método analítico; a pesar de esto podemos efectuar una comprobación indirecta utilizando los valores de las variables en el instante que el valor de y llega a su máximo ($y' = 0$).

Para ese instante debe verificarse, además de la condición fija

$$x + y = z - 20,$$

la condición $y' = 0$, es decir

$$K_1 x = K_2 yz.$$

En ese instante (punto P_0) el gráfico da :

$$x = \frac{P_0P_1}{0{,}1} = 33,$$

$$t = \frac{OP_0}{3\ \text{cm}} = 1^{m}30'', \qquad y = \frac{P_0P_2}{0{,}1} = 40,$$

$$z = \frac{P_0P_3}{0{,}1} = 92.$$

es decir,

$$x + y = 73, \qquad K_1 x = 22{,}77,$$

$$z - 20 = 72, \qquad K_2 yz = 23{,}42,$$

valores aproximadamente iguales.

c) Bimoleculares. — Consideremos el caso de la reacción del per-

(1) Este caso es el que adoptan las obras ya citadas de Mellor y Vivanti.

sulfato de potasio sobre el ácido fosforoso, en la cual actúa como agente intermediario el ácido iodhídrico.

Si con a, b, c indicamos las masas activas iniciales de HI, $K_2S_2O_8$ y H_3PO_3 respectivamente y con $(a - x)$, $(b - x)$, $(c - y)$ las masas activas presentes de esas mismas substancias, las ecuaciones diferenciales de esta reacción son :

$$x' = \frac{dx}{dt} = K_1 (a - x)(b - x)$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = K_2 (c - y)(x - y),$$

donde $(x - y)$ representa la masa activa presente de iodo y K_1 y K_2 son constantes de velocidad que tienen por valor (1) :

$$K_1 = 0{,}0065, \qquad K_2 = 0{,}157,$$

midiendo el tiempo en horas.

Adoptando como valores iniciales

$$a = 100 \text{ moles}$$

$$b = 6 \text{ moles}$$

$$c = 10 \text{ moles}$$

y como módulos

$$m_1 = \frac{12 \text{ cm}}{\text{hora}}, \qquad m_3 = \frac{2 \text{ cm}}{\text{moles}},$$

$$m_2 = \frac{3 \text{ cm}}{\text{moles}} \text{ hora}, \qquad m_4 = 18 \text{ cm},$$

construímos, en la figura 8, la curva c representativa de la ecuación

$$v = 0{,}0065 (100 - x)(b - x),$$

y mediante ella las curvas a' y b' representativas de la variación de x y x', en la misma forma que en la figura 3.

Para obtener las curvas a'' y b'' representativas de la variación de y e y' construímos previamente el punto C tal que OC represente la masa activa inicial c, y el eje U'U'' tal que OU' mide el valor $\frac{1}{K_2} = \frac{(c - y)(x - y)}{y'} = 6{,}37$ con módulo $\frac{m_3^2}{m_2} = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$, de donde OU' = 8,49 centímetros.

(1) J. W. Mellor, *Chemical Statics and Dynamics*, página 105, Londres, 1909.

Con estos elementos y teniendo en cuenta los datos iniciales

$$t = 0, \qquad x = 0, \qquad x' = K_1 ab,$$

$$y = 0, \qquad y' = 0,$$

construímos los segmentos representativos de y' como cuartas pro-

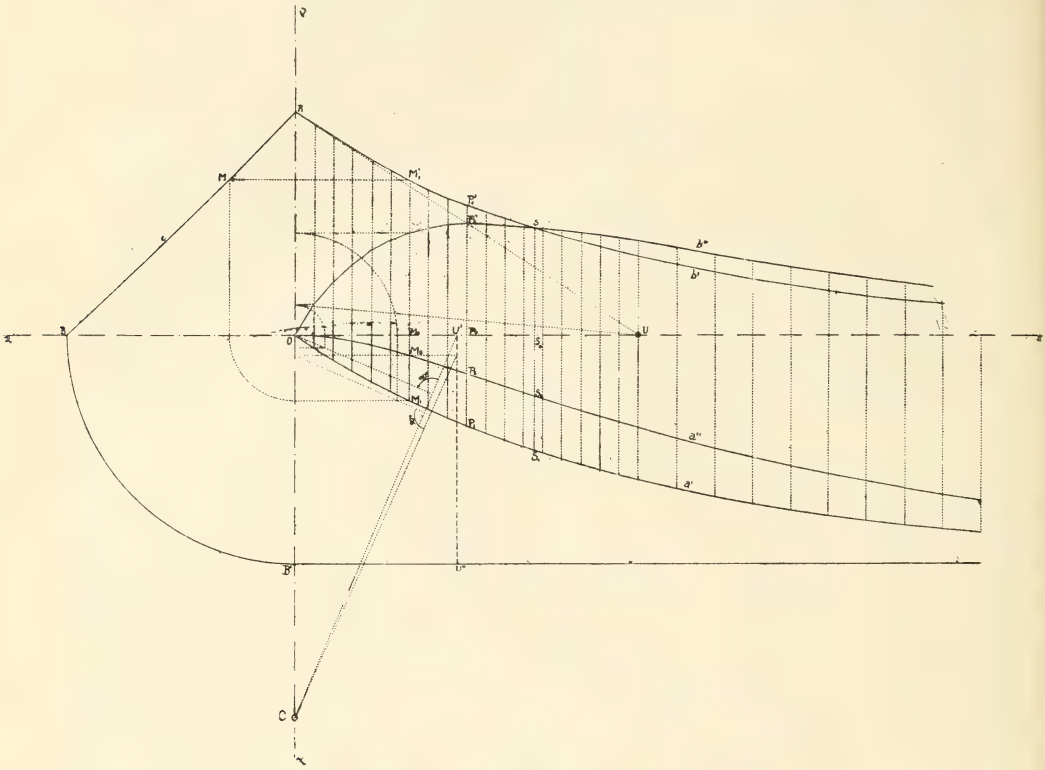


Fig. 8

porcionales entre los segmentos representativos de $(c - y)$, $(x - y)$ y $\frac{1}{K_2}$, obteniendo así las curvas a'' y b''.

Las curvas a' y a'' tienen por asíntota la recta B′U″ paralela al eje de las abscisas a la distancia $6 \times 2 = 12$ centímetros, y las b' y b'' tienen por asíntota el eje de las abscisas.

Con el gráfico así construído tenemos que para un tiempo representado por el segmento OM_0 los segmentos M_0M_1, M_0M_2, M_1M_2, M_0M_1' y M_0M_2' representan, respectivamente, los valores de x, y, $(x - y)$, x' e y'.

El punto S, intersección de b' y b'', indica la condición de la forma-

ción del máximo de la cantidad de iodo, puesto que siendo $x' = y'$, $x' - y' = 0$ y $x - y$ es un máximo.

Del gráfico se deduce que ese máximo se verifica a las

$$\frac{OS_0}{12\ \text{cm}} = 1^{h}2^{m}40^{s},$$

siendo ese máximo $\frac{S_1S_2}{2\ \text{cm}} = 1{,}43$ moles.

A pesar de que en este caso, como en el anterior, la integración analítica del sistema conduce a una ecuación de Riccati imposible de integrar, podemos comprobar, indirectamente, la exactitud del método gráfico. En efecto, en el máximo de y' (punto P_2') debe verificarse $y'' = 0$, es decir, $y'(x - y) = (x' - y')(c - y)$.

Del gráfico deducimos

$$y' = \frac{P_0P_1'}{3\ \text{cm}} = 1{,}95$$

$$y'(x - y) = 2{,}68$$

$$(x - y) = \frac{P_1P_2}{2\ \text{cm}} = 1{,}375$$

$$(x' - y') = \frac{P_1'P_2'}{3\ \text{cm}} = 0{,}3$$

$$(x' - y')(c - y) = 2{,}7$$

$$(c - y) = 20 - \frac{P_0P_2}{2\ \text{cm}} = 9,$$

valores bastante aproximados.

5. TRANSFORMACIONES RADIOACTIVAS

Consideremos el caso de la transformación

$$\text{RaA} \rightarrow \text{RaB} \rightarrow \text{RaC} \rightarrow$$

cuyas ecuaciones diferenciales son

$$x' = \frac{dx}{dt} = -K_1x$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = K_1x - K_2y$$

$$z' = \frac{dz}{dt} = K_2y - K_3z,$$

donde x, y, z son las cantidades presentes de RaA, RaB, RaC y K_1, K_2, K_3 son las constantes radioactivas cuyo valor (inverso de la vida media) es (1) :

$$K_1 = 0{,}328, \qquad K_2 = 0{,}037, \qquad K_3 = 0{,}048,$$

midiendo el tiempo en minutos.

Si $x_0 = 100$ es la cantidad inicial de RaA las condiciones iniciales de la transformación son :

$$\begin{array}{lll} & x = 100, & x' = -32{,}8, \\ t = 0, & y = 0, & y' = 32{,}8, \\ & z = 0, & z' = 0. \end{array}$$

Con estos datos iniciales y adoptando los módulos

$$m_1 = \frac{0{,}5 \text{ cm}}{\text{minuto}}, \qquad m_3 = \frac{0{,}1 \text{ cm}}{\text{átomos}},$$

$$m_2 = \frac{0{,}8 \text{ cm}}{\text{átomos}} \text{ minutos}, \qquad m_4 = 4 \text{ cm},$$

construímos, en la figura 9, las curvas a', a'', b' y b'' representativas de la variación de x, y, x', y', mediante las rectas c' y c'', exactamente en la misma forma en que procedimos en la figura 6.

Para representar las variaciones de z y z' construímos previamente la recta c''', representativa de la ecuación $v = 0.048z$ y teniendo en cuenta las condiciones iniciales, determinamos, mediante la c'' y c''' los valores de z', con los cuales construímos las curvas a''' y b''' representativas de la variación de z y z'.

Las seis curvas obtenidas tienen por asíntota el eje de las abscisas.

Con el gráfico así construído tendremos que para un tiempo representado por el segmento OM_0, los segmentos M_0M_1, M_0M_2, M_0M_3, M_0M_1'. M_0M_2' y M_0M_3 representan los valores de x, y, z, x', y', z'.

Además de las comprobaciones efectuadas en la figura 6, podemos verificar la exactitud del gráfico para el punto S en que se produce el máximo de z.

Para ese punto el tiempo es $\frac{OS_0}{0{,}5 \text{ cm}} = 26$ minutos, valor que debe satisfacer la ecuación (2)

$$K_3 (K_1 - K_2) = K_2 (K_1 - K_3) e^{(K_3 - K_2) t} - K_1 (K_2 - K_3) e^{(K_2 - K_1) t}.$$

(1) M. Boll et G. Allard, *Cours de Chimie (Metaux et Cations)*, página 313, París, 1922.

(2) G. Vivanti, *Op. cit.*, página 317.

Substituyendo valores, el primer miembro resulta 0,013968, y el segundo 0,01385, valores bastante aproximados.

Resumiendo: el método gráfico utilizado permite efectuar, con relativa rapidez y exactitud, la integración de las ecuaciones diferencia-

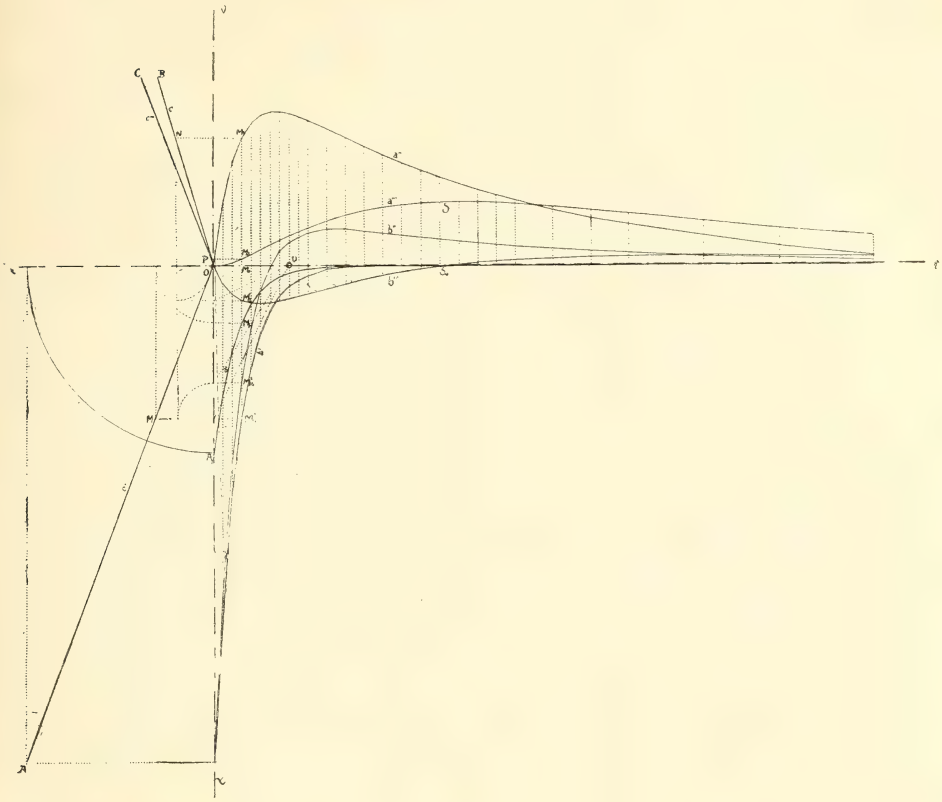


Fig. 9

les de la cinética química, aun de aquellas cuya integración analítica es difícil o imposible.

Además, como toda representación gráfica, tiene la ventaja de indicar claramente la marcha de la reacción o transformación considerada; sin más que observar las curvas obtenidas y que representan la variación de las distintas substancias que evolucionan y de su velocidad de transformación respecto al tiempo.

Santa Fe, 1923.

SOBRE EL DESARROLLO

DE LA

DISTRIBUCIÓN DEL COLORIDO EN LOS MAMÍFEROS

Por HANS KRIEG

La producción y extensión del color de la piel animal y humana son problemas hasta ahora no resueltos, y que están combinados en gran parte el uno con el otro. No está aclarado lo suficiente si el pigmento se forma en la epidermis, o en las partes más profundas, el dermis; lo cierto es que se encuentra en ambas capas.

El pigmento es una granulación sutilísima, de color variable, que se encuentra ya sea en células especiales, las células pigmentosas, ya en células comunes de las regiones más profundas de la epidermis.

Bertrand (1) ha hallado, en plantas, un fermento que, en células de un cierto quimismo, produce una substancia coloreada. En mariposas, Biedermann (2) estableció algo análogo y, más tarde. Cuénot (3), en ratones.

Basándose en estas investigaciones, se ha formulado una hipótesis muy aceptable para el análisis de los problemas de la pigmentación, la que, sin embargo, no discutiré aquí. Trataré de la producción y de la extensión del pigmento como si sus causas fueran conocidas.

En los mamíferos, la coloración de la piel de la cabeza, del cuello, del cuerpo y de la cola es, en general, más intensa en las regiones dorsales que en las ventrales. Se obtiene la impresión que la pigmenta-

(1) G. Bertrand, *C. R. Ac. Sci.*, tomo 122, página 1215, 1896.

(2) W. Biedermann, *Pfluegers Archiv*, Bd. 72, 1898.

(3) Cuénot L., *L'hérédité de la pigmentation chez les souris. Arch. Zool. expér. et général*, tomo I, 1903.

ción se ha extendido en dirección dorso-ventral, alcanzando por último las regiones más bajas y cesando con un límite neto hacia los lados del vientre blanco.

Además podemos observar, con frecuencia, que en las regiones dorsales la producción del pigmento no es en todas partes de igual intensidad, sino que muestra mayor fuerza en ciertos lugares, típicos para las diversas familias de mamíferos. Tanto en individuos como en especies en que la pigmentación no es muy extensa, estos cen-

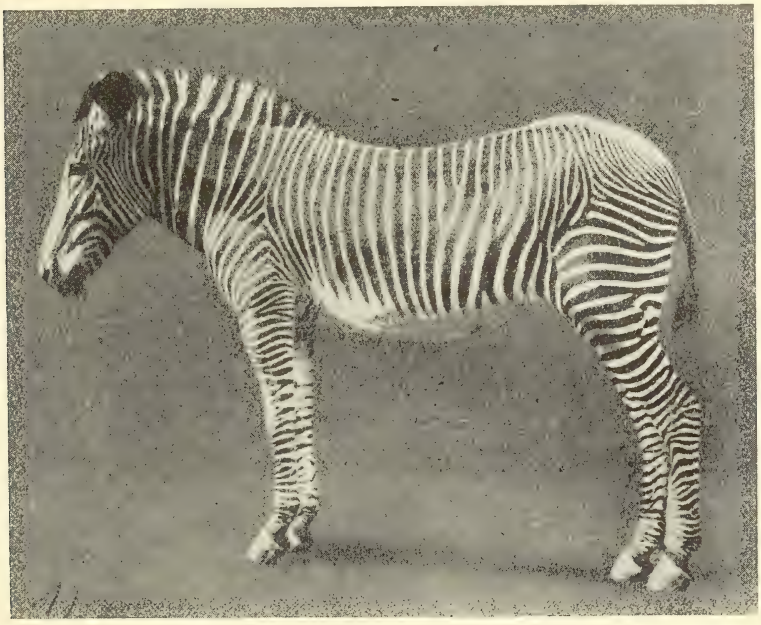


Fig. 1. — Cebra *(Zebra Grevyi)*. Tipo rayado común en mamíferos

tros de localización típica están más o menos bien separados los unos de los otros. Algunas veces se presentan como áreas de pigmentación claramente separadas, las que aparecen con una nitidez extraordinaria si son formadas por pigmento negro, mientras que los pigmentos rojos y amarillos, que se adelantan al negro en su extensión, frecuentemente ya cubren una parte mucho mayor del total de la superficie de la piel. Centros pigmentados muy bien delimitados se encuentran, por ejemplo, en *Chironectes minimus,* pequeño marsupial sudamericano. En algunas variedades de color de caballos y de perros, en los que estos centros se encuentran, aunque raramente, ellos están delimitados con mucha menor exactitud. Tal distribución del

color no deberá confundirse con un cierto tipo de albinismo parcial o «overismo» (1).

Fuera de tales centros pueden hallarse otros, situados los unos en la base, los otros en las partes extremas de los pies y de las manos. Pero, aún en caso de faltar estos centros especiales, pueden las extremidades estar cubiertas en mayor o menor extensión por pelo coloreado, pues la pigmentación del tronco puede extenderse sobre las extremidades, formando, por decir así, «penínsulas», tipo que se realiza frecuentemente en las razas caninas y a veces en caballos. La localización de los centros muchas veces está de acuerdo con la de las áreas coloreadas en animales overos de una categoría especial.

A esta distribución del pigmento que no difiere de un caso a otro sino por la cantidad, pueden asociarse otros factores, que producen una ubicación de pigmento en rayas o manchas como, por ejemplo, en las cebras y los leopardos. Consideremos primero el rayado.

En la mayoría de los animales rayados las rayas corren en el tronco en sentido vertical, mientras en las extremidades son horizontales como en la cebra, el tigre de Bengala, la hiena, etc.

En un segundo tipo, las rayas del tronco son longitudinales, como en los jabalíes y tapiros recién nacidos. Este tipo fué llamado «primitivo» por Eimer.

Siempre, en mamíferos, el rayado sigue a uno de estos dos tipos. Diferencias esenciales no existen sino en la intensidad y en el número de las rayas. Es característica la falta de una simetría bilateral exacta, y una variabilidad bastante grande en individuos de la misma especie. La identidad que en lo esencial muestra tanto la localización del pigmento como la disposición de las bandas en especies muy variadas de mamíferos, hace pensar en la probabilidad de la existencia de causas comunes para ambas, probablemente existentes durante el desarrollo. Por el otro lado la asimetría y gran variabilidad en ambos fenómenos indican que sus detalles no deben estar determinados en el germen.

Es fácil establecer que la disposición del rayado de las cebras, muchos felinos, la hiena estriada y otros, tiene en principio una semejanza muy grande con la de los pliegues de la piel, como los muestran a menudo mamíferos recién nacidos y embriones adelantados (figs. 1 y 2). En cambio, en embriones más jóvenes existen otras condiciones de tensión, las que, a su vez, son la causa del segundo

(1) H. Krieg, *Ueber Pigmentzentren bei Saeugetieren. Anatomischer Anzeiger*, tomo 54, 1921.

tipo de rayado arriba mencionado, el llamado primitivo por Eimer.

No sería exacto pretender que las arrugas de la piel constituyen la causa de la distribución del pigmento, sino que más bien las unas y las otras obedecerán a una causa común, a mi entender: las condiciones mecánicas de tensión y presión que existen en la piel durante el desarrollo individual. Para ilustrar dichas condiciones basta intro-

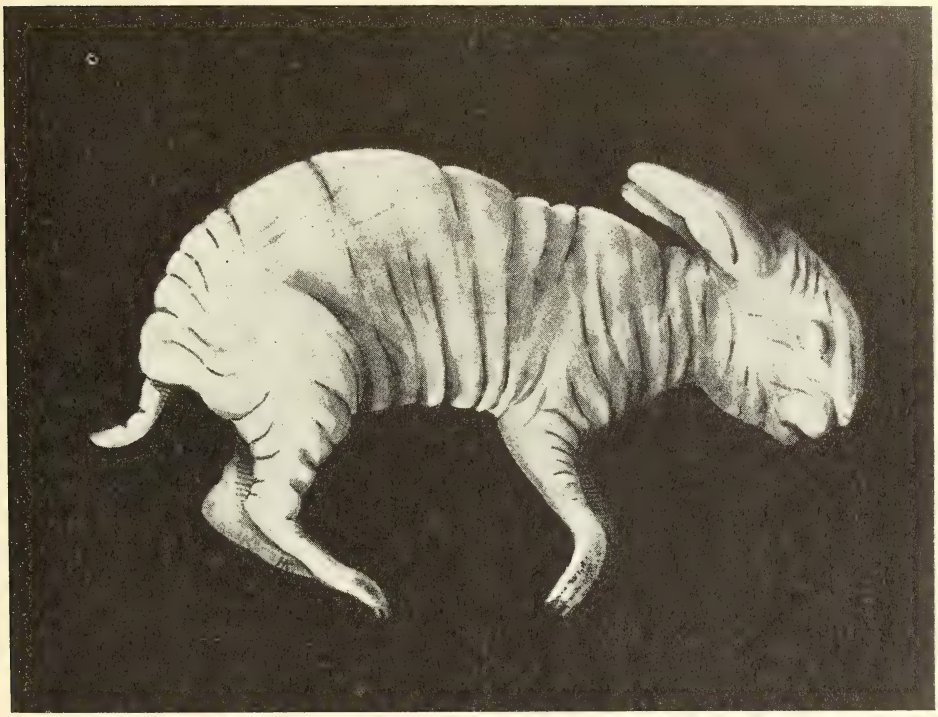


Fig. 2. — Conejo recién nacido con pliegues muy intensos (compárese con fig. 1 !)

ducir una aguja bien redonda en la piel, y observar luego en qué dirección se alarga el diámetro de los agujeros producidos (1).

Estas condiciones ontogenéticas son análogas en todas las especies. En los estadios embrionarios jóvenes, ellas son probablemente consecuencias del crecimiento longitudinal y transversal del cuerpo, pero más tarde se hará sentir ante todo la influencia de los movimientos

(1) Hans Krieg, *Streifung, und Stromung. Arch. fuer Entwicklungsmechanik,* tomo 51, página 24, 1922; Burkard, *Ueber die Hautspaltbarkeit menschlicher Embryonen Arch. fuer Entwicklungsmechanik,* 1903.

de las extremidades, los que se inician desde muy temprano por ser necesarios para él desarrollo de los músculos respectivos.

Denomino «fase crítica» el momento en que se efectúa la ubicación del pigmento, y en el cual existen, como es natural, determinadas condiciones de tensión y presión dentro de la piel. Las diferencias entre las varias especies de mamíferos, con respecto a la coincidencia de los distintos fenómenos evolutivos, producen a su vez diferencias de tensión y presión dentro de la piel, y por eso de la distribución del pigmento.

La hipótesis de Eimer, según la que, en la ontogénesis, el rayado « primitivo » longitudinal se ha transformado, primero, en un dibujo del tipo leopardo, subdividiéndose las rayas en partes más o menos grandes, y que luego este dibujo se ha recombinado en un rayado vertical, halla así su paralelismo ontogenético-causal, en mi hipótesis, de la « fase crítica ».

Considero el dibujo de tipo leopardo como consecuencia de una « interferencia biológica » temporal entre un sistema mecánico longitudinal precedente y otro vertical subsiguiente.

En apoyo a la idea de una interferencia biológica de diversos sistemas de tensión y presión citaré la observación siguiente: en ciertos individuos rayados que, por lo general no muestran una división de sus rayas en manchas, se encuentra, sin embargo, en algunas partes un dibujo de leopardo que hasta puede llegar a una distribución uniforme del pigmento.

Esto se observa especialmente allí, donde sin duda se realizan interferencias, esto es en las regiones proximales de las extremidades. Tales circunstancias se presentan, por ejemplo, con alguna frecuencia, en los bastardos entre cebras y asnos, muchas veces en los entre cebras y caballos y no raras veces en gatos domésticos rayados (1). La configuración particular de cada mancha en el dibujo leopardo resulta, una vez formada, de las condiciones especiales de su crecimiento individual.

Resulta de lo expuesto que no es necesario estipular factores hereditarios o « genes » distintos para explicar el origen de la distribución de la pigmentación en los dos tipos de rayados por un lado y el tipo leopardo por otro, sino que basta suponer ciertas correlaciones mecánicas de los fenómenos evolutivos, típicas para cada especie o raza durante su ontogénesis.

(1) Hans Krieg, *Die Prinzipien der Streifenzeichnung bei den Saeugetieren. Vortraege und Aufsaetze ueber Entwicklungsmechanik,* Heft. 30, Berlín, 1922.

CÁLCULO AUTOMÁTICO DE SISTEMAS HIPERESTÁTICOS

Por el ingº OTTO GOTTSCHALK

En los últimos años han aparecido, especialmente en revistas norteamericanas, algunos artículos, en los cuales se demostraba la forma de hacer cálculos estáticos de sistemas complicados mediante deformaciones de modelos elásticos. Resultados prácticos no han dado estos interesantes ensayos; revisiones, porque estos ensayos no han aumentado, han llevado al autor a la conclusión, de que la necesidad de efectuar estos cálculos simplificados era evidente, pero faltaba un aparato para realizarlos.

Después de muchos ensayos ha construído un aparato que ha llamado *Continostat* el que, en su forma actual, se verá en distintas fotografías.

Sobre una regla métálica resistente se deslizan abrazaderas que pueden fijarse a la regla en cualquier posición. Estas abrazaderas tienen una parte superior que puede girar horizontalmente, provista de un perno que atraviesa las ranuras de otras reglas móviles que llevan grapas en una extremidad. Todas las piezas móviles pueden fijarse mediante tornillos de presión. Estas grapas pueden sujetarse con facilidad en cualquier posición. Las reglas móviles con grapas tienen por objeto sujetar las reproducciones de los sistemas elásticos en los puntos, que corresponden a los puntos fijos de la verdadera construcción; además sirven para producir cargas de cualquier clase y dirección. Con este último objeto se han colocado sobre las abrazaderas y en la parte anterior de las reglas móviles unas roldanitas, que producir permiten, de la manera más conveniente, mediante hilos de seda,

grupos de cargas y reemplazar cargas repartidas simples por cargas concentradas.

Los cálculos mecánicos de sistemas elásticos se diferencian de los cálculos estáticos, esencialmente en que se reemplazan las fuerzas y momentos de flexión, que no son perceptibles para nosotros por sus efectos, perceptibles y mensurables. Calculamos, por lo tanto, sustituyendo el momento flector en un punto de una viga, por la rotación recíproca de dos cortes transversales convecinos, y las reacciones, por el desplazamiento recíproco de apoyos convecinos, y por fin la superficie de momento de una viga del sistema elástico, por la variación de los ángulos de las tangentes en los extremos de la viga o las flechas de las mismas en el centro del tramo.

Al reemplazar así el uso de símbolos y fórmulas abstractas por la intuición, llegamos a soluciones simples y claras, con solo un movimiento del *Continostat,* aun en los casos, en que con los métodos de cálculo hasta ahora empleados se requieren horas o días y una concentración abstracta del pensamiento, que difícilmente es posible para el ingeniero que trabaja como profesional. Se obtienen así los movimientos elásticos bajo las más variables condiciones elásticas y geométricas, y la visibilidad de los resultados evita errores fundamentales.

Se explicará con algunos ejemplos la aptitud de aplicación del procedimiento de cálculo mecánico; el terreno es nuevo y los resultados que se obtengan por nuevas aplicaciones del aparato, serán publicados más adelante. La participación de otros profesionales sería deseable para el desarrollo de este nuevo método de cálculo, el cual, como lo espera el autor, está seguramente llamado a aumentar considerablemente el valor del trabajo del ingeniero.

Daremos a conocer, en forma sintética, los resultados que se han obtenido hasta ahora por investigaciones cuidadosas y largas, y en grupos que correspondan a las antes mencionadas magnitudes para el cálculo. Hemos aplicado el procedimiento especialmente a sistemas rectilíneos, aunque el valor del aparato para sistemas compuestos será muy grande, especialmente para el cálculo de los momentos de flexión. Las demostraciones teóricas, que forman un puente entre los métodos de cálculo antiguos y nuevos, han aparecido en otra publicación (1), y serán, para mayor claridad, extractadas en el apéndice.

(1) *Revista del Centro de estudiantes de ingeniería,* año XXIII, número 244.

I

DETERMINACIÓN DE MOMENTOS ELECTORES

La sencillez extraordinaria, que resulta como última consecuencia del cálculo automático, se ilustrará con un ejemplo sencillo (fig. 1).

Problema. — Sea E un punto del tramo AB de una viga continua, de cuatro aberturas de 9, 10,4 y 4,5 metros de luz. Se busca el momento de flexión M_E, originado por una fuerza P aplicada en E.

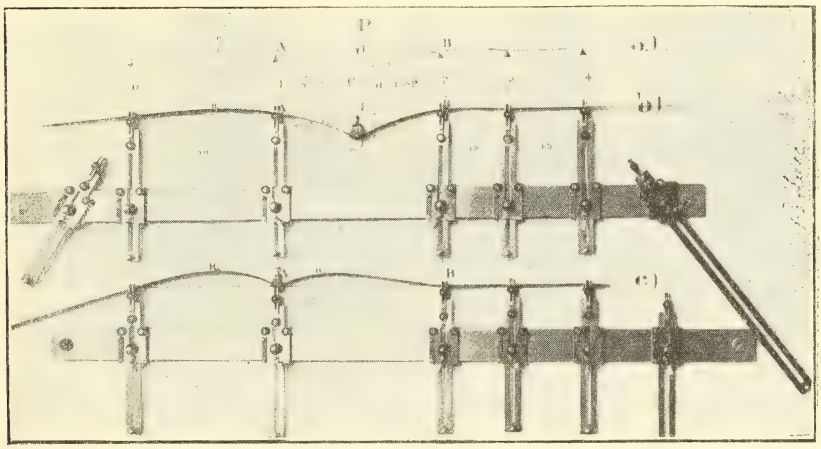


Fig. 1

Solución. — Dibujamos la viga en escala, por ejemplo, 1 : 50, sobre papel milimetrado, ajustamos las terminaciones de dos cintas de acero, mediante las grapas 1 : 4 (agregadas lo mismo que las cintas de acero, al aparato), y llevamos la así formada viga quebrada mediante el *Continostat* por los puntos de apoyo. A un desplazamiento longitudinal (fig. 1 *a*) de toda la cinta de acero corre el vértice de la grapa por si mismo en la distancia del eje de la viga, la cual indica exactamente el momento de flexión, que P ocasiona en el punto respectivo; así resulta en E : $EE' = h = 1{,}59$ m y $M_E = 1{,}59P$ Kgm. o tm, según que se exprese a P en kilogramos o en toneladas.

Otros resultados. — Trazamos la curva que describe la cinta de acero (fig. 1 *b*) sobre el papel milimetrado, y tenemos la línea de influencia para los momentos de flexión en E, luego $M_E = Py$, si y es la ordenada de la curva en cualquier punto cargado con P.

La superficie de la línea de influencia representa entonces el momento debido a la carga uniformemente repartida. Cargando, por ejemplo, la viga de A a B con p kg/m, resulta $M_E = 6{,}5p$ kgm, puesto que la superficie de la curva M_E entre A y B se da en la medida de la viga de 6,5 m². Como se verá en el apéndice, las líneas de influencia son curvas parabólicas, que limitan una superficie de $\frac{2}{3} \times$ base $\times$ altura en el centro.

Los momentos en los apoyos se obtienen, según la figura 1 *c*, em-

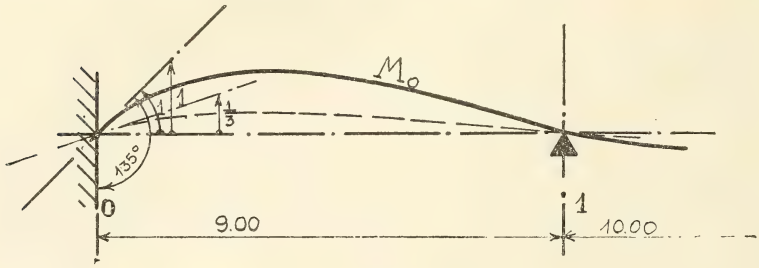


Fig. 2

pujando la grapa 1 : 4 con el vértice en el eje de la viga y sosteniéndola allí.

Desplazando la cinta de acero longitudinalmente, se puede observar con facilidad (fig. 1 *a*) donde se aleja más del eje de viga, es decir, donde P produce el momento de flexión máximo.

Si la viga está fuertemente empotrada en uno de los apoyos exteriores (fig. 2) se obtiene la línea de influencia para los momentos de empotramiento M_0 haciendo girar de 45° la cinta de acero en el punto de apoyo. Para evitar trabajos excesivos en la cinta de acero, convendrá efectuar una rotación $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ y las ordenadas obtenidas se multiplicarán por 3.

Exactitud. — Cerca de los apoyos exteriores y cerca de los apoyos interiores, en los cuales se produce, por grandes diferencias de longitud de los tramos adyacentes, fuerte empotramiento hay que aflojar el tornillo de la grapa, de manera que el ángulo se aumente por si solo

del valor 126°52′ hasta 90 + 45 = 135°. Este ángulo es fácil de determinar sobre papel milimetrado.

Hasta un ángulo de más o menos 128°30′ es bastante exacto el resultado con la grapa 1 : 4 fija. En la figura 3 están mostrados en diferentes formas de vigas los espacios, dentro de los cuales se puede

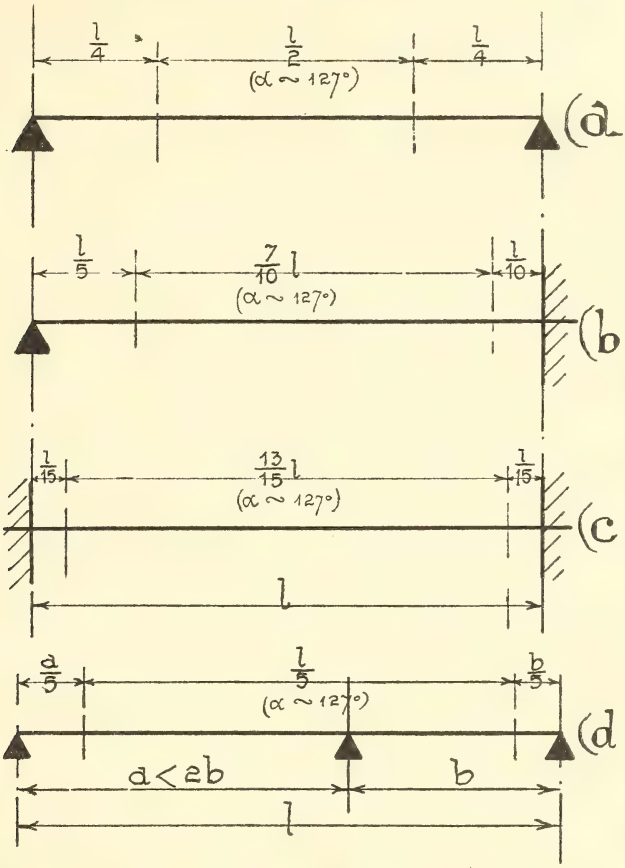


Fig. 3

utilizar la grapa 1 : 4, a saber en toda la parte del largo de la viga practicamente considerada. Para obtener la línea de influencia de los momentos de flexión en los apoyos exteriores, hay que aflojar algo aumentando hacia los apoyos hasta que los trozos de cinta formen un ángulo de 135°.

Secciones variables. — La variación del momento de inercia se obtiene fácilmente por la yuxtaposición de varias cintas de acero y se

expresa automáticamente en los valores obtenidos. Duplicándose, por ejemplo, el momento de inercia en el caso anteriormente calculado sobre un metro de cada lado de los apoyos, disminuye el momento, obteniéndose $M_E = 1{,}48P$.

II

DETERMINACIÓN DE REACCIONES MEDIANTE EL «CONTINOSTAT»

Para determinar en una viga continua las reacciones, no es necesario en el cálculo automático, calcular antes los momentos de apoyo

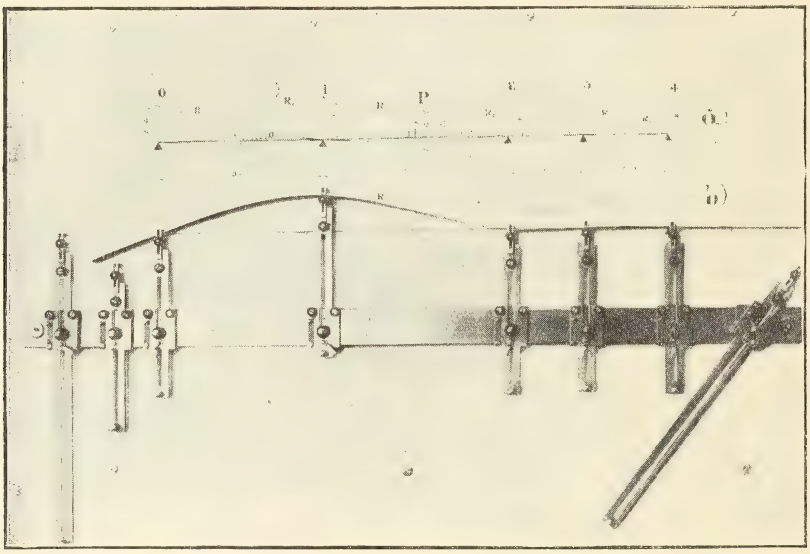


Fig. 4

como en los procedimientos ordinarios de cálculo analítico y gráfico, sino que obtenemos la intensidad de las reacciones de manera sencilla e inmediata, reemplazando, la unidad de reacción por la unidad de desplazamiento de los apoyos.

Problema. — Determinar en la anterior viga continua de cuatro tramos de 9,0, 10,0, 4,0 y 4,5 m, la reacción del segundo apoyo de la izquierda, que es producida por una carga P en el punto E.

Solución (fig. 4 *b*). — Sostenemos una cinta de acero transversalmente inmovible como modelo de viga en el *Continostat* en los puntos

de apoyo y desplazamos la segunda regla móvil en una unidad en dirección vertical. La curva así obtenida, es la línea de influencia de la reacción en este apoyo, la cual cortará a la vertical en E en el punto E′. La ordenada EE′ da la reacción buscada $R_1 = 0{,}54P$.

Otros resultados. — Las reacciones en los apoyos restantes resultan con el procedimiento indicado para la figura 1 *a*, con lo que las unidades de desplazamiento pueden ser diferentes en los distintos apoyos. En este último caso se eligieron, por ejemplo, para los apoyos 0 y 1, 40 mm.; para los apoyos 2, 3 y 4, 20 mm de desplazamiento vertical como unidad. Los puntos de intersección de las diferentes líneas de influencia obtenidas con la vertical en el punto de aplicación E de la carga P, dan el siguiente reparto de la carga P sobre los diferentes apoyos.

$$R_0 = \frac{-3{,}0}{40,} = -0{,}08P$$

$$R_1 = \frac{21{,}5}{40{,}0} = 0{,}54P$$

$$R_2 = \frac{17{,}5}{20{,}0} = 0{,}88P$$

$$R_3 = \frac{-8{,}0}{20{,}0} = -0{,}40P$$

$$R_4 = \frac{1{,}2}{20{,}0} = 0{,}06P$$

$$\text{Total } \Sigma R = 1{,}00P$$

Para una carga p kg/m uniformemente repartida de C hasta D la reacción R_1 resulta igual a la superficie entre C y D. Esta se compone de un triángulo o trapecio y de una superficie curva $\frac{2}{3} \times h' \times l$, siendo la base l y h' la altura de la curva en el centro de la base.

Exactitud. — Para obtener resultados exactos elíjase la unidad, por la cual se desplaza un apoyo no mayor que $\frac{1}{5}$ de la distancia hasta el próximo punto fijo. Si se toma la unidad como de $\frac{1}{4}$ de esta distancia pueden esperarse desviaciones hasta de cinco por ciento; al desplaza-

miento de $\frac{1}{3}$ hasta 10 por ciento, como consecuencia de los trabajos secundarios resultantes y de la sobreacción del material de la cinta.

Sección variable. — Los aumentos de altura en las construcciones de cemento armado cerca de los apoyos, se tienen en cuenta en una forma sencilla por la agregación, de pedazos cortos de cinta de acero, que acompañan el *Continostat,* en las grapas de apoyo. Si las diferencias de altura existen en toda la longitud de los tramos, se tienen en cuenta mediante el encaje de una segunda cinta de acero sobre el tramo reforzado.

III

DETERMINACIÓN AUTOMÁTICA DE MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO

Mediante las fórmulas deducidas por el autor en el apéndice, estamos en condiciones de determinar los momentos flectores de la línea de flexión de una viga AB sujetada por los extremos fijo o cedente, que origina una carga cuya forma es conocida. Se ha supuesto que la sección de la viga de A a B era constante; las desviaciones, empero, no son importantes para las variaciones de sección que se presentan ordinariamente en la práctica.

Con la aplicación apropiada del *Continostat,* nos es posible sacar cualquier viga de un complicado sistema de vigas, y determinarla con un solo movimiento del aparato, por lo tanto desempeñar en un momomento el trabajo, el cual hubiera requerido por el sistema de cálculo basado en fórmulas, hasta ahora usado, horas o días. Sometemos la viga AB cargada a una flexión, determinamos allí de la línea flectora obtenida, la relación de los segmentos de las tangentes de apoyo sobre la perpendicular en el punto medio de AB y con eso los grados de empotramiento m_A y m_B. Los momentos de empotramiento son, por lo tanto, $M = m_A P l$ y $M_B = m_B P l$.

Exactitud. — Para obtener resultados exactos es necesario evitar esfuerzos excesivos en el material del modelo y trabajos secundarios, empujes transversales de cualquier punto cedente de más de la quinta parte de la distancia hasta el próximo punto fijo y la frotación del modelo sobre la mesa de dibujo; ésto último se consigue poniendo debajo maderas redondas y finas. Las diferencias de sección entre los

elementos parciales del sistema se reproducen por medio de cintas de sección variable. Diferencias hasta el 10 por ciento son aceptables en los resultados, en comparación con los del cálculo matemático. La aplicación de este procedimiento se demostrará con algunos ejemplos que se presentan frecuentemente.

Vigas continuas unidas con sus columnas. — En las construcciones de hormigón armado las vigas con apoyos libres son la excepción, y las que están unidas con sus apoyos la regla. Supongamos que la viga

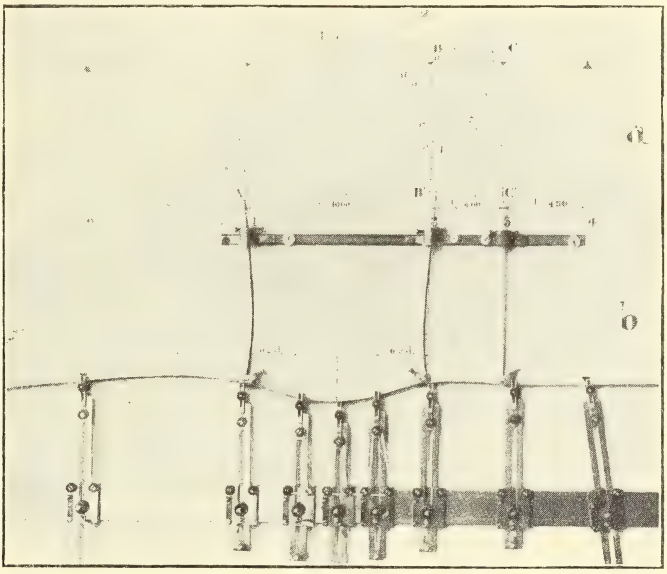


Fig. 5

continua calculada anteriormente, de tramos de 9,0, 10,0, 4,0 y 4,5 m de longitud esté unida invariablemente con tres apoyos centrales de 6,00 m de altura y que en el segundo tramo ($l = 10{,}00$ m) actúe la carga P uniformemente repartida, se quieren determinar los momentos de flexión producidos por las mismas.

Sujetamos, según la figura 5, la viga a los puntos de apoyo y sometemos el tramo cargado al equivalente elástico de la carga igualmente repartida, a saber dos cargas concentradas iguales a la distancia 0,29 l de los apoyos. Estas cargas concentradas iguales las obtenemos mediante un hilo de seda, el cual, como ya se ha dicho, está colocado de tal manera sobre las roldanitas de las tres reglas móviles, que al ade-

lantar la regla móvil central retira con igual fuerza las dos reglas colaterales. Empujamos por lo tanto la regla central hasta que la flexión de la cinta de acero sobre la perpendicular media de AB importe un valor para nosotros conveniente; en este caso tal vez 1 m $\equiv$ 2 cm. Los pies de las columnas se mantienen por un barrote de unión a la distancia fija; debajo de este barrote de unión se colocan pedazos de madera redondos y finos hasta que se deslice sin frotamiento a su posición final.

Tiramos ahora la línea elástica y obtenemos para el tramo AB la flexión deseada en el centro (2 cm); los segmentos que las tangente de apoyo determinan : $f_A = 21{,}0$ mm, $f_B = 14{,}4$ mm, y que pueden leerse fácilmente sobre el papel milimetrado, permiten calcular los grados de empotramiento.

$$m_A = \frac{1}{24} \times \frac{8 \times 20 - 4 \times 21 - 14{,}4}{4 \times 20 - 21 - 14{,}4} = 0{,}058,$$

$$m_B = \frac{1}{24} \times \frac{8 \times 20 - 4 \times 14{,}4 - 21}{4 \times 20 - 21 - 14{,}4} = 0{,}076,$$

y por lo tanto los momentos de flexión en AB :

$$M_A = 0{,}058Pl\,(0{,}046), \qquad M_B = 0{,}076P\,(0{,}075),$$

$$M_{\frac{l}{2}} = 0{,}058Pl\,(0{,}065).$$

Los valores entre paréntesis corresponden a las vigas continuas libres, según el primer ejemplo.

Si están las columnas A′B′C′ empotradas en el suelo, tienen que pasar las tangentes en A′, B′ y C′ (fig. 5 *a*) por A, B y C, lo que se consigue apartando las grapas, dadas en la figura 5 *b*, a los pies de las columnas. Resultan entonces las diferencias de las tangentes de apoyo (dibujo en líneas punteadas) con $f_A = 17{,}7$, $f_B = 12{,}6$ y

$$m_A = \frac{1}{24} \times \frac{8 \times 20 - 4 \times 17{,}7 - 12{,}6}{4{,}20 - 17{,}7 - 12{,}6} = 0{,}0642;$$

$$m_B = 0{,}077; \qquad M_{\frac{l}{2}} = 0{,}055Pl.$$

Si actúa sobre la viga reproducida en la figura 5 *a* en vez de la carga repartida, una carga concentrada en el centro del tramo AB, calculamos los momentos de flexión de AB, en que sujetamos el sistema, como está mostrado en la figura 7 *b*, mediante el *Continostat* y retiramos una regla tirando en el centro de AB en la cinta de acero, en más

o menos $\frac{1}{10}$ de AB. Resulta para pies de columna articulados $h = 20$, $f_A = 17{,}1$ y $f_B = 11{,}2$ y según la fórmula calculada en la tabla del apéndice :

$$m_A = \frac{1}{24} \times \frac{12 \times 20 - 7 \times 17{,}1 - 11{,}2}{4 \times 20 - 17{,}1 - 11{,}2} = 0{,}0887;$$

$$m_B = \frac{1}{24} \times \frac{12 \times 20 - 7 \times 11{,}2 - 17{,}1}{4 \times 20 - 17{,}1 - 11{,}2} = 0{,}117;$$

$$M_A = 0{,}0887 Pl; \qquad M_B = 0{,}117 Pl; \qquad M_{\frac{l}{2}} = 0{,}144 Pl.$$

Para pies de columnas empotrados : $h = 20$, $f_A = 15{,}2$ y $f_B = 9{,}5$.

$$m_A = \frac{1}{24} \times \frac{12 \times 20 - 7 \times 15{,}2 - 9{,}5}{4 \times 20 - 15{,}2 - 9{,}5} = 0{,}0935;$$

$$m_B = \frac{1}{24} \times \frac{12 \times 20 - 7 \times 9{,}5 - 15{,}2}{4 \times 20 - 15{,}2 - 9{,}5} = 0{,}119;$$

$$M_A = 0{,}0935 Pl; \qquad M_B = 0{,}119 Pl; \qquad M_{\frac{l}{2}} = 0{,}144 Pl.$$

Para tener en cuenta la relación de los momentos de inercia de la construcción se emplean cintas de varios espesores para las diferentes columnas y tramos de viga.

Una vez determinados los momentos de empotramiento M_A y M_B, resulta el momento de flexión en una sección situada a la distancia x del apoyo A de la expresión :

$$M_x = \mathfrak{M}_x + M_A\left(1 + \frac{x}{l}\right) - \frac{x}{l} M_B,$$

en lo cual $\mathfrak{M}_x$ designa el momento de flexión en la viga libre.

Fuera de AB pueden calcularse los momentos de flexión por las relaciones determinadas en A y C. El momento M_B, por ejemplo, se reparte en M_B' de la viga BC y M_B'' de la columna BB′ (fig. 6) en la siguiente proporción :

$$\frac{M_B'}{M_B''} = \frac{H^2}{l_3^2} \cdot \frac{E'I'}{E''I''} \cdot \frac{3f_B' - 4h'}{3f_B'' - 4h''},$$

con esto es

$$M_B = M_B' + M_B'', \qquad f_B' = f_B'' \frac{l_3}{l_2}, \qquad f_B'' = f_B \frac{H}{l_2};$$

siendo h y h' las flechas medidas en los centros de BC y BB′, I′ y I″ los momentos de inercia de BC y BB′, E″ y E′ los módulos de elasticidad de los materiales de BC y BB′.

Para los apoyos lejanos de las vigas lindantes con B resulta según el apéndice II :

$$M_C = \frac{8h' - 3f_B'}{3f_B' - 4h'} M_B' \qquad y \qquad M_B' = \frac{8h'' - 3f_B''}{3f_B'' - 4h''} M_B''.$$

Para el pie de columna articulado resulta $M_{B'} = 0$; para el pie de columna fijo

$$h'' = \frac{1}{4} f_B'' \qquad y \qquad M_{B'} = -\frac{1}{2} M_B''.$$

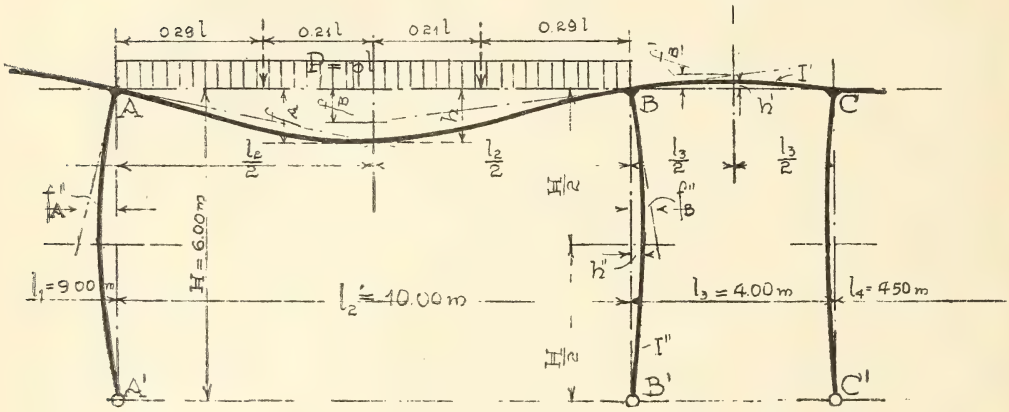


Fig. 6

Pórtico de dos pisos. — Supongamos que el pórtico reproducido en la figura 7 *a* de dos pisos de igual altura esté cargado sobre su travesaño superior con la carga P uniformemente repartida. Se quiere determinar los momentos de flexión de este travesaño.

Empotramos el modelo compuesto mediante grapas 1 : 2 con el travesaño superior en el *Continostat*, aseguramos dos reglas móviles como cargas a 0,29 *l* de los apoyos y adelantamos la regla central tanto hasta que el pistón se haya doblado en más o menos $\frac{1}{10}$, en el presente caso 20 mm. Resulta como consecuencia de la simetría del pórtico $f_A = f_B = f = 23$ mm y

$$m_A = m_B = \frac{1}{24} \times \frac{8 \times 20 - 4 \times 23 - 1{,}23}{4 \times 20 - 23 - 23} = 0{,}0428 Pl,$$

por lo tanto

$$M_A = M_B = 0{,}0428 Pl \qquad y \qquad M_C = (0{,}125 - 0{,}0428) Pl = 0{,}0822 Pl.$$

Como en este pórtico se han supuesto pies de columnas articulados, basta para el pie del modelo una disposición sencilla, que mantiene las dos vigas perpendiculares a la distancia l entre sí.

Supongamos que el pórtico reproducido en figura 7 *b*, de las mismas dimensiones que el de la figura 7 *a* pero con columnas empotradas en la parte inferior, esté cargado con una carga concentrada aplicada a una distancia de A igual a 0,25 l en el travesaño inferior.

Sujetamos el pórtico en posición recta mediante grapitas de hojala-

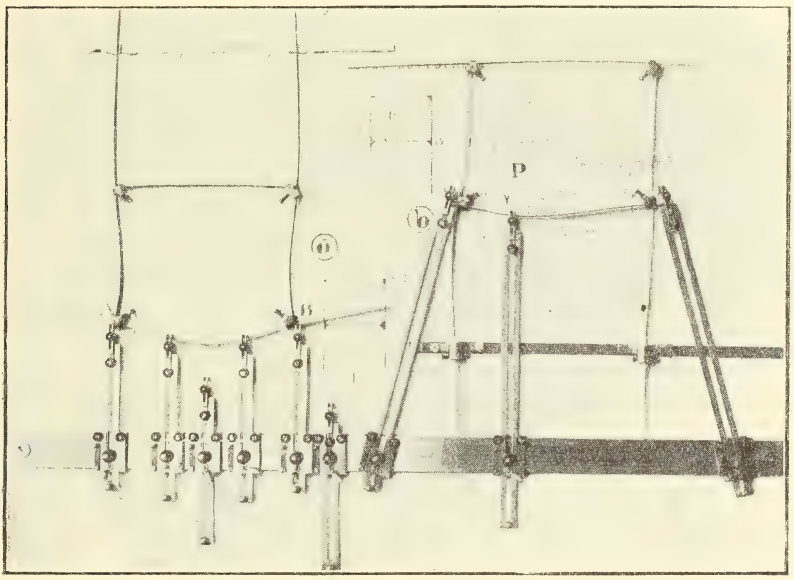


Fig. 7

ta que fijamos en dos largas reglas sobre las que descansan dos de las grapas 1 : 2, sin estar impedidas de girar. Entonces bajamos el travesaño inferior, mediante una regla larga, hasta que la flexión sea en este lugar más o menos de $\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$, con una flecha en el centro en este caso de $h = 12$ mm. Resulta $f_A = 18$ mm, $f_B = 1{,}5$ mm y según los valores dados para esta posición de la carga en el apéndice resulta

$$m_A = \frac{1}{192} \times \frac{108 \times 12 - 43 \times 18 - 19{,}15}{4 \times 12 - 18 - 1{,}5} = 0{,}090;$$

$$m_B = \frac{1}{192} \times \frac{36 \times 12 - 25 \times 1{,}5 - 18}{4 \times 12 - 18 - 1{,}5} = 0{,}068;$$

luego

$$-M_A = 0{,}090Pl, \qquad -M_B = 0{,}068Pl,$$

$$M_P = Pl\left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} - 0{,}090 - \frac{1}{4} \cdot 0{,}022\right) = 0{,}109Pl.$$

Para reproducir el empotramiento en los pies de la columna, hay en los mismos grapas con tornillos, que se atornillan hasta que la prolongación de la barra sobresaliente pase por los puntos A y B.

(Continuará.)

NOTICIAS TOPOGRÁFICAS Y GEOLÓGICAS

SOBRE

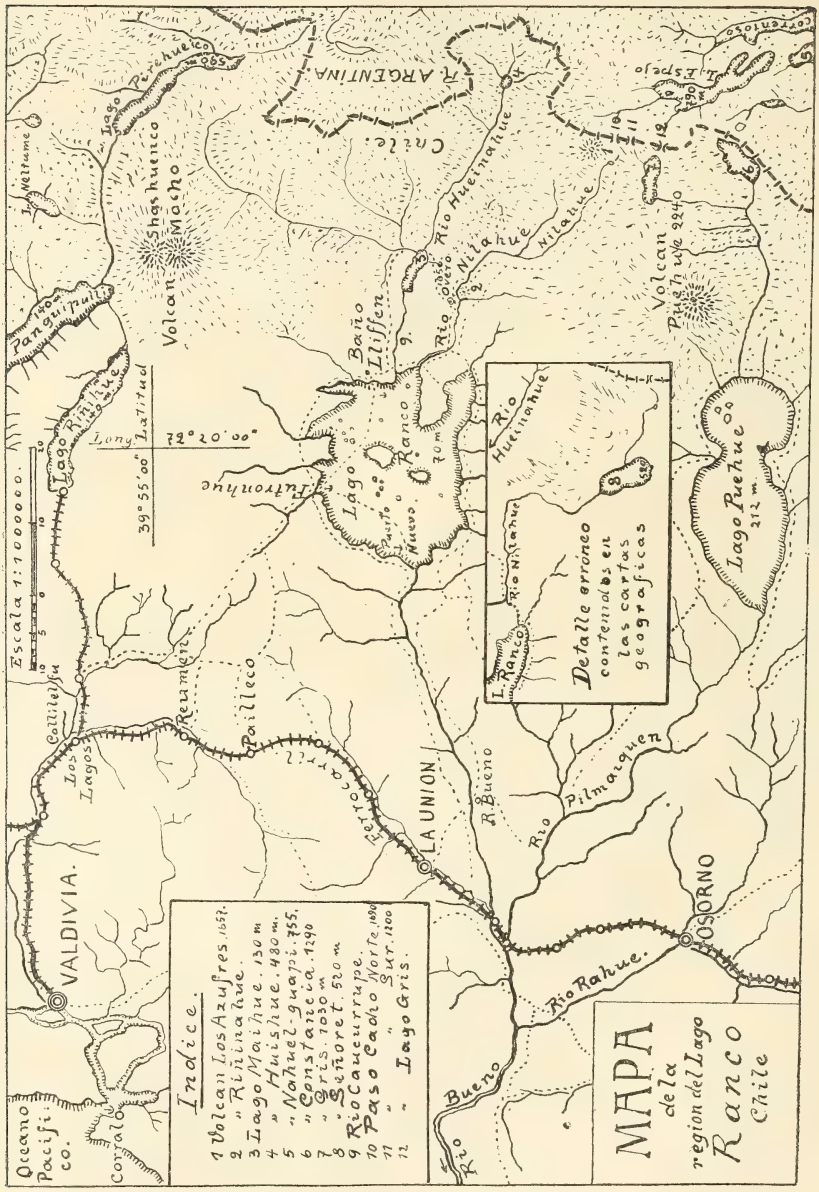
LA REGIÓN SITUADA AL ORIENTE DEL LAGO RANCO, EN EL SUR DE CHILE

Y ESPECIALMENTE SOBRE LA ERUPCIÓN VOLCÁNICA MÁS RECIENTE «LOS AZUFRES»

Por FEDERICO KRUMM

Pecando de inmodesto podría decir ser el autor uno de los pocos, si no el único de su ramo que ha tenido la oportunidad de conocer detenidamente la región aludida y el teatro de la última erupción volcánica. Durante nueve años de trabajo como agrimensor, no solamente ha cruzado en todas direcciones la cordillera argentino-chilena, sino también ha hecho planos topográficos detallados. La mensura de los parajes arriba mencionados la ha hecho en el verano del año 1914. Si se compara el bosquejo adjunto con los mapas, en uso actualmente, se encontrarán algunas diferencias bastante importantes, v. gr.: 1ª El lago Ranco (1) tiene en realidad un contorno más irregular, con muchas ensenadas como los jords de Noruega, y en vez de las pocas islas, hasta ahora determinadas, tiene seis grandes, habitadas, y más o menos 27 pequeñas (en el croquis no se han marcado todas); 2ª *El lago Señoret no existe. En cambio ha sido anotado por el autor uno del que hasta ahora ningún mapa ha hecho mención, a saber el lago Huishue,* que mide aproximadamente 89 kilómetros cuadrados de superficie; su ubicación corresponde a 71°46′30″ al oeste

(1) El segundo (en tamaño) lago de Chile; será conocido de muchos lectores por la descripción de Friedrich Gerstäcker, quien lo visitó en el año 1861; él quiso, también, penetrar hacia la Argentina, lo que le impidió el mal tiempo.


MAPA
de la
region del Lago
Ranco
Chile
Indice.
1 Volcan Los Azufres. 1657.
2 " Riñinahue.
3 Lago Maihue. 130 m
4 " Huishue. 430 m.
5 " Nahuel-guapi. 755.
6 " Constancia. 1290
7 " Gris. 1030 m.
8 " Señoret. 520 m.
9 Rio Caucurrupe.
10 Paso Cadro Norte. 1500
11 " " Sur. 1200
12 " Lago Gris.
Detalle erroneo
contenido en
las cartas
geograficas
Escala 1:1000000.
Long. 72°20'00"
Latitud 39°55'00"
VALDIVIA.
LA UNION
OSORNO
Lago Ranco
Lago Puelue
Volcan Puelue 2240
Volcan Mocho
Volcan Shashuico
Rio Bueno
Rio Rahue.
Rio Pilmaquen
Rio Huelmahue
Rio Nilahue
Rio Futronhue
Rio Pailleco
Rio Reumen
Rio Cauculaufu
Rio Pangipulli
Lago Pelehuico
Lago Riñinahue
Lago Maihue
Lago Huishue
Lago Futronhue
Baño Illifen
Cerro Ranco
Cerro Nuevo
Cerro Castillo
Cerro Cauculaufu
Los Lagos
Corral
Oceano Pacifico
Cerro Cordillera
Cerro Estrella
Cerro Espejo
Cerro Cordillera
Cerro Cordillera
Cerro Cordillera

de Greenwich y a 40°21′50″ de latitud sur, a 480 metros sobre el océano Pacífico. Casi siempre tiene desagüe subterráneo dentro de rocas excavadas en un trecho de 20 metros; sólo cuando crece el nivel, se desborda por una orilla arenosa hacia el oeste; 3ª *Se pudo comprobar por primera vez el lugar de la erupción del nuevo volcán,* tan comentada por los diarios el año pasado: es *71°53′ al oeste de Greenwich y de 40°28′ latitud sur; la altura sobre el mar es de 1657 metros.* También *eran bastante desconocidas las condiciones geológicas* de esa región. Por eso séale permitido al autor dar algunas noticias tal vez interesantes para el geólogo.

Al terreno en cuestión se llega únicamente en un viaje difícil, largo

Fig. 2. — Lago Huishue en el río Melipuhue. En el fondo el cerro la Iglesia (± 1000 m), que está situado aproximadamente 15 kilómetros en dirección este, y que se compone de ¿ diorita ? (Hasta la fecha ningún explorador ha estado siquiera al pie de este cerro imponente.) *(Foto Krumm, 1914.)*

y costoso, saliendo del noroeste, por Santiago de Chile, Temuco, bien por sudoeste, vía puerto Montt: 1° saliendo de los Lagos; 2° de Rumen; 3° de La Unión; 4° de Pillaco; o bien del sudeste viniendo de Bariloche. De dichos cinco puntos las condiciones de marcha son casi iguales. Al elegir uno de los cuatro caminos primeramente mencionados, hay que alcanzar de todas maneras el lago Ranco y costearlo por el sur o por el norte o, sino, cruzarlo y seguir en dirección este, hasta llegar muy cerca de la frontera chileno-argentina. Saliendo de Bariloche se pasa por el lago Nahuel-Huapí hasta la punta más al norte, y bordeando o atravesando el lago Espejo se trata de llegar a la frontera argentino-chilena. Cruzando el paso Cacho Norte, al rededor de 1900 metros sobre el nivel del mar, se alcanza también «Los Azufres».

El autor se acercó al sitio donde se ha formado el nuevo volcán, por el lado del oeste. En 6 u 8 horas de viaje a caballo se llega, desde los lagos Reumen, Paillaco o La Unión (1), al lago Ranco. Si se encuentra el vaporcito que hace la travesía entre Puerto Nuevo y los Baños de Lliffen (se puede pedirlo, lleva también caballos), conviene aprovecharlo. Lo mismo se llega a los Baños con el vaporcito, saliendo de Futronhue, si no se costea la orilla norte hasta encontrar el mencionado lugar (buen hotel). De ahí, a la mañana siguiente, llégase á caballo al río Caucurrupe. Como tiene corriente rapidísima, es recomendable cruzarlo cerca de su desembocadura, con un bote que

Fig. 3. — El nuevo volcán « Los Azufres » (la cresta con manchas de nieve en el fondo, a la derecha), visto desde el valle del río Nilahue inferior. En segundo término, a la izquierda, la mitad del cerro Overo. En el mismo término, 3,8 centímetros del margen izquierdo y 2,3 centímetros del margen inferior de la fotografía : la cúpula baja, negra, del volcán Riñinahue. *(Foto Krumm, 1914.)*

se encuentra allí, desensillando los animales y haciéndolos pasar a nado, pero sujetados por un lazo. El río siguiente, el Nilahue, al cual se llega costeando el lago Ranco hacia el sudeste, se atraviesa también cerca de su desembocadura en el lago. Tiene ahí aproximadamente 300 metros de ancho, pero no más de un metro de profundidad y aguas muy tranquilas ; cinco kilómetros más arriba forma una catarata como de 20 metros de altura. Más allá hay un puente para pasar a la orilla derecha. En esta parte tiene sólo 5 metros de ancho. La marcha sigue el curso del río aguas arriba sobre su ribera norte hacia la sierra de Carrán. Aquí dejamos atrás las últimas poblaciones ; más

(1) Desde La Unión conduce un camino carretero hasta el mismo lago (en Puerto Nuevo).

al este la cordillera está deshabitada por completo. En el camino se deja sobre mano derecha el volcán Riñinahue (72°6′20″ O., 40°18′ 40″ S., 305 metros sobre el mar), y enfrente, a la izquierda, la cúpula del cerro Overo (1155 m). Pronto se estrechan más y más las paredes de rocas, y hay que pasar de nuevo al borde izquierdo. La nieve derretida aumenta considerablemente el caudal del río, haciéndolo peligroso durante ciertas horas del día. Por eso hay que cruzarlo antes de las nueve de la mañana. El nombre « Vado del Diablo » dice bastante. Aquí, pues, se acampará antes. Luego se sigue siempre subiendo el río hacia el sudeste. Volviendo otra vez á la orilla derecha comienza, al día siguiente, a 1600 metros de elevación, el fin de la

Fig. 4. — Ruinas de un volcán, vista desde el sudoeste, al pie de la cual (no está visible, queda a la izquierda de la fotografía) yace el nuevo volcán « Los Azufres ». *(Foto Krumm, 1914.)*

vegetación. Ahí es conveniente hacer un campamento fijo, por carecer más adelante de leña y pasto para los animales. Desde aquel lugar se emprende el mismo día una excursión a caballo hasta las vertientes del Nilahue. Allí, cerca de la frontera, yace el nuevo volcán Los Azufres, al pie de las ruinas de Volcán.

Sobre las *condiciones geológicas de aquella región,* el autor se permite sólo algunas observaciones cuya veracidad hay que dejar a la comprobación de los geólogos de profesión.

Le llamó la atención *el cambio petrográfico* que se nota en las márgenes del lago Ranco, que está en íntima conexión con el del relieve topográfico. En el oeste las antiguas micacitas de la franja costanera de Chile, con vetas blancas de cuarzo, cerca de Futronhue; al este, diorita, traquita, andesita, obsidiana, piedra pómez y rocas

afines, que empiezan allá donde se eleva de repente, posiblemente por causas de *fallas*, la cordillera desde la planicie, v. gr., parece que las rocas que forman la angostura de Nilahue, por donde pasa el puente, son de andesita maciza. Este límite petrográfico-tectónico debe cruzar el lago Ranco de norte a sur por el medio. Así se explicaría también el hecho de que, al parecer, existen en el fondo de este lago fuentes termales sumamente cálidas porque muchas veces llegan peces semicocidos a las orillas. Cerca del lago, en la margen oriental, se encuentran también los Baños de Lliffen ya mencionados, cierto

Fig. 5. — El nuevo volcán « Los Azufres », visto del noroeste, con sus *vapores* de azufre *ardientes* y la toba andesítica blanca cocida. (La ruina del volcán no se ve, está a la derecha del cuadro.) *(Foto Krumm, 1914).*

es que son de agua fría. Sobre todo, no será casualidad que veamos en esa misma línea un buen número de volcanes : de norte a sur el Shoshuenco (2360 m), Mocho (2430 m), Riñinahue (305 m), el nuevo Los Azufres (1657 m) y el Puyehue (2200 m) ; en cambio faltan éstos hoy día por completo tanto en el oeste como en el interior de la Cordillera.

Sobre *los tres volcanes últimamente mencionados,* no se ha publicado casi nada. El Riñinahue ha estado activo, como es sabido, últimamente en 1907. Las escorias formaron un dique de unos 40 metros de altura por lo cual se interrumpió el curso del río Nilahue, formando sus aguas estancadas un lago detrás del dique. Tres meses después la

fuerza de las aguas rompió la barra, y más de un millón de metros cúbicos de agua, fango, arena y pedregullo de lava se precipitaron al valle, sepultando a 10 ó 12 familias con sus viviendas a unos 15 metros de profundidad. Todos los bosques en derredor fueron arrasados por el fuego del volcán, y todavía hoy se ven los restos carbonizados, emergiendo de una capa de más de un metro de cenizas. Estas partículas finísimas que han caído a cientos de kilómetros de distancia son de andesita (1). Originadas por erupciones anteriores parecen ser las arenas de magnetita, depositadas en el valle del Nilahue, y solamente más abajo del Riñinahue. Cerca de las últimas casas se encuen-

Fig. 6. — Paisaje glacial con enormes masas de morainas en las cabeceras del río Nilahue
(Foto Krumm, 1914)

tra en tal cantidad que inutiliza la brújula. La boca del cráter se eleva hoy solamente a 40 metros sobre el lecho del río. Dos fuentes termales conocidas antiguamente han desaparecido desde la última actividad. Lo que hoy sin duda interesa bastante es *el volcán más nuevo*. El ambiente está continuamente velado por nubes de azufre y agua, formando más de 20 hectáreas de terreno quebrado, situado cerca de la ruina del volcán arriba mencionado, cuya base está cubierta de campos grisáceos de piedra pómez, donde también se encuentran bloques de obsidiana negra del tamaño de una cabeza. El terreno, en parte, está incendiado. Aquí encandece una toba de andesita, fuertemente mezclada con azufre, la que deja, después de haber sido que-

(1) Según el análisis químico, verificado por el doctor Enrique Herrero Ducloux (véase *Revista del Museo de La Plata,* tomo XV, páginas 49 a 53, Buenos Aires).

mada, una arena finísima de un color gris blanquizco. Hay millares de toneladas de este polvo amontonado en enormes cantidades, pero mezclado con arena. En una cañada, más abajo del fuego, surgen fuentes termales, hirvientes y en partes sulfurosas. Éstas son sumamente curativas, por cuanto el autor se curó radicalmente una antigua dolencia reumática con solamente nueve baños. Del 13 al 19 de diciembre de 1921 este lugar tuvo, probablemente por primera vez, según se sabe, una verdadera erupción volcánica. Pedazos de piedra pómez fueron arrojados a más de 100 kilómetros. Las cenizas fueron arrojadas a miles de metros de altura, y llevadas por el viento hasta la ciudad de La Plata, donde se las verificó microscópicamente (vidrio volcánico con partículas cristalizadas de feldespato) menos de dos semanas después. Hasta en Europa se observaron fenómenos crepusculares que se ligan con este acontecimiento. No se ha formado precisamente un cono, pero en medio de las colinas, cubierto de fuego, hay una boca de cráter (1). La erupción en sí parece haber sido pequeña, pero las inmensas cantidades de toba andesítica fueron removidas y elevadas en gigantescas nubes de polvo. Sobre el *Puyehue,* situado al sur de Los Azufres, el autor no tiene nada que informar.

En fin, daré aquí dos observaciones respecto a los *rastros de tiempos glaciales del Diluvio.* Paisajes típicos de esta clase, ondulados, obsérvanse en las cabeceras del Nilahue. En un lugar el mismo río ha sido estancado, formando una pequeña laguna (véase el mapa).

(1) Según los informes obtenidos de los indígenas por el autor.

SEGUNDO CONGRESO DE QUÍMICA

(MARZO DE 1924)

La Sociedad Científica Argentina ha enviado ya su adhesión al segundo Congreso argentino de química, que es a su vez el primero sudamericano. Accediendo a un pedido formulado por la Asociación química argentina, publicamos la circular recibida e invitamos a nuestros consocios a cooperar para el mejor éxito de este Congreso.

Buenos Aires, mayo de 1923.

Señor Presidente de la Sociedad Científica Argentina.

Señor:

Venimos a anunciar a usted que en el mes de marzo de 1924, y por iniciativa de la Asociación química argentina, se celebrará en Buenos Aires el segundo Congreso de química (1° Sudamericano), continuando y ampliando la obra que el primero realizara con carácter nacional en 1919.

Si los organizadores creyeron entonces prematuro convocar a los estudiosos de los países hermanos, antes de conocer lo que en nuestro propio suelo se había hecho y debía hacerse en el campo de las ciencias químicas; si se consideró necesaria la tarea previa de preparar un balance y de trazar un programa dentro de nuestras fronteras, ante los problemas que planteaba el fin de la guerra mundial; ahora, después de los años transcurridos en una labor ininterrumpida y de actividad creciente, pensamos que ha llegado el momento de contrastar los resultados alcanzados, de corregir o modificar los rumbos adoptados, de establecer convenciones internacionales, de encarar cuestiones nuevas y de someter a la discusión teorías fecundas en aplicaciones, abarcando la investigación desinteresada del laboratorio, los dominios de las industrias y la esfera de la enseñanza general, especial y superior.

Los anhelos de unión y cooperación entre los pueblos para la labor científica son algo más que aspiraciones idealistas, pues que responden a necesidades cada vez más sentidas; y si han de lograrse, serán los hombres que estudian y trabajan los llamados a realizar la obra que los diplomáticos inician y concluyen, oficializando las resoluciones adoptadas por aquéllos: en el vasto campo de las ciencias químicas nos corresponde esa misión y debemos prepararnos a cumplirla. Es por esto que solicitamos su adhesión y concurso, convencidos de que si en el triunfo indiscutible alcanzado en nuestra reunión de 1919, toca una buena parte al apoyo de los poderes públicos, de las instituciones de enseñanza y de las empresas industriales, la entusiasta colaboración de los estudiosos de toda la República fué el alma del certamen, revelando energías insospechadas y abriendo a la inteligencia y a la voluntad horizontes amplísimos.

Con la seguridad de que responderá usted a este nuevo llamado y de que contamos desde ahora con su decidida colaboración, de acuerdo con las condiciones de adhesión y disposiciones reglamentarias que le remitiremos en breve, nos complacemos en ofrecerle las expresiones de nuestra más alta estima.

ENRIQUE HERRERO DUCLOUX,
Presidente,

Abel Sánchez Díaz. — *Tomás J. Rumi,*
Secretarios generales.

Secretaría general: Chacabuco 170.

CONFERENCIAS

DEL DOCTOR FELIPE A. JUSTO, SOBRE PASTEUR Y SU OBRA

(Agosto 18 de 1923)

El doctor Felipe A. Justo comenzó relatando los primeros pasos dados por el sabio desde adolescente en el campo de las investigaciones y las dificultades que tuvo que afrontar por la falta de recursos.

Más adelante hizo una verdadera historia de los primeros descubrimientos de Pasteur, de sus estudios de los fermentos y de los resultados alcanzados, de las investigaciones y descubrimiento de las causas de la destrucción del gusano de seda, industria ésta, considerada como una de las mayores fuentes de riqueza nacional francesa, puesto que producía al rededor de cien millones de francos al año.

Al terminar, el orador se ocupó del último de los descubrimientos alcanzados por Pasteur: la vacuna antirrábica.

La conferencia, muy amena e interesante, fué ilustrada con proyecciones luminosas.

DEL DOCTOR HORACIO DAMIANOVICH, SOBRE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD DESDE EL PUNTO DE VISTA FÍSICO-QUÍMICO

(Agosto 20 de 1923)

El conferenciante, después de referirse a la deducción del principio de la inercia de la energía, partiendo de los principios de la mecánica relativista, se detuvo especialmente en el examen de las experiencias de los profesores de la Universidad de Ginebra, Guye, Lavanch y Rathnowsky, quienes, después de nueve años de pacientes y prolijas investigaciones (al rededor de 2000 observaciones) con los corpúscu-

los catódicos de diferentes velocidades, han comprobado la exactitud de la fórmula Lorentz-Einstein, relativa a la variación de la masa con la velocidad, con sólo un error medio de 0,0002.

Se ocupó luego de los cálculos hechos por Planck y Langevin, sobre variación de la masa por cambios de temperatura y por emisión o absorción de energía radiante: la teoría prevé un débil aumento o diminución, según que la temperatura aumente o disminuya o según que haya absorción o emisión de energía radiante, que aun no ha sido posible verificar.

Hizo después una síntesis de la teoría de Bohr, sobre la constitución del átomo, basada en las leyes de la mecánica clásica y de la moderna mecánica de los «quanta» y que ha sido verificada experimentalmente al confrontarla con los resultados numéricos obtenidos en las series de Balmer de las rayas espectrales. Con esta base Somerfeld establece una teoría en la que introduce los conceptos de la mecánica relativista sobre variación de masa y desplazamiento del perihelio en las órbitas de los electrones al rededor del núcleo central del átomo con resultados sorprendentes, pues la experiencia comprueba con una exactitud grande la estructura completa de las rayas espectrales del hidrógeno y del helio.

Se refirió más adelante a las últimas investigaciones de Perot y de Fabry y Buisson, quienes, determinando la influencia de la presión, han obtenido una primera confirmación bastante satisfactoria de la previsión del desplazamiento de las rayas espectrales hasta el rojo hecha por Einstein, como una simple consecuencia del principio de la relatividad generalizada.

Terminó haciendo notar el hecho significativo de que la dinámica del mundo atómico al seguir leyes análogas a las de la mecánica celeste, permite al investigador prolijo la confirmación matemática de las geniales previsiones surgidas de los dominios más abstractos de la especulación científica.

DEL DOCTOR HORACIO DAMIANOVICH, SOBRE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD DESDE LOS PUNTOS DE VISTA HISTÓRICO Y METODOLÓGICO.

(Septiembre 10 de 1923)

El conferenciante comenzó haciendo notar que habiéndose expuesto en las conferencias anteriores los aspectos físico, matemático, me-

cánico, astronómico y físicoquímico de la teoría de la relatividad, sólo se concretaría a hacer una breve síntesis histórica de la misma, pasando en revista las principales etapas de su evolución y señalando las consecuencias más notables.

Al reseñar su primera etapa se detuvo en el análisis de los conceptos de Newton relativos al espacio, tiempo, movimiento, acción a distancia, aditividad de velocidades y fuerzas, hipótesis del éter y finalmente en las bases del principio de la relatividad de los movimientos rectilíneos y uniformes de la mecánica clásica.

La teoría del éter, como medio de propagación de ciertos movimientos y fenómenos físicos (especialmente la luz), ya usada por Newton, dió motivo a una importante serie de investigaciones e hipótesis acerca de la imposibilidad de revelar por experiencias en el interior del sistema, el movimiento absoluto de la tierra con respecto al éter en el caso de los movimientos rectilíneos y uniformes. Las célebres experiencias de Michelson y Morley dan un resultado netamente negativo que es interpretado por Fitz Gerald y Lorentz con la clásica hipótesis del acortamiento de los cuerpos en el sentido del movimiento. Se puede decir que de este modo se entra en la segunda etapa de la evolución de la teoría, o sea, en el período preliminar que sirvió de punto de partida a Einstein para edificar la teoría de la relatividad restringida. En esta construcción Einstein elimina la teoría del éter, introduce definitivamente la noción de « tiempo local », que Lorentz sólo usaba como ficción matemática, y asociando en una única entidad de espacio y el tiempo mediante el sistema de cuatro vectores del llamado universo de Minkowski, establece las ecuaciones de transformación que caracterizan este principio. Este sistema comprende a la mecánica newtoniana como un caso particular pero en él no intervinieron aun los movimientos no uniformes ni los parámetros de la gravitación. Sin embargo, constituyen una importante generalización de la mecánica de Newton y permite llegar al trascendental principio de la inercia de la energía y sus múltiples consecuencias como ser: la variación de la masa con la velocidad y la temperatura; la variación de la masa en las transformaciones radioactivas y en las reacciones químicas; la estructura fina de las rayas espectrales y la unificación de los principios de la conservación de la energía. Casi todas estas consecuencias han sido verificadas con una sorprendente exactitud.

Finalmente en la tercera etapa, Einstein establece el importante principio de la equivalencia entre un campo de aceleración y un campo gravitatorio y mediante al cálculo diferencial absoluto finalado

por Gauss, Riemann, Ricci y Levi Civita, establece en colaboración con Grossman las primeras ecuaciones capaces de representar con exactitud todas las particularidades del campo gravitatorio. Al establecer este sistema que comprende al de Newton como un caso particular, Einstein y sus colaboradores eliminan por completo las acciones a distancia siguiendo el ejemplo de Maxwell en el electromagnetismo. Si los nuevos conceptos introducidos en estas significativas etapas son de gran alcance para las ciencias físicas no lo son menos las geniales previsiones que del sistema así constituído han surgido. La explicación del perihelio de mercurio, la desviación de la luz por un potente campo gravitacional y el desplazamiento de las rayas espectrales hacia el rojo, constituyen las confirmaciones más sorprendentes en la historia de los descubrimientos científicos.

Terminó la conferencia haciendo notar que si bien es cierto como lo establece Eddington, que la teoría de la relatividad no trata de hallar las causas íntimas de los fenómenos, constituye la síntesis más perfecta que se ha alcanzado en estos últimos tiempos en lo que se refiere a la sistematización de los conocimientos del mundo físico, pues, además de la unidad y correlación lógica que existe entre las diferentes partes del edificio doctrinal, encanta por la sencillez y exactitud de los resultados aun cuando éstos, a veces, surgen de un difícil proceso de abstracción.

BIBLIOGRAFÍA

Sous-marins, Torpilles et Mines, par A. Laubeuf et H. Stroh, 1923, librería de J. B. Baillière et Fils, calle Hautefeuille, número 19, París.

Bajo el patronato de la Sociedad para el fomento de la industria nacional y de la de Ingenieros civiles de Francia, la casa J. B. Baillière et Fils, de París, edita obras de carácter enciclopédico sobre importantes ramas de las industrias o construcciones.

Un volumen de más de 800 páginas, con el título que encabeza estas líneas, ha sido puesto en circulación recientemente, destinado a tratar, en su conjunto y en sus principales líneamientos, de las armas *sub-aquas* de la marina de guerra.

Las primeras dos terceras partes de la obra versan sobre los sumergibles, mientras la tercera parte final se contrae principalmente a las armas propiamente dichas, o sea a los torpedos y a las minas.

Los autores del trabajo son por sí solos una garantía de excelencia del mismo: figura en primera línea el antiguo ingeniero en jefe de construcciones navales francesas, señor M. Laubeuf, famoso en el desarrollo y progreso del sumergible por sus propias concepciones e innovaciones; y secúndalo luego el señor Henri Stroh, actual ingeniero principal de la marina de guerra de aquella nación.

Respondiendo lógicamente al plan de las enciclopedias parciales a que pertenece, la obra encara el asunto casi exclusivamente del punto de vista del ingeniero constructor.

Las primeras 80 páginas están consagradas a la historia del sumergible, y sólo unas pocas al final se dedican a su empleo como medio de guerra (uso del torpedo por tales embarcaciones) y a los elementos de protección contra los torpedos y minas; y, asimismo, estas cortas adiciones se concretan a algunos puntos indispensables que pueden servir para fijar criterios al ingeniero constructor.

Es esta una obra que servirá exclusivamente para el estudio del *material* de sumergibles, torpedos y minas, no conteniendo sino ligeras indicaciones sobre el empleo en la guerra de dichas armas, asunto éste que concierne especialmente al oficial de marina.

Pero para adquirir, a conciencia, la capacidad para el empleo de las armas, es obvia la necesidad de un conocimiento suficiente del material mismo. De este punto de vista la obra que analizamos puede ser de incalculable utilidad para todo oficial de marina de guerra que se dedique a esta especialización.

Como el ingeniero Laubeuf lo dice en su *Avant-Propos,* aun concretándose al estudio del material en sí, la obra no puede abarcar todos los asuntos en su variado detalle. Es, sin embargo, como conjunto, el tratado más completo que conozcamos, contiene abundantísimos datos de pruebas y ensayos y una bibliografía que permitirá al oficial estudioso ampliar sus investigaciones.

El perfeccionamiento de sumergibles, torpedos y minas se debe principalmente a la experiencia en el mar y las exigencias de la última guerra ; pero la teoría científica ha sido un poderoso auxiliar: la obra de los señores Laubeuf y Stroh trata los asuntos en su doble faz, dando grande extensión, siempre que la cuestión así lo requiere, a bellos desarrollos matemáticos, que darán al oficial técnico la verdadera conciencia de la materia que estudia.

Finalmente, este libro presenta un interés capital para los oficiales de las marinas de guerra en cuyos países no se construyen esas armas, sino que deben adquirirlas en el extranjero. Encontraráse en él un guía seguro para apreciar las cualidades de un tipo de sumergible y, lo que es más valioso aún, un poderoso auxiliar y consejero para fiscalizar y vigilar la construcción prueba y recepción de las mismas armas.

SEGUNDO R. STORNI,
Capitán de navío.

Revista chilena de historia natural, tomo XXV.

El doctor don Carlos E. Porter, director y fundador propietario de la revista nombrada ha publicado el tomo XXV de dicha publicación en ocasión de las bodas de plata de su entrada en el mundo científico.

Únicamente las personas que han hecho de su vida un sacerdocio de la publicación, con que llevan a todas partes las luces y experimentos de los especialistas, podrán valorar todo el mérito de esa empresa. El doctor Porter ha contado tan sólo con su esfuerzo personal y el fruto de sus ahorros : en los últimos años, el gobierno le dió una pequeña subvención.

Estas pocas palabras significan el mérito extraordinario de ese naturalista que ha llevado a todas partes el nombre de la república hermana. Más ha conseguido ese hombre incansable reuniendo en su *Revista chilena de historia natural* tantos datos cosechados con labor de hormiga siempre alerta, que otros hombres de nombre relumbrón.

El tomo XXV de la *Revista chilena de historia natural* se presenta en un grueso cuaderno de 727 páginas, después de otras 24 de prólogo : tirada esmerada, dibujos, fotografías y láminas en negro y en colores, realzan y explican el texto que contiene 62 artículos originales sobre geología, anatomía, zoología, entomología, botánica, etc., etc. Encabeza la serie en esos artículos un trabajo de Ramón y Cajal y de Sánchez sobre la estructura de los centros ópticos de los insectos, con dos láminas en azul.

Entre las firmas de los naturalistas que trabajan de este lado de los Andes, notamos las siguientes : Brèthes, Giacomelli, Hicken, Lahille, Reed, Sanzin, Scala y Spegazzini.

Con la importancia y variedad de los 62 artículos que aparecen en el solo tomo XXV, la *Revista chilena de historia natural* debe necesariamente existir en todas las bibliotecas científicas.

JUAN BRÈTHES.

BIBLIOTECA DE LA SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

OBRAS RECIBIDAS DESDE EL 1° DE AGOSTO HASTA EL 30 DE SEPTIEMBRE DE 1923

J. Imbelloni, *Los frescos indígenas de Córdoba y su descubridor,* 20 páginas, Imprenta Mercatale, Buenos Aires, 1923.

F. A. S. Barrios, *Organización de la administración de los bosques fiscales de los territorios nacionales,* 19 páginas, J. Bellsola, Buenos Aires, 1923.

Antonio Serrano, *Notas para el capítulo introducción de apuntes de etnografía y arqueología de la provincia de Entre Ríos,* 5 páginas, El autor, Paraná, 1923.

R. Pla y Armengol, *Sobre un nuevo concepto de la tuberculosis,* 12 páginas, F. Vives Mora (hijo), Valencia, 1923.

R. Pla y Armengol, *Concepto clínico de la tuberculosis,* 38 páginas, A. Artís, Barcelona, 1922.

Aurico Teixeira, *Huile ou baume de Copahu,* 8 páginas, Imprenta nacional, Río Janeiro, 1923.

Carlos Bruch, *Estudios mirmecológicos,* 48 páginas, Coni, Buenos Aires, 1923.

Universidad nacional de La Plata, *Revista de la Facultad de ciencias químicas,* 283 páginas, Olivari y Domínguez, La Plata, 1923.

Enrique Sparn, *Bibliografía meteorológica y climatológica,* 72 páginas, Academia nacional de ciencias, Córdoba, 1923.

Doctor Antonio Olyntho dos Santos Piros, *Speleología,* 56 páginas, Pimenta de Mello, Río Janeiro, 1922.

S. Madrid Páez, *Sociedad de beneficencia de la capital, su misión y sus obras, 1922 y 1923,* 108 páginas, Asilo de huérfanos, Buenos Aires, 1923.

Carlos Correa Luna, *Historia de la Sociedad de beneficencia, 1823 y 1852,* 238 páginas, Asilo de huérfanos, Buenos Aires, 1923.

José Imbelloni, *Habitantes neolíticos del lago Buenos Aires,* 75 páginas, Coni, Buenos Aires, 1923.

Otto Gottschalk, *Elementos del cálculo mecánico de sistemas elásticos,* 27 páginas, Tomás Palumbo, Buenos Aires, 1923.

Dirección general de estadística del Uruguay, *Anuario estadístico, 1917,* 307 páginas, Imprenta nacional, Paraguay, 1922.

Bertrand de Fontviolant, *Resistance des materiaux,* 580 páginas, J. B. Bailliere et fils, París, 1923.

Policía de la Capital federal, *Memoria, antecedentes y datos estadísticos correspondientes al año 1922,* 349 páginas, Policía, Buenos Aires, 1923.

Obras sanitarias de la Nación, *Memoria del directorio correspondiente al año 1922,* 352 páginas, Obras sanitarias de la Nación, Buenos Aires, 1923.

Estanislao Maldones, *La siderurgia en Catamarca,* 21 páginas, Talleres El Ambato, Catamarca, 1923.

SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

SOCIOS HONORARIOS

Dr. Pedro Visca †.
Dr. Mario Isola †.
Dr. Germán Burmeister †.
Dr. Benjamín A. Gould †.
Dr. R. A. Philippi †.
Dr. Guillermo Rawson †.
Dr. Carlos Berg †.
Dr. Valentín Balbín †.
Dr. Florentino Ameghino †.
Dr. Carlos Darwin †.
Dr. César Lombroso †.
Ing. Luis A. Huergo †.
Ing. Vicente Castro †.
Dr. Juan J. J. Kyle †.
Dr. Estanislao S. Zeballos †.
Ing. Barabino, Santiago E †.
Dr. Walther Nernst.
Dr. Eduardo L. Holmberg.
Ing. J. Mendizábal Tamborel.
Ing. Guillermo Marconi.
Dr. Enrique Ferri.
Dr. Carlos Spegazzini.

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar, Rafael	México.
Arteaga, Rodolfo de	Montevideo.
Ballvé, Horacio	I. de Año N.
Bodenbender, Guillermo	Córdoba.
Bolívar, Ignacio	Madrid.
Bonarelli Guido	Ancona (It.).
Bertoni, Moisés	P. Bertoni (P.).
Bailey, Willis	Washington.
Bruce, William	Edimburgo.
Cabrera, Blas	Madrid.
Carvalho, José Carlos	Río Janeiro.
Corti, José S.	Mendoza.
Crinin, Demetrio	Petrogrado.
Delage, Yves	París.
Fontana, Luis Jorge	San Juan.
Fuenzalida, José del C.	Sgo. de Chile.
Guignard, León	París.
Guimarães, Rodolfo	Amadora (P.).
Gez, J. W.	Corrientes.
Gjertsen Hjalmar, Fredik	Noruega.
Kinart, Fernando	Amberes.
Lillo, Miguel	Tucumán.
Luiggi, Luis	Roma.
Lugo, Américo	Sto. Domingo.
Lobo, Bruno	Río de Janeiro.
Lorin, Henri	Burdeos.
Morandi, Luis	Villa Colón (U).
Moore, Clarence	Filadelfia.
Moretti, Cayetano	Milán.
Martinenche, Ernesto	París.
Moore, John B.	Nueva York.
Montané, Luis	Habana.
Medina, José Toribio	Sgo. de Chile.
Montessus de Ballore	Sgo. de Chile.
Nordenskjiold, Otto	Gothemburgo.
Nilsen Fhowal	Noruega.
Olyntho Antorio	Río de Janeiro.
Paterno, Manuel	Palermo (It.).
Patrón, Pablo	Lima.
Porter, Carlos E.	Sgo. de Chile.
Pena, Carlos M. de	Montevideo.
Poirier, Eduardo	Sgo. de Chile.
Pérez Verdia, Luis	Méjico.
Pi y Suñer, Augusto	Barcelona.
Prestrud, Christian	Noruega.
Recaséns y Girol, Sebastián	Madrid.
Reid, Walter F.	Londres.
Rey Pastor, Julio	Madrid.
Risso Patrón, Luis	Sgo. de Chile.
Reiche, Carlos	Méjico.
Sklodonska, Curie	París.
Shepherd, Williams R.	Col. Un. N. York
Tobar, Carlos R.	Quito.
Torres Quevedo, Leonardo	Madrid.
Uhle, Max	Lima.
Von Ihering, Herman	Florianóp. (B.
Volterra, Vito	Roma.

SOCIOS ACTIVOS

Adamoli, Pedro A.
Adamoli, Santos S.
Aguirre, Pedro.
Albarracín, Carlos M.
Aldunate, Julio C.
Almanza, Felipe G.
Allende, César T.
Anasagasti, Horacio.
Amavet, Alejo D.
Ameghino, Carlos.
Anchorena, Juan E.
Anastasi, Camilo.
Añón Suárez, Vicente.
Arrillaga, Francisco C.
Arroyo, Rufino.
Aráoz Alfaro, Gregorio.
Arce, Manuel J.
Arnaudo, Silvio J.
Ayerza, Rómulo.
Ayerza, Rafael.
Aztiria, Ignacio.
Babini, José.
Bado, Atilio A.
Bancalari, Agustín.
Baidaff, Bernardo Ig.
Baez, Juan R.
Bachmann, Ernesto.
Bahía, Manuel B.
Ballester, Rodolfo E.
Barabino, Amadeo Santiago.
Barbieri, Antonio.
Bazterrica, Enrique.
Beretervide, Roberto.
Berrino, Juan B.
Besio Moreno, Nicolás.
Bianchedi, Rómulo.
Bianchi Lischetti, Ángel.
Blaquier, Juan.
Bodenbender, Otto E.
Bolognini, Héctor.
Bonino, Alfredo (h.).
Bordenave, Pablo E.
Bosch, Eliseo P.
Bosisio, Anecto J.
Bonanni, Cayetano.
Bottaro, Juan C.
Botto, Alejandro.
Botto, Armando P.
Bozzini, Luis (h.).
Brethes, Juan.
Briano, Juan A.
Bruch, Carlos.
Bullrich, Jorge M.
Bunge, Carlos.
Bunge, Juan C.
Butty, Enrique.
Cabred, Roberto G.
Calandra Raúl A.
Camus, Nicolás.
Candioti, Marcial R.
Canale, Humberto.
Cano, Héctor M.
Carrea, Juan U.
Canónica, Mauricio.
Carabelli, Juan José.
Carbone, Esteban.
Carbonell, José.
Caride Massini, Pedro.
Carette, Eduardo.
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Castellanos, Alfredo.
Castro Escalada, Martín.
Chanourdie, Enrique.
Chelia, Francisco.
Chiappe, Antonio R.
Chiarizia, Eduardo.
Clérice, Eduardo E.
Cock, Guillermo.
Colmo, Alfredo.
Contin, Diego T. R.
Coqueugniot, Carlos L.
Cremona, Andrés.
Croveri, Pablo.
Curutchet, Luis.
Curti, Orlando P.
Damianovich, Horacio.
Darquier, Juan A.
Dassen, Claro C.
Dasso, Ricardo L.
Debenedetti, José.
Debenedetti, Salvador.
Delétang, Luis.
Delfino, Juan Carlos.
Dellepiane, Luis J.
Demarchi, Marco.
Díaz, Emilio C.
Doello-Jurado, Martín.
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Duclout, Jorge.
Ducluzaud, Adhemar.
Duhau, Luis.
Duncan, Carlos D.
Dupont, Enrique.
Durrieu, Mauricio.
Eiriz, Rogelio.
Elia, Hector de.
Esteves, Luis P.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández, Miguel.
Figini, Ángel.
Flachot, Emilio.
Flores, Emilio M.
Font, Jaime.
Franceschi, Edmundo.
Frenguelli, Joaquín.
Galtero, Alfredo.
Gallardo, Ángel.
Gallo, Abelardo.
Garay Ponce, Filemón.
García, Ricardo S.
Gerardi, Donato.
Ghigliazza, Sebastián.
Girado, Francisco J.
Girado, Alejandro.
Giusti, Leopoldo.
González, Juan B.
Gradin, Carlos.
Grieben, Arturo.
Gurewitsch, Marco.
Gutiérrez, Avelino.
Gutiérrez, Ricardo J.
Hauman, Lucien.
Hermitte, Enrique.
Herrera Vegas, Marcelino.
Hicken, Cristóbal M.
Hickethier, Carlos F.
Hoxmark, William.
Hoyo, Arturo.
Huergo, Eduardo.
Huergo, José M.
Ingenieros, José.
Ivanissevich, Ludovico.
Iturbe, Miguel.
Izaguirre, Salvador T.
Jacobacci, Jaime.
Kraglievich, Lucas,
Kirchhoff, Federico.
Laclau, Narciso C.
Labarthe, Julio.
Lamenza, Francisco.
Lanfranco, Silvio.
Larco, Esteban.

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA

ARGENTINA

DIRECTOR : INGENIERO JULIO R. CASTIÑEIRAS

NOVIEMBRE-DICIEMBRE 1923. — ENTREGAS V-VI. TOMO XCVI

ÍNDICE

R. LEHMANN-NITSCHE, El grupo lingüístico Tshon de los territorios magallánicos. 209
OTTO GOTTSCHALK, Cálculo automático de sistemas hiperestáticos *(conclusión)*. 212
Resultados de la primera expedición a Tierra del Fuego (1921), enviada por la Facultad de Ciencias exactas, físicas y naturales de la Universidad nacional de Buenos Aires : JOAQUÍN FRENGUELLI, Diatomeas de Tierra del Fuego... 225
PABLO GAGGERO, *Cordylophora lacustris* Allman en el río de la Plata..... 264
ANTONIO PAULY, Los yacimientos de estaño en Bolivia..... 269
A. HUSTACHE, Curculionides de l'exploration Lizer-Delétang au Chaco bolivien. 279
BIBLIOGRAFÍA..... 301
Índice general de las materias contenidas en el tomo nonagésimosexto..... 304

BUENOS AIRES
IMPRENTA Y CASA EDITORA «CONI»
684, PERÚ, 684

1923

SMITHSONIAN INSTITUTION
FEB 9 1927
NATIONAL MUSEUM

JUNTA DIRECTIVA

(1923-1924)

Presidente	Ingeniero **Eduardo Huergo.**
Vicepresidente 1º	Doctor **Antonio Vidal.**
Vicepresidente 2º	Profesor **Juan Nielsen.**
Secretario de actas	Doctor **Reinaldo Vanossi.**
Secretario de correspondencia	Ingeniero **Miguel Ángel Solari.**
Tesorero	Ingeniero **Edmundo Parodi.**
Protesorero	Ingeniero **José Debenedetti.**
Bibliotecario	Ingeniero **Juan José Carabelli.**
Vocales	Doctor **Emilio C. Díaz.**
	Ingeniero **Arturo Grieben.**
	Ingeniero **Evaristo V. Moreno.**
	Doctor **Atilio A. Bado.**
	Ingeniero **Antonio Paitoví.**
	Ingeniero **Manuel J. Arce.**
	Ingeniero **Julio R. Castiñeiras.**
	Doctor **Salvador Debenedetti.**
Gerente	Señor **Juan Botto.**

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los *Anales (personalmente responsables de la tesis que sustentan en sus escritos)* que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarlo por escrito. Por mayor número de ejemplares deberán entenderse con la Casa editora « CONI ». Tienen, además, derecho a la corrección de dos pruebas. Los manuscritos, correspondencia, etc., se enviarán a la Dirección, **Cevallos, 269.** — LA DIRECCIÓN.

EL GRUPO LINGÜÍSTICO TSHON

DE LOS TERRITORIOS MAGALLÁNICOS

SINOPSIS PRELIMINAR

POR R. LEHMANN-NITSCHE

Los indígenas de la Patagonia que ni son Araucanos ni Puelches (en el sentido lingüístico de d'Orbigny) pueden dividirse, actualmente, más o menos en dos grandes tribus: la septentrional y la austral, cuyos nombres gentilicios, según nuestras comprobaciones del año 1905, son Pä'änkün'k (con el acento sobre la primera *ä*) y Aônükün'k (con el acento sobre la *ô*). El primer grupo habita o habitaba entre los ríos Limay, río Negro y Chubut; el segundo, desde este último hasta el estrecho de Magallanes, y las noticias de todos los viajeros coinciden respecto a este concepto. Los individuos de cada grupo están en correlación continua y los compañeros de Musters, por ejemplo, pertenecían a ambas partidas.

A ellos se agrega un grupo hoy casi extinguido que antes vivía en la región sudoeste del país. Carlos V. Burmeister (1891) lo llama Téuesh, Carlos Ameghino (1900) Téhues o Téuesson; yo apunté en 1905 la designación Tä'uüshn (con el acento sobre la *ä*). Parece que la voz es idéntica con Teuürk'o-tshonk (el acento sobre la *ü*), que dice: gente del oeste (apuntes nuestros de 1905).

Pasaremos a la Tierra del Fuego donde existe una verdadera baraunda respecto a la nomenclatura indígena. Hay que tener en cuenta que existen dos grandes agrupaciones, fundamentalmente distintas por su modo de vivir: indios de tierra, que nunca navegan, e indios canoeros. Las antiguas descripciones están llenas de confusión. Los indios canoeros actualmente son conocidos bajo el nombre de Yagan (creado artificialmente por Thomas Bridges según una

playa del archipiélago fueguino) y bajo el nombre de Alacaluf (apodo dádoles por los primeros que significa tragadores de mejillones; información verbal del doctor Carlos Spegazzini). Los Yagan, entre ellos se llaman Yámana (información verbal de don Lucas Bridges); los Alacaluf, Hé-kaïné (Beauvoir).

Los indios terrestres de la Tierra del Fuego vivían y viven en el interior desconocido de la isla grande. Actualmente son llamados Ona. Esta palabra parece que corresponde a Oens, de los cuales el famoso Jemmy Button, indio Yámana, hizo relación a los expedicionarios del *Adventure* y *Beagle*. En la forma semejante a la actual son mencionados por vez primera por Francisco P. Moreno (1878); Spegazzini escribe Aôna, Segers Aona, la Misión científica francesa, Lovisato, Bove, Lista y todos los autores posteriores, ya Ona, ya usando el plural con la *s* final.

El origen de la denominación Ona es el siguiente: los primeros fueguinos que en la segunda mitad del siglo pasado trabaron relación estrecha con el hombre blanco eran los Yámana, gracias a los esfuerzos del misionero inglés reverendo Thomas Bridges en Ushuaia. Estos indios siempre contaban de otros indios de tierra adentro que llamaban Oens (Fitz-Roy) o Aôna (Spegazzini), y cuyo país, es decir, la isla grande, nombraban Onesin o sea «tierra de los Ona». A los Yámana se debe entonces la designación Ona hoy en uso, evidentemente corrupción de Chon (hombre, en dialecto Shílk'nam, v. m. a.), palabra cuyo primer sonido habrá ofrecido dificultades invencibles a la lengua del indio Yagan.

Los Onas se dividían en dos tribus: la que todavía existe y que es la más conocida se llama Shilk'nam, como pude averiguarlo el año 1902 en Bahía Inútil. El señor Lucas Bridges a quien conocí más tarde, me confirmó este detalle; a él se deben también buena parte de los datos que se hallan en el artículo de Furlong y en el libro de Carlos Gallardo; el primero escribe el nombre indígena: Shillkanen; el segundo: Shilkenam.

La existencia de una segunda tribu Ona, con dialecto especial, me fué comunicada por el mismo señor Bridges. Ella se llama Mánekenkn; hombre, en su idioma, es hint'k. Cuando conversábamos en 1903 sobre el tópico, vivían sólo una mujer vieja y un hombre adulto, éste mestizo entre Shílk'nam y Mánekenkn. El antiguo habitat de estos últimos era el este y sudeste de la gran isla; en sus costumbres no se distinguían de sus parientes. El señor L. Bridges apuntó un extenso vocabulario que regaló al doctor Samuel A. La-

fone Quevedo y del cual hemos extractado las voces necesarias a nuestra investigación. Ella se basa en un estudio comparativo de todos los vocabularios conocidos hasta la fecha, que se refieren a las lenguas patagónica y ona.

Como base y plataforma sirvieron 209 palabras del dialecto Tä'uüshn apuntadas por don Carlos Ameghino, quien nos las cedió galantemente para su publicación. A estas voces, arregladas según su carácter, en grandes grupos, fueron agregadas, en orden cronológico, aquellas que corresponden a los otros dialectos patagónicos y a los dos dialectos fueguinos. Nuestra lista comparativa permite reunir todos ellos en un sólo grupo lingüístico, el Tshon, designación que parece oportuna por el significado de esta palabra (« hombre », en dialecto Shílk'nam; en los dialectos de Patagonia, « gente » es: Tshon'ke, escrito Tsoneca por Theophilus Schmid).

Entrando en detalles, resulta que hay grandes variaciones, no tan sólo entre los dialectos actuales, sino también dentro de uno y el mismo al correr de los tiempos; encontramos, sin embargo, siempre afinidades y semejanzas. En lo que se refiere a los dialectos patagónicos, es muy interesante que en los vocabularios de Pigafetta (1520), pero principalmente en los del siglo XVIII, aparecen voces del Tä'uüshn que van eliminándose poco a poco en los vocabularios modernos. Debe recordarse también la gran inconstancia y fluctuación de las voces indígenas. « La curiosa costumbre, dice Moreno en su *Viaje a la Patagonia austral,* que tienen los Patagones de cambiar nombres a las cosas cuando un indio que haya usado el de una de ellas como nombre propio, muere, hará que sea en extremo laboriosa la confección de un buen diccionario. »

La afinidad entre la sección patagónica y la fueguina del grupo lingüístico Tshon siempre ha sido indicada por los que se han ocupado de esta materia, aunque dejaron de comprobar sus afirmaciones. Por lo demás, no hay razón alguna para establecer un *stock* lingüístico ona, como lo hicieron Brinton y Chamberlain.

CÁLCULO AUTOMÁTICO DE SISTEMAS HIPERESTÁTICOS

POR EL ING° OTTO GOTTSCHALK

(Conclusión)

IV

DIBUJAR CÍRCULOS Y MEDIR APROXIMADAMENTE CURVATURAS

Problema. — Por dos puntos A y B distanciados de 50 cm hay que trazar un arco de círculo de un metro de radio.

Solución. — Llevamos una cinta de acero mediante el *Continostat* por los puntos A y B transversalmente inmovibles, y tiramos como indica la figura 8 *d* dos reglas móviles, que se encuentran exteriormente a la misma distancia de los puntos de apoyo A y B, mediante hilos de seda con igual fuerza, hasta que la flexión de la cinta de acero en sentido contrario sobre la perpendicular en el centro alcance al valor

$$h = \frac{l^2}{8\rho} = \frac{0{,}50^2}{8{,}00} = 0{,}03125 \text{ m} = 3{,}125 \text{ cm}.$$

La cinta de acero forma entonces el arco de círculo de un metro de semidiámetro buscado.

Problema. — Determinar aproximadamente el radio de curvatura en un punto determinado de cualquier curva.

Solución 1ª. — Procedemos como en el problema anterior y empujamos la regla móvil central de las dadas en figura 8 *d* hacia adelante hasta que el arco de círculo así formado coincida lo más posible en el punto dado con la curva. Midiendo la flexión h de la cinta de acero en la perpendicular media, y la distancia l conocida, de los puntos A y B, resulta el radio de curvatura aproximado $\rho = \frac{l^2}{8h}$.

Solución 2ª. — Hacemos tocar, según la figura 8 *a*, las reglas exteriores a las distancias a de A y $b = 2a$ de B, empujamos la regla central hacia delante hasta que evidentemente la curvatura a medir sea más grande que la de A y más chica que la de B, y fijamos la regla central. Entonces aplicamos el *Continostat* con la cinta de acero así doblada a la curva dada y buscamos el punto de la cinta de acero en la distancia x de A, en la cual coincidan la curvatura de la cinta con la de la curva, lo más exactamente.

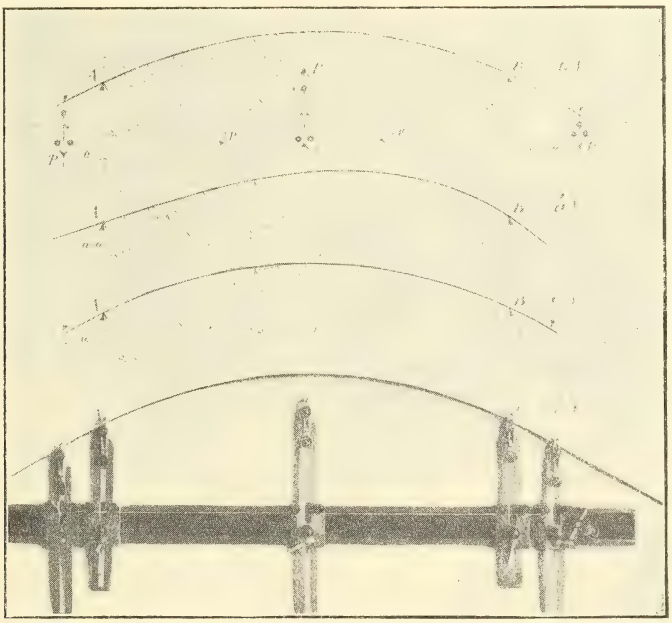


Fig. 8

Si h es la flecha de la cinta y l la distancia de A a B, resulta en el lugar x un radio de curvatura $\rho_x = \frac{3}{32h} \cdot \frac{2l^2}{l+x}$.

Exactitud. — El valor exacto del radio de la curva de círculo es con las notaciones anteriores $-\rho = \frac{l^2 + 4h^2}{8h}$ en lugar del calculado $\rho = \frac{l^2}{8h}$. Pero como el *Continostat* en general solo se emplea para arcos planos, con $\frac{h}{l} < \frac{1}{8}$ la diferencia es poco importante.

APÉNDICE

I. — LÍNEAS DE INFLUENCIA COMO LÍNEAS FLECTORAS

Consideremos una viga AB, no cargada, de sección constante sometida a momentos en los apoyos de tal manera que, una vez deformada su flecha en el centro sea h y que los segmentos que las tangentes en los apoyos determinan en la vertical del centro sean f_A y f_B.

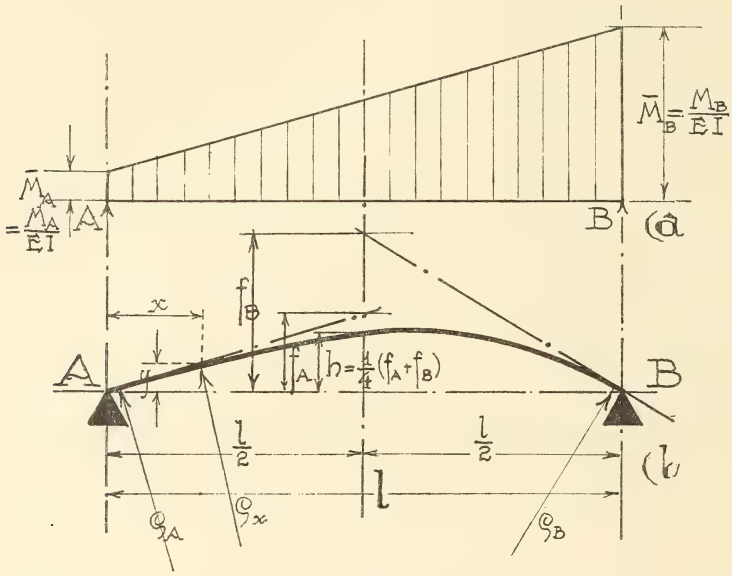


Fig. 9

La flecha en un punto a la distancia x del apoyo A es (fig. 9 b) :

$$y = \frac{\varphi x}{2l}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) + \frac{\varphi' x}{2l}\left(2 - 3\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right)$$

siendo

$$\varphi = \frac{8}{3}f_B - \frac{4}{3}f_A \qquad \text{y} \qquad \varphi' = \frac{8}{3}f_A - \frac{4}{3}f_B.$$

Para $x = \frac{l}{2}$ resulta :

$$y = h = \frac{3}{16}(\varphi + \varphi') = \frac{1}{4}(f_A + f_B).$$

La superficie determinada por la misma línea elástica es :

$$\int_0^l y dx = \frac{l}{8}(\varphi + \varphi') = \frac{l}{6}(f_A + f_B) = \frac{2}{3} hl.$$

Notamos pues las siguientes características de las líneas de influencia considerándolas como líneas flectores :

1° Las líneas de influencia de vigas rectas de sección constante entre dos puntos de flecha nula determinan superficies iguales a $\frac{2}{3}$ del producto de la distancia de los puntos por la flecha en el punto medio de esta distancia. Partes de tal superficie se descomponen en un trapecio, triángulo o rectángulo y en una curva cuya superficie corresponde a las $\frac{2}{3}$ partes de la base por la altura en el centro;

2° Si el apoyo en A es libre resulta $f_A = \frac{1}{2} f_B$;

3° La flecha en el centro de AB es $h = \frac{1}{4}(f_A + f_B)$. Si el apoyo A está empotrado en la dirección de AB, resulta $h = \frac{1}{4} f_B$.

Ejemplos. — La línea de influencia para el momento M_B de una viga AB empotrada en B es la línea de flexión de la viga girándola en una unidad en el apoyo B, es decir, $f_B = 2f_A = \frac{1}{2}$ (fig. 10 *a*). Resulta, pues, en el centro de la viga :

$$\frac{M_B}{P} = h = \frac{1}{4}\left(f_B + \frac{1}{2} f_B\right) = \frac{3}{16} l.$$

La superficie de influencia :

$$\frac{M_B}{pl} = \frac{2}{3} h = \frac{1}{8} l.$$

Siendo la ecuación general :

$$\varphi = 2f_B = l \qquad \text{y} \qquad \varphi' = 0$$

$$\frac{M_B}{P_x} = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Estando empotrados los dos apoyos resulta girando en una unidad en B con $f_A = 0, f_B = \frac{l}{2}$ (fig. 10 *c*).

Flecha en el centro :

$$\frac{M_B}{P} = h = \frac{1}{4} f_B = \frac{1}{8} l.$$

Superficie de influencia :

$$\frac{M_B}{pl} = \frac{2}{3} hl = \frac{1}{12} l.$$

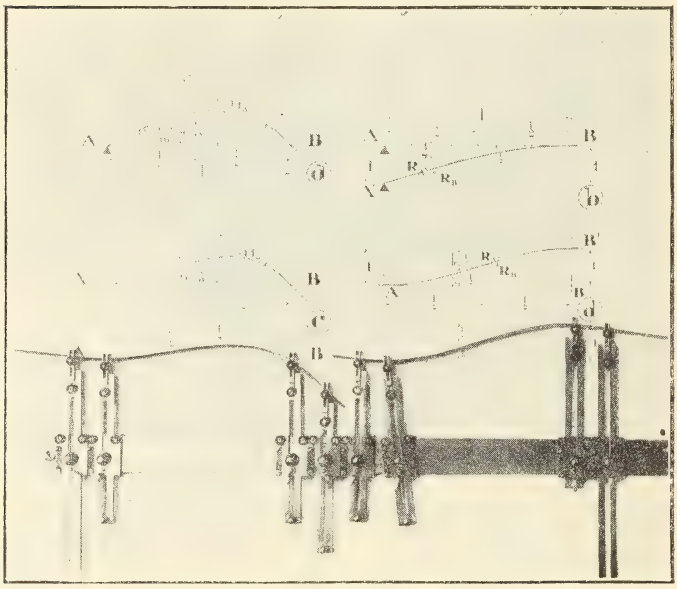


Fig. 10

Siendo la ecuación general :

$$\varphi = \frac{8}{3} f_B \qquad \text{y} \qquad \varphi' = -\frac{4}{3} f_B :$$

$$\frac{M_B}{P_x} = \frac{x^2}{l}\left(1 - \frac{x}{b}\right).$$

La línea de influencia para las reacciones de la viga AB empotrada en B la obtenemos desplazando verticalmente de 1 uno de los apoyos. $\left(\text{En el } \textit{Continostat} \text{ tal unidad no debe ser más que la } \frac{1}{5} \text{ parte de la luz } l\right)$.

Resulta :

$$f_A = \frac{1}{4}, \qquad f_B = \frac{1}{2},$$

y por ende :

$$h = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16}.$$

Para P en $\frac{l}{2}$:

$$\frac{R_A}{P_{\frac{l}{2}}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{5}{16}; \qquad \frac{R_B}{P_{\frac{l}{2}}} = \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}.$$

Superficie de influencia :

$$\frac{R_A}{pl} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{16} \cdot 1 = \frac{3}{8}; \qquad \frac{R_B}{pl} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{16} \cdot 1 = \frac{5}{8}.$$

En general, puesto que

$$\varphi = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = 1, \qquad \varphi = 0 :$$

$$y = \frac{x}{2l}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$$

$$\frac{R_A}{P_x} = 1 - \frac{x}{l} - y = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{l} + \frac{x^3}{2l^3}; \qquad \frac{R_B}{P_x} = \frac{x}{l} + y = \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{l} - \frac{x^3}{2l^3}.$$

El desplazamiento vertical de una unidad de uno de los apoyos de una viga empotrada en los dos extremos produce $f_A = -\frac{1}{2}$, $f_B = \frac{1}{2}$, es decir (fig. 10 *d*):

$$\varphi = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2; \qquad \varphi' = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = -2;$$

$$h = \frac{1}{4}(2 - 2) = 0; \qquad \frac{R_A}{P_{\frac{l}{2}}} = \frac{R_B}{P_{\frac{l}{2}}} = \frac{1}{2}; \qquad \frac{R_A}{pl} = \frac{R_B}{pl} = \frac{1}{2};$$

$$y = -\frac{x}{2} + 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3};$$

$$\frac{R_A}{P_x} = 1 - \frac{x}{l} - y = 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3};$$

$$\frac{R_B}{P_x} = \frac{x}{l} + y = 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}.$$

II. — LÍNEAS FLECTORES Y SUPERFICIES DE MOMENTOS

Supongamos que una viga sin carga, de sección constante (fig. 9), sea solicitada en los apoyos por momentos reducidos $\overline{M}_A = \frac{M_A}{EI}$ y

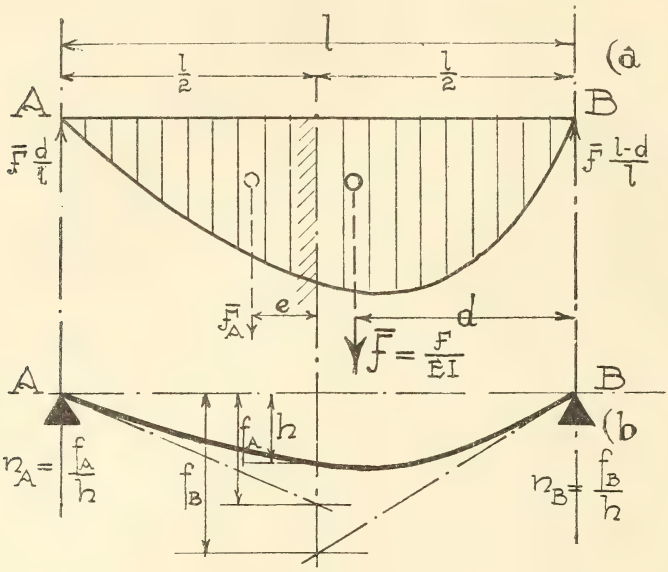


Fig. 11

$\overline{M}_B = \frac{M_B}{EI}$. Como la superficie de momentos reducidos corresponde al ángulo de que giran las secciones de apoyo, resulta :

$$\frac{l}{2}(\overline{M}_A + \overline{M}_B) = \frac{2}{l}(f_A + f_B),$$

o sea :

$$\overline{M}_A + \overline{M}_B = \frac{4}{l^2}(f_A + f_B) = \frac{16}{l^2}h.$$

Siendo

$$f_A = \frac{l^2}{12}(2\overline{M}_A + \overline{M}_B) \qquad \text{y} \qquad f_B = \frac{l^2}{12}(\overline{M}_A + 2\overline{M}_B),$$

resulta según I :

$$\overline{M}_A = \frac{3\varphi'}{l^2} = \frac{4}{l^2}(2f_A - f_B); \qquad \overline{M}_B = \frac{3\varphi}{l^2} = \frac{4}{l^2}(2f_B - f_A).$$

La viga libre AB (fig. 11) sea cargada, produciendo la carga la superficie de momentos reducidas $\bar{\mathcal{F}} = \frac{\mathcal{F}}{EI}$ siendo d la distancia de su centro de gravedad de B.

La línea flectora así obtenida sea indicada por h, f_A y f_B. Resulta (fig. 11) :

$$\bar{\mathcal{F}} = \frac{2f_A}{d} = \frac{2f_B}{l-d} = \frac{2}{l}(f_A + f_B); \qquad \frac{d}{l-d} = \frac{f_A}{f_B}; \qquad \frac{d}{l} = \frac{f_A}{f_A + f_B};$$

$$\bar{\mathcal{F}}_A e = \bar{\mathcal{F}}\frac{d}{2} - h = f_A - h = f_A \frac{n_A - 1}{n_A};$$

$\therefore$

$$n_A = \frac{f_A}{h} \qquad \text{y} \qquad n_B = \frac{l-d}{d} n_A.$$

Para $f_A = f_B = f$, es decir para cargas simétricas, resulta

$$d = \frac{l}{2}, \qquad \bar{\mathcal{F}} = \frac{4}{l}, \qquad f = \frac{4h}{l-2e},$$

y

$$n = n_A = n_B = \frac{f}{h} = \frac{l}{l-2e}; \qquad e = \frac{l}{2} \times \frac{n-1}{n}.$$

III. — COEFICIENTES DE EMPOTRAMIENTO

Si la viga recta AB de largo l y de sección constante forma parte de un sistemo elástico cualquiera, bajo la influencia de cierta forma de la carga P, resulte su línea flectora según (fig. 12 *b*), caracterizada por la flecha en el medio h y los segmentos de tangentes de apoyo sobre la perpendicular media f_A y f_B. ¿Cuáles son los momentos de empotramiento?

Ponemos $M_A = m_A P l$ y $M_G = m_B P l$ y determinamos los grados o coeficientes de empotramiento m_A y m_B independientes de la intensidad de la carga P.

Supongamos primero apoyos libres en A y B y la carga de una línea flectora caracterizada por h', f_A' y f_B' (fig. 12 *d*); luego el empotramiento produce una flexión opuesta h'', f_A'' y f_B'' (fig. 12 *c*) obteniéndose el resultado final :

$$h = h' - h'', \qquad f_A = f_A' - f_A'', \qquad f_B = f_B' - f_B'',$$

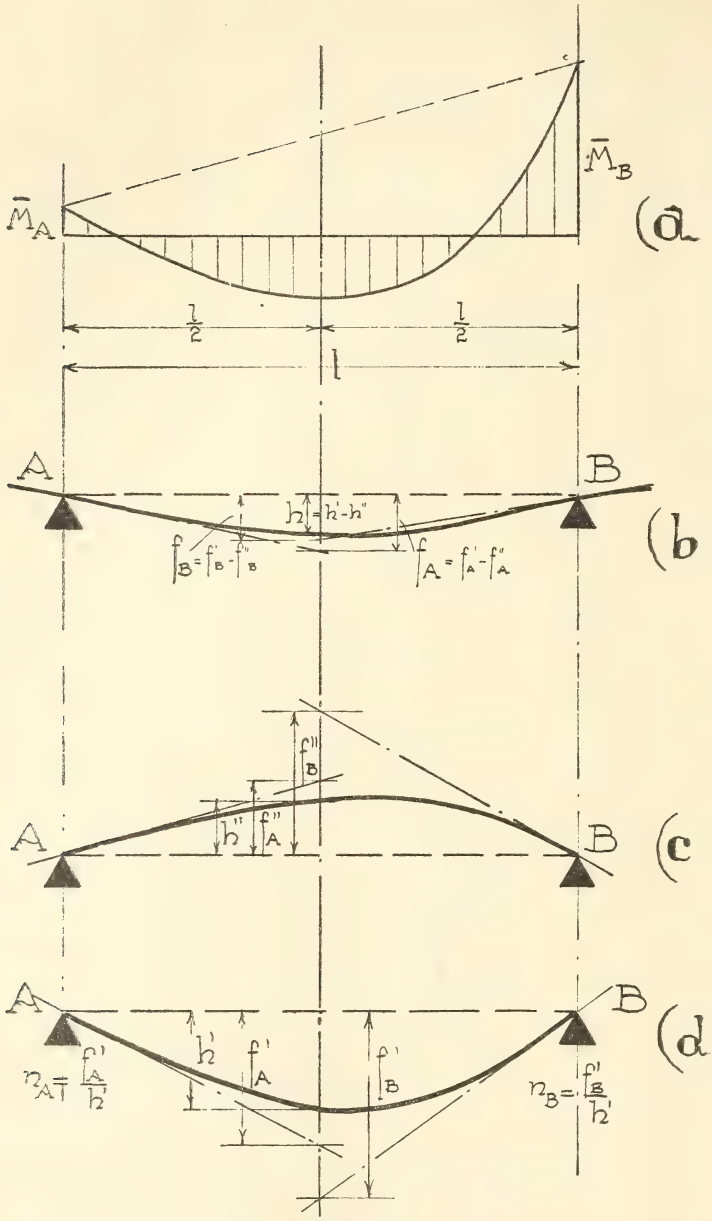

$\bar{M}_A$
$\bar{M}_B$
(a
$\frac{l}{2}$
$\frac{l}{2}$
l
A
B
$h = h' - h''$
$f_B = f'_B - f''_B$
$f_A = f'_A - f''_A$
(b
f''_B
h''
f''_A
A
B
(c
A
B
h'
f'_A
f'_B
$n_A = \frac{f'_A}{h'}$
$n_B = \frac{f'_B}{h'}$
(d

Fig. 12

o sea :

$$h' = h + h'', \qquad f_A' = f_A + f_A'', \qquad f_B' = f_B + f_B'',$$

en donde según I :

$$h'' = \frac{1}{4}(f_A'' + f_B'') \qquad \text{y según II :} \qquad n_A = \frac{f_A'}{h'} \qquad \text{y} \qquad n_B = \frac{f_B'}{h'},$$

o sea :

$$4h' - f_A' - f_B' = h'(4 - n_A - n_B) = 4h - f_A - f_B,$$

y

$$h' = \frac{4h - f_A - f_B}{4 - n_A - n_B}.$$

Además :

$$f_A' = n_A h' = n_A\left(h + \frac{1}{4}(f_A'' + f_B'')\right); \qquad f_B' = n_B\left(h + \frac{1}{4}(f_A'' + f_B'')\right),$$

por ende

$$f_A = n_A h + \frac{n_A - 4}{4} f_A'' + \frac{n_A}{4} f_B'',$$

$$f_B = n_B h + \frac{n_B}{4} f_A'' + \frac{n_B - 4}{4} f_B''.$$

De estas dos ecuaciones resulta f_A'' y f_B'' :

$$f_A''(4 - n_A - n_B) = 4n_A h + (n_B - 4) f_A - n_A f_B$$

$$f_B''(4 - n_A - n_B) = 4n_B h + (n_A - 4) f_B - n_B f_A.$$

Según II :

$$\frac{l^2}{4}\overline{M}_A = 2f_A'' - f_B'', \qquad \frac{l^2}{4}\overline{M}_B = 2f_B'' - f_A'',$$

$$\frac{l^2}{4}(\overline{M}_A + \overline{M}_B) = f_A'' + f_B'' = 4h'' = \frac{4(n_A + n_B)h - 4f_A - 4f_B}{4 - n_A - n_B},$$

y

$$\overline{\mathfrak{F}} = \frac{2f'_A}{d} = \frac{2n_A h'}{d} = \frac{2n_B h'}{l - d}$$

$$\frac{\overline{M}_A + \overline{M}_B}{\overline{\mathfrak{F}}} = \frac{M_A + M_B}{\mathfrak{F}} = 8\,\frac{h''}{n_A h'} \cdot \frac{d}{l^2}$$

$$M_A + M_B = \frac{8\delta}{n_A} \cdot \frac{d}{l} kPl,$$

siendo

$$k = \frac{F}{Pl}$$

$$\delta = \frac{h''}{h'} = \frac{(n_A + n_B)\,h - f_A - f_B}{4h - f_A - f_B}.$$

Designamos

$$\varepsilon = \frac{\overline{M}_A}{\overline{M}_B} = \frac{M_A}{M_B} = \frac{2f_A'' - f_B''}{2f_B'' - f_A''} = \frac{4(2n_A - n_B)h + (3n_B - 8)f_A - (3n_A - 4)f_B}{4(2n_B - n_A)h + (3n_A - 8)f_B - (3n_B - 4)f_A}$$

$$\varepsilon + 1 = \frac{(n_A + n_B)\,h - f_A - f_A}{(2n_B - n_A)\,h - \frac{1}{4}(8 - 3n_A)f_B - \frac{1}{4}(3n_B - 4)f_A},$$

resultando los momentos de apoyo

$$M_A = m_A Pl = \frac{8}{n_A} \cdot \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{d}{l} \cdot kPl,$$

y

$$M_B = m_B Pl = \frac{8}{n_A} \cdot \frac{\delta}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{d}{l} \cdot kPl,$$

de donde :

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon + 1} = \frac{\alpha h - \beta f_A - \gamma f_B}{D} \qquad \text{y} \qquad \frac{\delta}{\varepsilon + 1}\,\frac{\alpha' h - \beta' f_B - \gamma' f_A}{D},$$

siendo :

$$D = 4h - f_A - f_B$$

$$\alpha = 2n_A - n_B, \qquad \beta = \frac{1}{4}(8 - 3n_B), \qquad \gamma = \frac{1}{4}(3n_A - 4),$$

$$\alpha' = 2n_B - n_A, \qquad \beta' = \frac{1}{4}(8 - 3n_A), \qquad \gamma' = \frac{1}{4}(3n_B - 4).$$

Para cargas simétricas resulta :

$$\frac{d}{l} = \frac{1}{2}, \qquad n_A = n_B = n,$$

$$m_A = \frac{4k}{n} \cdot \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon + 1} \qquad \text{y} \qquad m_B = \frac{4k}{n} \cdot \frac{\delta}{\varepsilon + 1}$$

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon + 1} = \frac{nh - \beta f_A - \gamma f_B}{4h - f_A - f_B}, \qquad \frac{\delta}{\varepsilon + 1} = \frac{nh - \beta f_B - \gamma f_A}{4h - f_A - f},$$

siendo :

$$\beta = \frac{8 - 3n}{4} \qquad \text{y} \qquad \gamma = \frac{3n - 4}{4}.$$

Las cargas repartidas serán substituídas por dos cargas concentradas iguales a distancias del apoyo tales que resulten los mismos valores para n_A y n_B.

De estas fórmulas resultan los coeficientes $m_A D$ y $m_B D$ para las varias formas de P como se indica en la siguiente tabla.

IV. — LÍNEAS FLECTORAS Y CURVAS

Para la viga AB de sección constante resulta el radio de curvatura en general :

$$\rho = \frac{EI}{M} = \frac{1}{\overline{M}}.$$

Según II resulta :

$$\varphi = \frac{\overline{M}_B l^2}{3} = \frac{l^2}{3\rho_B} \qquad \text{y} \qquad \varphi' = \frac{\overline{M}_A l^2}{3} = \frac{l^2}{3\rho_A},$$

y por ende según I (fig. 9) :

$$y = \frac{lx}{6\rho_B}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) + \frac{lx}{6\rho_A}\left(2 - 3\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Para $x = \frac{l}{2}$ resulta :

$$y = h = \frac{l^2}{16} \cdot \frac{\rho_A + \rho_B}{\rho_A \rho_B}.$$

En un punto cualquiera x tenemos :

$$G_x = \frac{\rho_A \rho_B}{\rho_A x + \rho_B (l - x)}.$$

En el caso de producirse las curvas en los apoyos $\frac{1}{\rho_A}$ y $\frac{1}{\rho_B}$ por dos fuerzas iguales P que actúen fuera de AB a las distancias a de A y b de B (fig. 8 a), resulta :

$$\frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{M_B}{M_A} = \frac{b}{a} \qquad \rho_A = \frac{a+b}{ah} \cdot \frac{l^2}{16}, \qquad \rho_B = \frac{a+b}{bh} \cdot \frac{l^2}{16},$$

$$\rho_x = \frac{a+b}{16h} \cdot \frac{l^3}{a(l-x) + bx}.$$

Si doblamos el apoyo B únicamente resulta (fig. 8 *b*) :

$$a = 0, \qquad \rho_A = \infty, \qquad \rho_B = \frac{l^2}{16h}, \qquad \rho_x = \frac{l^3}{16hx} = \frac{l}{x}\rho_B; \qquad \frac{\rho_x}{\rho_B} = \frac{l}{x}.$$

Doblando en cambio los dos apoyos haciendo $b = 2a$ (8 *a*) :

$$a = \frac{b}{2}, \qquad \rho_A = \frac{3}{16} \cdot \frac{l^2}{h}, \qquad \rho_B = \frac{3}{32} \cdot \frac{l^2}{h} = \frac{\rho_A}{z},$$

$$\rho_x = \frac{3}{32h} \cdot \frac{2l^3}{l+x} = \frac{2l}{l+x}\rho_B = \frac{l}{l+x}\rho_B,$$

y siendo en cambio $a = b$, resulta $\rho_x = \rho_A = \rho_B = \rho$, es decir, un arco circular de flecha $h = \frac{l^2}{8\rho}$ y del radio $\rho = \frac{l^2}{8h}$.

Puesto que el tamaño exacto del radio del arco circular es $\rho = \frac{l^2 + 4h^2}{8h}$ resulta una diferencia que sin embargo es pequeña para arcos planos.

Tabla de coeficientes

$$D = 4h - f_A - f_B$$

$m_A D$
$2h - 7f_A - f_B)$
$h - 19f_A - 4f_B)$

« CONTINOSTAT GOTTSCHALK »

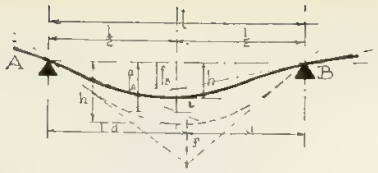


Tabla de coeficientes de empotramiento m_A y m_B

$M_A = m_A Pl$, $M_B = m_B Pl$

$D = 4h - f_A - f_B$

Forma de carga	$\frac{M_{máx}}{Pl}$	$k = \frac{\mathfrak{F}}{Pl^2}$	$\frac{d}{l}$	$\frac{\mathfrak{F}d}{Pl^2}$	$h' \frac{EI}{Pl^2}$	$n_A = \frac{\mathfrak{F}d}{2h'}$	$n_B = \frac{\mathfrak{F}(l-d)}{2h'}$	$m_A D$	$m_B D$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{3}{2} = 1.5$		$\frac{1}{24}(12h - 7f_A - f_B)$	$\frac{1}{24}(12h - 7f_B - f_A)$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{23}{648}$	$\frac{36}{23} = 1.57$		$\frac{2}{81}(36h - 19f_A - 4f_B)$	$\frac{2}{81}(36h - 19f_B - 4f_A)$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{19}{384}$	$\frac{30}{19} = 1.58$		$\frac{1}{48}(60h - 31f_A - 7f_B)$	$\frac{1}{48}(60h - 31f_B - 7f_A)$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{384}$	$\frac{8}{5} = 1.6$		$\frac{1}{24}(8h - 4f_A - f_B)$	$\frac{1}{24}(8h - 4f_B - f_A)$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{96}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{25}{16} = 1.56$		$\frac{1}{240}(100h - 53f_A - 11f_B)$	$\frac{1}{240}(100h - 53f_B - 11f_A)$
	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{320}$	$\frac{5}{3} = 1.67$		$\frac{1}{80}(20h - 9f_A - 3f_B)$	$\frac{1}{80}(20h - 9f_B - f_A)$
	$\frac{l-b}{2l}$	$\frac{a(l-a)}{l^2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{a(l-a)}{2l^2}$	$\frac{a(3l^2-4a^2)}{24l^2}$	$\frac{6l(l-a)}{3l^2-4a^2}$		$= \frac{a}{3l}\left[12\left(1-\frac{a}{l}\right)h - \left(3 + 9\frac{a}{l} - 16\frac{a^2}{l^2}\right)f_A - \left(3 - 9\frac{a}{l} + 8\frac{a^2}{l^2}\right)f_B\right]$	$\frac{a}{3l}\left[12\left(1-\frac{a}{l}\right)h - \left(3 - 9\frac{a}{l} - 16\frac{a^2}{l^2}\right)f_B - \left(3 - 9\frac{a}{l} + 8\frac{a^2}{l^2}\right)f_A\right]$
	$\frac{2l-b}{8l}$	$\frac{3l^2-b^2}{24l^2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3l^2-b^2}{48l^2}$	$\frac{8l^3-12b^2l+9b^3}{384l^2}$	$\frac{4(3l^2-b^2)l}{8l^3-12b^2l+9b^3}$		$\frac{1}{24}\left[\left(12-4\frac{b^2}{l^2}\right)h - \left(7 - 21\frac{b^2}{l^2} + 18\frac{b^3}{l^3}\right)f_A - \left(1 + 9\frac{b^2}{l^2} - 9\frac{b^3}{l^3}\right)f_B\right]$	$\frac{1}{24}\left[\left(12-4\frac{b^2}{l^2}\right)h - \left(7 - 21\frac{b^2}{l^2} + 18\frac{b^3}{l^3}\right)f_B - \left(1 + 9\frac{b^2}{l^2} - 9\frac{b^3}{l^3}\right)f_A\right]$
	$\frac{ab}{l^2}$	$\frac{ab}{2l^2}$	$\frac{l+b}{3l}$	$\frac{ab(l+b)}{6l^2}$	$\frac{b}{48l^2}(3l^2-4b^2)$	$4\frac{(l^2-b^2)}{3l^2-4b^2}$	$4\frac{a(l+a)}{3l^2-4b^2}$	$\frac{b^2}{3l^2}\left(12\frac{a}{b}h - \left(9\frac{l}{b} - 11\right)f_A - f_B\right)$	$\frac{b^2}{3l^2}\left(12\frac{a^2}{b^2}h - \left(3\frac{l^2}{b^2} - 5\right)f_B - \left(3\frac{l^2}{b^2} - 9\frac{l}{b} + 7\right)f_A\right)$
	$\frac{ab}{l^2}$	$\frac{ab}{2l^2}$	$\frac{l+b}{3l}$	$\frac{ab(l+b)}{6l^2}$	$\frac{a}{48l^2}(3l^2-4a^2)$	$4\frac{l^2-a^2}{3l^2-4a^2}$	$4\frac{b(l+b)}{3l^2-4a^2}$	$\frac{a^2}{3l^2}\left(12\frac{b^2}{a^2}h - \left(3\frac{l^2}{a^2} - 5\right)f_A - \left(3\frac{l^2}{a^2} - 9\frac{l}{a} + 7\right)f_B\right)$	$\frac{a^2}{3l^2}\left(12\frac{b}{a}h - \left(9\frac{l}{a} - 11\right)f_B - f_A\right)$
a/l 1/10	b/l 9/10	a/b 1/9	$\frac{9}{100}$	$\frac{9}{200}$	$\frac{19}{30}$	0.0285	0.0062	2.31	1.34	$\frac{1}{3000}(972h - 295f_A - 217f_B)$	$\frac{1}{3000}(108h - 79f_B - f_A)$
1/5	4/5	1/4	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{9}{15}$	0.0480	0.0118	2.03	1.35	$\frac{1}{375}(192h - 70f_A - 37f_B)$	$\frac{1}{375}(48h - 34f_B - f_A)$
1/4	3/4	1/3	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{7}{12}$	0.0547	0.0143	1.91	1.36	$\frac{1}{192}(108h - 43f_A - 19f_B)$	$\frac{1}{192}(36h - 25f_B - f_A)$
1/3	2/3	1/2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$	0.0618	0.0178	1.74	1.39	$\frac{1}{81}(48h - 22f_A - 7f_B)$	$\frac{1}{81}(24h - 16f_B - f_A)$
2/5	3/5	2/3	$\frac{6}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{8}{15}$	0.0641	0.0197	1.63	1.42	$\frac{8}{375}\left(27h - \frac{55}{4}f_A - \frac{13}{4}f_B\right)$	$\frac{8}{375}\left(18h - \frac{23}{2}f_B - f_A\right)$
1/2	1/2	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{48}$	1.50	1.50	$\frac{1}{24}(12h - 7f_A - f_B)$	$\frac{1}{24}(12h - 7f_B - f_A)$
3/5	2/5	3/2	$\frac{6}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{7}{15}$	0.0560	0.0197	1.42	1.63	$\frac{8}{375}\left(18h - \frac{23}{2}f_A - f_B\right)$	$\frac{8}{375}\left(27h - \frac{55}{4}f_B - \frac{13}{4}f_A\right)$
2/3	1/3	2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	0.0494	0.0178	1.39	1.74	$\frac{1}{81}(24h - 16f_A - f_B)$	$\frac{1}{81}(48h - 27f_B - 7f_A)$
3/4	1/4	3	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{12}$	0.0391	0.0143	1.36	1.91	$\frac{1}{192}(38h - 25f_A - f_B)$	$\frac{1}{192}(108h - 43f_B - 19f_A)$
4/5	1/5	4	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{5}$	0.0320	0.0118	1.35	2.03	$\frac{1}{378}(48h - 34f_A - f_B)$	$\frac{1}{375}(192h - 70f_B - 37f_A)$
9/10	1/10	9	$\frac{9}{100}$	$\frac{9}{200}$	$\frac{11}{30}$	0.0165	0.0062	1.34	2.31	$\frac{1}{3000}(108h - 79f_A - f_B)$	$\frac{1}{3000}(972h - 295f_B - 217f_A)$
10/10	0/10	∞	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	—	—
			0,128	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{180}$	$\frac{5}{384}$	$\frac{112}{75} = 1.49$	$\frac{128}{75} = 1.71$	$\frac{1}{24}\left(\frac{32}{5}h - \frac{18}{5}f_A - \frac{3}{5}f_B\right)$	$\frac{1}{24}\left(\frac{48}{5}h - \frac{22}{5}f_B - \frac{7}{5}f_A\right)$
			0,128	$\frac{1}{12}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{180}$	$\frac{5}{384}$	1.71	1.49	$\frac{1}{24}\left(\frac{48}{5}h - \frac{22}{5}f_A - \frac{7}{5}f_B\right)$	$\frac{1}{24}\left(\frac{32}{5}h - \frac{18}{5}f_B - \frac{3}{5}f_A\right)$

RESULTADOS

DE LA

PRIMERA EXPEDICIÓN A TIERRA DEL FUEGO (1921)

ENVIADA POR LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES (1)

DIATOMEAS DE TIERRA DEL FUEGO

POR JOAQUÍN FRENGUELLI

PRELIMINARES

Con la presente memoria, que forma la segunda (2) de mis *Contribuciones para una Sinopsis de las diatomeas argentinas,* espero haber cumplido, en forma satisfactoria, la honrosa tarea que tuvo la amabilidad de confiarme el profesor Martín Doello-Jurado, organizador y director de la primera expedición a Tierra del Fuego, realizada durante el otoño de 1921 (febrero a abril) por los alumnos de la Facultad de ciencias de la Universidad de Buenos Aires.

Los materiales puestos a mi disposición para el estudio de las diatomeas, proceden de los alrededores del río Grande, de Tierra del Fuego, Punta Arenas y bahía de San Sebastián, sobre las costas orientales de Tierra del Fuego, al rededor del 51° de latitud sur. Corresponden, por lo tanto, a la « región magallánica », que, desde el punto de vista diatomeológico, comprende el extremo sur de la Patagonia, la Tierra del Fuego, las islas de los Estados, las Malvinas y aquel complicado

(1) Véase en las páginas 59 y siguientes y 229 y siguientes del tomo XCIV los dos primeros artículos de la serie correspondiente a esta expedición.

(2) La primera *(Diatomeas del río Primero en la ciudad de Córdoba)* apareció en *Boletín de la Academia nacional de ciencias en Córdoba,* tomo XXVII, Córdoba, 1923.

archipiélago que, al oeste, se extiende sobre las costas pacíficas, desde el archipiélago de los Chonos (entre 43°45′ y 45°47′ latitud sur) hasta cabo de Hornos (1).

Las diatomeas de esta región son bastante conocidas, puesto que la mayor parte de las expediciones científicas antárticas y las expediciones que tuvieron como fin precipuo la exploración del archipiélago fueguino coleccionaron materiales diatomeológicos confiados a competentes especialistas.

Ehrenberg *(Verbreitung)*, en 1843, publicó una primera lista de diatomeas de esta región, halladas sobre fragmentos de algas traídos de las Malvinas por Lesson a su regreso del viaje de *La Coquille* (segundo viaje al rededor del mundo de Duperrey), en 1825, y conservados por largos años en el herbario del profesor Kunth.

Una segunda lista fué publicada por el mismo autor (Ehrenberg, *Sudpolarreise)*, en 1844, sobre los materiales coleccionados por Darwin durante el célebre viaje de la *Beagle* al mando del capitán Fitz-Roy, y por James Dalton Hooker, naturalista de la expedición del *Erebus* y del *Terror*, al mando de James Ross. Los materiales traídos por Darwin, en 1832, procedían de los alrededores de cabo de Hornos; mientras Hooker, en 1842, había hecho sus colecciones en Tierra del Fuego, islas Malvinas e isla Hermite.

En 1847, este último autor (Hooker, *Erebus)*, en colaboración con Thwaites, incluyó una tercera lista en su *Flora antártica*, donde reunió los resultados botánicos del viaje del *Erebus* y del *Terror*. La lista de Hooker comprende 114 especies, entre marinas y de agua dulce, procedentes no sólo de la región magallánica, sino también de los mares antárticos y de la Tierra de Graham. Las especies magallánicas proceden de las islas Malvinas (25 especies), cabo de Hornos (3 especies) e isla Cockburn (4 especies) (2).

(1) Así considerada, la región magallánica corresponde a la sección meridional de la región boscosa antártica de Grisebach *(La vegetation du Globo*, trad. Tchihatchef, págs. 721 a 742 y 811 a 813), mas las islas Malvinas no fueron incluídas por este autor, a pesar de haber reconocido la gran analogía de su flora con aquella del estrecho de Magallanes.

(2) Hooker *(Erebus*, pág. 511) incluye en su lista también dos especies de agua dulce halladas *in a white pigment used by the Fuegians*, traído por C. Darwin. Las dos especies, *Cocconema lunula* (= *Cymbella cistula* var. *maculata)* y *Pinnularia borealis*, son mencionadas también por P. Petit *(Cap Horn*, pág. 111), quien, malgrado su empeño en el análisis del mismo material, dice no haber podido encontrarlas. Sin embargo, este pigmento había sido examinado con anterioridad

En 1854, Ehrenberg reunió en su gran obra *Mikrogeologie* las listas publicadas con anterioridad y que comprenden: 63 especies de las islas Malvinas *(Mikrogeologie,* pág. 262) y 35 especies de cabo de Hornos, isla Hermite y Tierra del Fuego *(Ibid.,* págs. 288, 289 y 292).

Hohenacker (1852-1862) en su colección de *Algae marinae siccatae,* también incluyó dos especies de diatomeas de la región magallánica: al número 251, *Schizonema clavatum* (= *Berkleya conferta)* de Puerto Stanley (Malvinas) y al número 402, *Schizonema viride* (= *Berkleya rutilans* var. *viridis)* de Punta Arenas, en el estrecho de Magallanes.

En 1861-1862, Janisch *(Guano)* estudió las diatomeas contenidas en muestras de guano de Patagonia, que había recibido por intermedio del doctor J. A. Sctöckhardt, de Tharaud. La lista publicada por este autor comprende 47 especies, las que se reducen a 29 si eliminamos las repeticiones sinomínicas y dos formas de dinoflagelados del género *Dyctiocha,* anteriormente incluído entre las diatomeas.

El mismo autor (Janisch, *Gazelle)* examinó también los materiales traídos por Naumann, naturalista de la expedición alemana de *La Gazelle* (1874); la obra correspondiente es sumamente rara, porque Janisch no la publicó, sino distribuyó entre los diatomeólogos amigos un escaso número de ejemplares constituídos por 17 láminas fotográficas y el índice manuscrito de las especies.

Puiggari *(Apiahy),* en 1881, al dar noticias de algunas algas brasileñas, agregó una nueva lista de diatomeas de guanos patagónicos procedentes de las islas Schag, Jercey y Coralite (?) y determinadas por Grunow: en todo 46 formas, entre especies y variedades, la mayor parte marinas.

También durante el viaje de circunnavegación de la corbeta italiana *Vettor Pisani,* en 1884, fueron coleccionados materiales diatomíferos por los oficiales Marcacci y Cuboni, en el estrecho de Maga-

por Ehrenberg *(Feuerländ,* págs. 11 y 12), quien halló en el mismo las 14 especies, de aguas dulces, siguientes:

Chaetotyphla saxipara (= ?).
Cocconema lunula (= *Cymbella cistula* var. *maculata).*
Eunotia tridentula.
Gonphonema gracile.
Navicula Hitchcockii.
Pinnularia borealis.
Pinnularia inaequalis (= *Cymbella Ehrenbergii).*
Pinnularia mesogongyla.
Pinnularia viridis.
Stauroneis Baileyi.
Stauroneis phoenicenteron.
Stauroneis parva (= *Navicula parva).*
Trachelomonas granulata (= *Melosira granulata).*
Trachelomonas laevis (= *Melosira laevis).*

llanes (Punta Arenas y bahía de San Nicolás). Las diatomeas traídas por Marcacci fueron estudiadas por Grunow e incluídas por A. Piccone en su relación sobre las algas coleccionadas por esta expedición (Grunow, *Vettor Pisani).* En cambio, los materiales recogidos por Cuboni fueron examinados por De Toni y Levi (De Toni, *Magellano,* pág. 3), quienes, sobre ejemplares de *Ceramium rubrum* var. *involutum,* hallaron las tres especies siguientes: *Grammatophora marina, Cocconeis scutellum* y *Synedra superba.*

Una mayor contribución fué aportada por la misión francesa de la *Romanche* al cabo de Hornos. Las diatomeas fueron estudiadas, en 1889, por P. Petit *(Cap Horn,* págs. 114 y 138), quien enumeró 248 especies de las cuales algunas nuevas, así distribuídas:

Diatomeas de agua dulce:

1° Sobre los musgos, en un marjal de la bahía de Orange, 7 especies

2° En una balsa de agua dulce en la ensenada Forge (bahía de Orange), 2 especies;

3° En el agua de deshielo a 380 metros de altitud, 28 especies.

Diatomeas marinas:

1° Sobre las algas dragadas y sobre las algas y conchillas de *Mytilus magallanicus* de la costa de bahía de Orange, 182 especies;

2° Sobre la arena del estuario del río cerca de la Misión, 5 especies;

3° Sobre las conchillas dragadas en la travesía de las Malvinas, 24 especies.

La expedición sudpolar alemana, dirigida por G. Neumayer, trajo también, desde la Georgia del sur, materiales diatomeológicos marinos que, en 1890, dieron a P. F. Reinsch *(Süd Georgien)* 18 especies, de las cuales 7 nuevas.

Diez años más tarde (1900) Cleve *(Magellan)* publicó una lista de especies marinas, salobres y de agua dulce, contenidas en los materiales coleccionados por la expedición sueca al estrecho de Magallanes, dirigida por O. Nordenskjöld. Contiene 141 especies, así distribuídas:

I. Diatomeas marinas y salobres del estuario del río Grande, de Tierra del Fuego, 40 especies;

II. Diatomeas de agua dulce del río Grande, 22 especies (2 nuevas);

III. Diatomeas de agua dulce de la isla Desolación, 43 especies (6 nuevas);

IV. Diatomeas fósiles de Cullen River (en capas terciarias con

lignito e impresiones de hojas de *Fagus),* 20 especies marinas (3 nuevas) y 16 de agua dulce (3 nuevas).

Otra contribución muy importante fué aportada, en 1909, por Otto Müller *(Süd Patagonien),* quien estudió los materiales coleccionados por Erl. Nordenskjöld y Borge en Patagonia austral (en la región andina de los alrededores de lago Sarmiento y laguna Blanca) durante la primera mitad de 1899: citó 240 formas (entre especies y variedades) de aguas dulces, entre las cuales 26 nuevas.

Las expediciones posteriores de la *Valdivia* (1898 y 1899), de la *Belgica* (1897-1899), del *Discovery* (1901-1904), del *Français* (1903-1905), del *Nemrod* (1908-1909), del *Pourquoi Pas?* (1908-1910), del *Terra Nova* (1910), etc.; como la anterior del *Challenger* (1873-1876) no trajeron colecciones diatomológicas de la región magallánica, sino exclusivamente de las regiones antárticas. Pero cabe recordar los trabajos correspondientes de Van Heurck y de M. Peragallo.

El primero, quien estudió los materiales diatómicos coleccionados por la *Belgica*, publicó una lista general de las diatomeas marinas de las zonas árticas y antárticas; el segundo, estudiando los materiales por el *Pourquoi Pas?* publicó una lista general de las diatomeas de agua dulce de la zona antártica, incluyendo la región magallánica. Esta última, que mayormente nos interesa, comprende las formas señaladas por Ehrenberg en las islas Kerguelen, Malvinas y cabo de Hornos; por P. Petit al cabo de Hornos; por Cleve en la Tierra del Fuego; y por O. Müller en la Patagonia. Comprende 343 formas (entre especies y variedades) que nos dan una idea de la riqueza de la flórula diatómica de la región estudiada.

Agregaré, finalmente, que A. Schmidt, en *Atlas,* y Cleve, en *Synopsis,* I-II, recuerdan también algunas especies magallánicas, no incluídas en la lista de Peragallo.

MATERIALES EXAMINADOS

Los materiales puestos a mi disposición para el estudio de las diatomeas, pueden clasificarse en las tres categorías siguientes: materiales de agua dulce, de agua submarina y sedimentos fósiles.

I

MATERIALES DE AGUA DULCE

Según el informe del profesor Doello-Jurado, quien coleccionó personalmente la mayor parte de los materiales, éstos proceden de lagunas y arroyos *(chorrillos)* situados en la región del río Grande, de Tierra del Fuego, no muy lejos de su desembocadura en el Atlántico.

En mi colección de materiales diatomológicos argentinos forman las series 234, 236, 237, 238, 239 y 241.

Todos fueron coleccionados durante el mes de marzo (comienzos de otoño) de 1921.

Serie 234. Chorrillo Uaquen (río del Fuego, Tierra del Fuego, exped. Facultad, nº 4): material tenue, pardo, con abundantes restos vegetales, conservados en formol. Al microscopio contiene numerosas diatomeas, mezcladas con abundantes bacteriáceas, esquizofíceas *(Chroococcus, Oscillatoria, Lyngbya, Nostoc, Anabaena)*, zigmenáceas *(Spirogyra, Zygnema)* y restos de vegetales superiores (especialmente gramináceas).

Serie 236. Lagunas de río del Fuego (Tierra del Fuego, exped. Facultad, nº 5): material pardo obscuro, con abundantes restos vegetales y detritus minerales, conservado en formaldehida. Al microscopio contiene escasas diatámeas, abundantes esquizofíceas *(Microcystis, Anabaena)*, desmidiáceas *(Closterium)*, algas filamentosas *(Spirogyra, Zygnema, Oedogonium)* y grandes y pequeñas células silíceas de gramináceas. Contiene, además, frecuentes espículas de esponjas de agua dulce *(Ephydatia)* y, entre los detritus minerales, abundantes partículas de vidrios volcánicos (cenizas).

Serie 237. Lagunas de los alrededores de río Grande (Tierra del Fuego, exped. Facultad, nº 2): exigua cantidad de material pardo constituído por un limo de partículas minerales y detritus vegetales, conteniendo escasas diatomeas, y más abundantes espículas de esponjas, y células silíceas de gramíneas; conservado en formaldehida.

Serie 238. Lagunas de La Despedida (departamento de río Grande, Tierra del Fuego, exp. Facultad, nº 3): poco material cenagoso, pardo obscuro, conservado en formaldehida. Al microscopio contiene frecuentes diatomeas *(Fragilarinae* en prevalencia) mezcladas con abundantes detritus fino, orgánico e inorgánico.

Serie 239. Río Candelaria (afluente del río Grande, Tierra del Fuego, exped. Facultad, nº 6): material cenagoso pardo obscuro con restos vegetales, conservado en formaldehida. Al microscopio contiene escasas diatomeas, pero pertenecientes a numerosas especies, mezcladas con abundante detritus muy fino con numerosas partículas de sílice organizada (células epidérmicas de gramíneas, espículas de *Ephydatia*, etc.) y de vidrios volcánicos.

Serie 241. Río Tres Puentes (Punta Arenas, Tierra del Fuego, exped. Facultad, nº 1): exigua cantidad de material pardo, con restos vegetales, conservado en formaldehida. Al microscopio contiene raras diatomeas y abundantes nostocáceas *(Nostoc, Anabaena)*, ulotriquiáceas *(Stigeoclonium)*, zignemáceas *(Spirogyra, Zygnema)*; contiene, además, raros rizopodos de agua dulce *(Sphenoderia)* y detritus mineral.

Las diatomeas halladas por mí en estos materiales se reparten del modo consignado en la lista siguiente :

Especies y variedades (1)	234	236	237	238	239	241
Achnanthes delicatula (Kütz.) Grun	—	—	—	—	—	—
— var. *magellanica* n.	*s*	—	—	—	—	—
Achnanthes lanceolata (Bréb. Grun	—	—	—	*s*	*s*	*r*
— var. *dubia* Grun	—	—	—	*r*	*s*	—
Achnanthes minutissima Kütz	—	—	—	—	—	—
— var. *cryptocephala* (Naeg.) Grun	—	—	—	—	—	*a*
Achnantes trinodis Ehr	—	*r*	—	—	—	—
Amphora acutiuscula Kütz	*r*	—	—	—	—	—
Amphora coffeaeformis (Ag.) Kütz	*r*	—	—	—	—	—
— var. *borealis* (Kütz.) Cleve	*s*	—	—	—	—	—
Amphora libyca Ehr	*s*	*r*	*r*	*s*	*f*	—
Amphora oralis Kütz	—	—	—	*r*	*s*	—
Cocconeis placentula Ehr	—	*s*	—	*f*	*f*	—
— var. *lineata* (Ehr.) H. V. H.	*r*	—	—	*f*	*s*	—
Cymatopleura solea (Bréb.) W. Sm	*s*	—	—	*f*	*s*	—
Cymbella americana A. Schm	—	—	*s*	—	*f*	*r*
— var. *acuta* A. Schm	*r*	*s*	*s*	*s*	*s*	—
Cymbella cistula (Hempr.) Kirch	—	—	—	*r*	*s*	—

(1) Abreviaciones : *p* = predominante ; *a* = abundante ; *f* = frecuente ; *s* = escasa ; *r* = rara ; *e* = excepcional ; *x* = accidental. Esta escala de frecuencia debe considerarse simplemente relativa a las diversas especies contenidas en cada serie.

Especies y variedades	234	236	237	238	239	241
Cymbella cistula f^a *minor* H. V. H	—	—	—	—	*r*	—
Cymbella Clericii n	—	—	*s*	—	—	*f*
Cymbella Ehrenbergii Kütz	—	*r*	*f*	—	—	*f*
— var. *delecta* (A. Schm.) Cleve	—	—	*r*	—	—	—
Cymbella gastroides Kütz	—	—	—	—	—	—
— var. *gigantea* Pant	—	*r*	—	—	—	—
Cymbella lanceolata (Ehr.) Kirch	—	—	—	*f*	*s*	—
Cymbella naviculiformis Auersw	—	—	—	*s*	*s*	—
Cymbella Nordenskiöldii O. Müll	—	—	—	*s*	—	*s*
Cymbella parva (W. Sm.) Grun	*r*	—	—	*r*	*s*	—
Cymbella tumida (Bréb.) H. V. H	—	—	—	—	*r*	—
Diatoma Ehrenbergii Kütz	—	—	—	—	*r*	—
Diatoma elongatum Ag	*s*	*s*	—	*s*	—	*f*
— var. *tenuis* (Ag.) H. V. H	*s*	—	—	—	—	—
Encyonema ventricosum (Kütz.) Grun	—	—	—	—	*r*	—
Epithemia gibba (Ehr.) Kütz	—	—	—	*f*	*s*	*r*
— var. *ventricosa* (Kütz.) Grun	—	—	—	—	*s*	*s*
Epithemia gibberula (Ehr.) Kütz	—	—	—	—	—	—
— var. *Van Heurchii* O. Müll	*r*	—	—	*r*	*r*	—
Epithemia zebra (Ehr.) Kütz	—	—	—	—	*s*	—
— var. *elongata* Grun	—	—	—	*s*	*f*	—
— var. *minor* Grun	—	—	—	—	*s*	—
— var. *proboscidea* (Kütz.) Grun	—	—	—	*s*	—	—
Eunotia praerupta Ehr	—	—	—	—	—	—
— var. *bidens* (Ehr.) Grun	—	—	—	*r*	*r*	—
— var. *curta* Grun	—	*r*	—	—	*r*	—
— var. *laticeps* Grun	—	—	*e*	*r*	—	—
— var. *tridentata* (Ehr.)	*r*	—	—	*e*	—	—
Fragilaria capucina Desm	—	—	—	*f*	—	—
Fragilaria construens (Ehr.) Grun	*f*	—	—	*r*	*s*	—
— var. *binodis* (Ehr.) Grun	*r*	*s*	—	*f*	*s*	—
— var. *minor* (n.)	*r*	—	—	*s*	*f*	—
— var. *trigona* (Grun.)	—	—	—	*f*	—	—
— var. *venter* (Ehr.) Grun	*s*	*s*	—	*p*	—	—
Fragilaria pinnata Ehr	—	—	—	*a*	*a*	—
— var. *elliptica* (Schum.) Carls	*r*	—	—	*s*	*r*	—
— var. *intercedens* Grun	—	—	—	*s*	*s*	—
— var. *lapponica* Grun	—	—	—	*r*	*r*	—
— var. *lancettula* (Schum.) Hust	*r*	—	—	*f*	*s*	—
— var. *minor* Grun	*s*	—	—	*s*	*r*	—
— var. *perlonga* n	—	—	—	*s*	—	—
— var. *tetragona* (n.)	—	—	—	*a*	*r*	—
Fragilaria virescens Ralfs	—	—	—	*f*	—	—

Especies y variedades	234	236	237	238	239	241
Fragilaria virescens var. *exigua* Grun	—	—	—	s	—	—
— var. *fuegiana* n	p	—	—	—	—	—
Gomphonema candelariae n	—	—	—	—	s	—
— var. *elliptica* n	—	—	—	—	s	—
— var. *minor* n	—	—	f	s	r	—
Gomphonema constrictum Ehr	r	—	—	s	s	—
— var. *capitata* (Ehr.) Grun	—	—	—	r	s	—
— var. *clavata* (Ehr.)	r	—	—	—	—	—
Gomphonema gracile Ehr	—	—	—	—	—	—
— var. *dichotoma* (Kütz.) Grun	r	—	s	s	r	—
Gomphonema lanceolatum Ehr	—	r	—	—	—	—
Gomphonema nicropus Kütz	s	—	—	r	s	s
Gomphonema olivaceum (Lyngb.) Kütz	—	—	—	—	s	—
Melosira distans (Ehr.) Kütz	—	—	—	—	—	—
— var. *alpigena* Grun	—	r	—	—	r	—
Melosira laevis (Ehr.) Grun	—	—	—	—	—	—
— var. *fuegiana* n	s	—	—	—	—	—
Melosira lineolata Grun	—	—	—	—	—	—
— var. *patagonica* O. Müll	—	—	—	—	r	—
Meridion circulare Ag	—	—	—	—	—	—
— var. *constricta* (Ag.) H. V. H	r	—	—	—	r	—
Navicula acrosphaeria (Bréb.) Kütz	e	—	—	r	s	r
Navicula affinis Ehr	—	—	—	—	—	r
— var. *ampliata* (Fhr.)	—	—	—	—	r	—
— var. *undulata* Grun	—	—	r	—	—	—
Navicula appendiculata (Ag.) Kütz	e	—	—	—	—	—
— var. *irrorata* Grun	a	f	—	—	—	—
Navicula anglica Ralfs	—	—	—	—	r	—
— var. *subsalina* Grun	—	—	—	s	—	—
Navicula avenacea Bréb	s	—	—	—	—	—
Navicula bacilliformis Grun	s	—	—	—	—	—
Navicula bisulcata Lag	r	—	s	—	—	—
Navicula borealis Ehr	s	r	f	f	s	—
— var. *linearis* Hérib	—	—	r	—	—	—
Navicula Charcotii M. Per	—	—	f	r	—	—
— var. *magellanica* n	—	—	s	—	—	—
Navicula cincta Ehr	s	—	—	—	—	—
— var. *cari* (Ehr.) Cleve	r	—	—	—	r	—
— var. *Heufleri* Grun	s	—	—	—	s	—
Navicula cryptocephala Kütz	s	—	—	—	—	—
— var. *exilis* (Kütz.) Grun	f	—	—	—	—	—
— var. *veneta* (Kütz.) Rabh	s	r	—	—	—	—
Navicula cuspidata Kütz	r	—	s	—	r	—

Especies y variedades	234	236	237	238	239	241
Navicula cuspidata var. *danaica* Grun	—	*r*	*s*	*r*	—	—
— var. *gracilis* M. Per	—	—	*r*	—	—	—
— var. *major* (n.)	—	—	—	*r*	*r*	—
Navicula cymbula Donk	—	—	—	*r*	*r*	—
Navicula dicephala Ehr	*s*	*s*	*a*	—	*s*	—
— var. *subcapitata* Grun	—	—	*s*	—	—	—
Navicula divergens W. Sm	*r*	—	—	—	—	—
— var. *cuneata* Grun	—	*r*	—	—	—	—
— var. *elliptica* Grun	—	—	*r*	*s*	*s*	—
— var. *minor* Temp. et Per	*r*	—	*s*	—	*s*	—
— var. *parallela* Brun	*r*	*r*	*s*	—	—	—
Navicula Doello-Juradoi n	*s*	—	—	—	*s*	—
Navicula elliptica Kütz	*r*	—	—	*s*	—	—
Navicula esox Ehr	*f*	—	*s*	*s*	*f*	—
Navicula expeditionis n	*s*	—	—	—	—	—
Navicula fasciata Lag	—	—	—	—	—	—
— var. *fontinalis* Grun	*r*	—	—	—	*s*	—
— var. *gigantea* M. Per	*s*	—	—	—	—	—
Navicula fuegiana n	*r*	*s*	—	*s*	*s*	—
— var. *rostrata* n	—	—	—	—	*s*	—
Navicula gracilis Ehr	*f*	—	—	—	—	—
Navicula gregaria Donk	—	*s*	—	*r*	—	—
Navicula interrupta W. Sm	*r*	—	—	*r*	—	—
Navicula iridis Ehr	—	—	—	*r*	—	—
— var. *amphigomphus* (Ehr.) H. V. H	—	—	—	*s*	—	—
— var. *dubia* (A. Schm.)	—	*r*	—	*r*	*r*	—
— var. *firma* (Kütz.) H. V. H	—	—	—	—	*r*	—
Navicula isostauron (Ehr. Kütz	*r*	*r*	*r*	—	—	—
Navicula lata Bréb	*r*	—	—	—	*s*	—
— var. *curta* Grun	—	—	—	—	*r*	—
— var. *latestriata* (Greg.) Cleve	—	—	—	—	*r*	—
— var. *minor* Grun	—	—	*r*	—	—	—
Navicula latevittata Cleve	—	*r*	—	*r*	—	—
— var. *spathulata* n	*r*	—	—	*r*	—	—
Navicula linearis O. Müll	—	—	*r*	—	—	—
Navicula magellanica Cleve	*r*	*r*	—	*f*	—	—
— var. *Candelariae* n	—	—	—	—	*s*	—
Navicula major Kütz	—	*f*	—	—	—	—
— var. *linearis* Cleve	—	*s*	—	—	—	—
— var. *subacuta* (Ehr.) Cleve	—	—	*r*	—	—	—
— var. *transversa* (A. Schm.) Cleve	*s*	—	—	—	—	*r*
Navicula microstauron (Ehr.) O'Meara	*f*	*s*	*f*	*s*	*f*	*s*
Navicula minutissima (Cleve)	—	—	—	*f*	—	—

Especies y variedades	234	236	237	238	239	241
Navicula mutica Kütz	—	—	—	—	—	—
— var. *Cohnii* (Hilse) Grun	r	—	r	—	—	—
— var. *Goeppertiana* (Bleisch) Grun	—	—	—	—	r	—
— var. *ventricosa* (Kütz.) Grun	—	—	r	—	—	—
Navicula muticopsis H. V. H	—	—	—	—	—	—
— var. *lanceolata* n	—	—	r	—	—	—
— var. *linearis* n	r	—	—	—	—	—
Navicula patagonica Cleve	—	—	—	—	—	—
— var. *Schmidtii* (n.)	—	—	—	—	r	—
Navicula Peragalli (n.)	—	—	—	—	—	—
— var. *gracilis* n	—	—	—	—	r	—
Navicula peregrina (Ehr.) Kütz	s	s	—	s	s	—
— var. *perlonga* n	r	—	—	—	—	—
Navicula placentula Ehr	—	—	—	r	—	—
— var. *lanceolata* Grun	—	—	—	—	c	—
Navicula porto-monttana Cleve	—	—	—	s	r	—
— var. *fuegiana* n	—	—	—	r	—	—
Navicula pupula Kütz	r	—	—	s	—	—
— var. *bacillarioides* Grun	—	—	—	r	—	—
— var. *linearis* M. Per	—	—	—	r	s	—
Navicula pusilla W. Sm	—	—	—	—	—	—
— var. *spetsbergensis* Grun	r	s	—	—	—	—
Navicula pygmaea Kütz	f	—	—	—	—	—
Navicula radiosa Kütz	r	—	—	—	—	—
— var. *acuta* (W. Sm.) Grun	r	—	—	f	s	—
Navicula rhynchocephala Kütz	—	—	—	—	—	a
Navicula sculpta Ehr	—	—	—	r	—	—
Navicula silicula Ehr	—	—	s	—	—	—
— var. *parva* n	—	—	—	—	s	—
— var. *patagonica* O. Müll	—	—	—	—	s	—
— var. *semicruciata* n	—	—	—	—	s	—
— var. *ventricosa* (Ehr.) Cleve	—	—	s	—	s	—
Navicula Smithii Bréb	—	—	—	—	—	—
— var. *argentina* n	r	—	—	—	s	—
Navicula stauroptera (Rabh.) Grun	—	—	—	—	—	—
— var. *interrupta* Cleve	—	—	—	—	—	f
Navicula streptoraphe Cleve	—	s	—	—	—	—
— var. *gibbosa* A. Cl	—	f	—	s	s	—
Navicula subcapitata Greg	—	—	—	—	—	—
— var. *hybrida* (Grun.)	s	r	a	—	r	—
Navicula viridis Kütz	f	f	f	r	s	—
— var. *commutata* (A. Schm.) Cleve	r	—	—	—	—	—
— var. *distinguenda* Cleve	s	—	—	—	—	—

Especies y variedades	234	236	237	238	239	241
Navicula viridis var. *lata* (n.)	*s*	*f*	*s*	*r*	*s*	*r*
Navicula viridula Kütz	—	—	—	—	*f*	—
Navicula vulpina Kütz	—	—	—	—	*f*	—
Nitzschia amphioxys (Ehr.) Grun	*s*	*s*	*s*	*s*	—	—
— var. *arverna* M. Per	—	—	—	*r*	—	—
— var. *capitellata* Grun	*s*	*r*	*r*	*s*	—	—
— var. *hyperborea* Grun	—	—	—	*r*	*r*	—
— var. *minor* Per	*r*	—	—	—	—	—
Nitzschia amphibia Grun	*r*	—	—	*r*	*r*	—
— var. *acutiuscula* Grun	*s*	—	—	—	—	—
Nitzschia brevissima Grun	—	*r*	—	—	—	—
Nitzschia debilis (Arnott) Grun	*f*	—	—	—	—	—
Nitzschia denticula Grun	—	—	—	—	*r*	—
Nitzschia elongata Hantz	*s*	*r*	*s*	*r*	*r*	—
— var. *linearis* O. Müll	—	*r*	—	—	*r*	—
Nitzschia linearis (Ag.) W. Sm	—	—	—	—	—	*r*
Nitzschia palea (Kütz.) W. Sm	*r*	—	—	—	—	*s*
Nitzschia sigma W. Sm	—	—	—	—	*r*	—
— var. *rigidula* Grun	*s*	—	—	—	—	—
Nitzschia subtilis Grun	—	—	—	—	—	—
— *paleacea* Grun	—	*s*	—	—	—	*s*
— *acicularis* n	—	—	—	—	—	*a*
Nitzschia vitrea Norm	*s*	—	—	—	—	—
Pleurosigma acuminatum (Kütz.) Grun	—	—	—	*f*	*f*	—
Stauroneis acuta W. Sm	—	—	*r*	—	—	—
Stauroneis anceps Ehr	—	—	—	—	—	—
— var. *amphicephala* (Kütz.) H. V. H	—	—	—	—	*s*	—
— var. *abnormis* n	—	—	*s*	—	—	—
— var. *hyalina* Brun et Per	—	—	*s*	*r*	—	—
Stauroneis Bondetii (M. Per.)	—	—	*f*	—	—	—
Stauroneis phoenicenteron (Nitzsch) Ehr	*r*	*s*	—	*s*	*s*	*r*
— var. *amphilepta* (Ehr.) Cleve	—	*r*	*s*	—	—	—
— var. *maxima* Temp. et Per	*s*	*f*	—	—	*f*	*f*
Stauroneis quadrata Hérib	—	—	—	*r*	*r*	—
Surirella apiculata W. Sm	—	—	—	—	—	—
— var. *panduriformis* n	*r*	—	—	—	—	—
Surirella biseriata Bréb	*r*	—	—	*r*	*r*	—
Surirella guatemalensis Ehr	—	—	—	*r*	—	—
Surirella minuta Bréb	—	—	—	—	*s*	—
— var. *pinnata* (W. Sm.) Grum	*r*	—	—	*r*	—	—
Surirella tuberosa O. Müll	—	—	*f*	—	—	—
— f.ª *elongata* n	*r*	—	*r*	—	—	—
Synedra acus Kütz	—	—	—	—	—	—

Especies y variedades	234	236	237	238	239	241
Synedra acus var. *angustissima* Grun	—	—	—	*s*	*s*	—
Synedra pulchella Kütz	*f*	—	—	—	—	—
— f[a] *major* Grun	*a*	—	—	—	—	—
— var. *Grunowii* (n.)	—	—	—	—	*f*	—
— *lanceolata* O'Meara	*r*	—	—	—	*r*	—
Synedra ulna (Nitzsch) Ehr	—	—	—	—	—	—
— var. *danica* (Kütz.) H. V. H	*r*	*s*	—	—	*r*	—
Vanheurckia interposita (Lewis) De Toni	—	—	—	—	—	
— var. *incoperta* (Lewis) Cleve	—	—	—	—	*e*	—
Vanheurckia vulgaris (Thw.) Cleve	*r*	*f*	—	*s*	*r*	—
Totales parciales	96	46	47	90	108	23

Total general : 218

Sobre un total de 218 formas tenemos un máximum de 108 para el río Candelaria (serie 239) y un mínimum de 23 para el río Tres Puentes (serie 241); pero la escasez de formas en esta última serie puede estar en relación con la exigüidad del material puesto a mi disposición, tanto más que también para chorrillo Uaquen tenemos un número de formas elevado (96), especialmente si se considera en relación con el número de formas que se observan en los materiales provenientes de lagunas y pantanos (series 236, 237, 238) de la misma localidad y recogidos en la misma fecha (marzo de 1921).

Las 218 formas están distribuídas en 20 géneros, así repartidos:

Achnanthes (2 especies y 3 variedades)	5
Amphora (4 especies y 1 variedad)	5
Cocconeis (1 especie y 1 variedad)	2
Cymatopleura (1 especie)	1
Cymbella (9 especies y 4 variedades)	13
Diatoma (2 especies y 1 variedad)	3
Encyonema (1 especie)	1
Epithemia (2 especies y 5 variedades)	7
Eunotia (4 variedades de una misma especie)	4
Fragilaria (4 especies y 13 variedades)	17
Gomphonema (5 especies y 5 variedades)	10
Melosira (3 variedades de tres especies distintas)	3
Meridion (1 variedad)	1
Navicula (45 especies y 57 variedades)	102
Nitzschia (10 especies y 9 variedades)	19

Pleurosigma (1 especie)	1
Stauroneis (4 especies y 5 variedades)	9
Surirella (4 especies y 3 variedades)	7
Synedra (2 especies y 4 variedades)	6
Vanheurckia (1 especie y 1 variedad de otra especie)	2

En la lista de los géneros hallados, faltan en absoluto algunos muy frecuentes en aguas dulces de otras regiones: *Amphiprora, Campylodiscus, Cyclotella, Denticula, Mastogloia.* Entre éstos *Amphiprora, Campylodiscus* y *Cyclotella* no fueron hallados tampoco por los numerosos autores que me precedieron en el estudio de las diatomeas de aguas dulces de la región y, por lo tanto, es de presumir que falten o sean excesivamente raros en la región magallánica. Lo mismo debe decirse para el género *Mastogloia,* del cual Cleve solamente ha señalado una sola especie *(Mastogloia imperfecta* Cleve, *Magellan,* pág. 278) rara en la isla Desolación y dudosa *(almost rudimentary loculiferous rim).* En cambio, el género *Denticula* fué hallado por O. Müller *(Süd Patagonien,* pág. 3) con relativa frecuencia y representado por 4 especies *(D. elegans* Kütz., *D. thermalis* Kütz., *D. frigida* Kütz. y *D. subtilis* Grum.) en charcos y ríos de la Patagonia austral.

Entre los géneros señalados, *Encyonema, Eunotia, Melosira* y *Meridion,* son muy escasos en número de especies y de individuos; también son escasos *Cocconeis, Cymatopleura* y *Van Heurckia. Gomphonema,* a pesar de estar representado por un número relativamente alto de formas, es pobre en individuos; al contrario, *Pleurosigma,* representado por una sola especie, interviene con relativa frecuencia en las series 238 y 239. *Achnanthes, Amphora, Diatoma, Epithemia, Nitzschia* y *Surirella* son, también, representados por un escaso número de individuos, pero repartidos en un número relativamente elevado de especies y variedades. Lo mismo puede decirse de *Synedra,* exceptuando *S. pulchella* y vars. que abundan en las series 234 y 239. *Cymbella* es relativamente rico en formas y en individuos, exceptuando las series 234 y 236. *Navicula,* como de ordinario, es el género más rico en especies y variedades, distribuídas en numerosos subgéneros; pero, excepto para algunas formas, está representado por un número reducido de individuos. Al contrario, *Fragilaria,* con sólo 4 especies, es el género cuyos individuos son más ampliamente representados, llegando a predominar en las series 234 y 238.

Las 218 formas halladas por mí, en su mayoría son típicas para cauces o cuencas de aguas dulces, mezclándose con un pequeño porcentaje de especies y variedades que viven indiferentemente en

aguas dulces o levemente salobres. Este porcentaje varía desde el 10 hasta el 13 por ciento en las series 236 (lagunas del río del Fuego), 237 (lagunas del río Grande), 238 (lagunas La Despedida) y 239 (río Candelario); alcanza un 20 y 22 por ciento en las series 234 (chorrillo Uaquen) y 241 (río Tres Puentes), respectivamente.

Pero entre las anteriores se halla también un reducido número de formas consideradas exclusivas para *habitat* de aguas salobres. Éstas son:

Amphora coffeaeformis.
Amphora acutiuscula.
Navicula peregrina.
Navicula placentula var. *lanceolata.*
Navicula Smithii.
Nitzschia sigma.
Nitzschia vitrea.
Vanheurckia interposita var. *incoperta.*

Entre éstas, *Navicula peregrina* y *Nitzschia sigma* (1) parecen vivir normalmente en aguas continentales argentinas, puesto que fueron señaladas al estado viviente por Cleve *(Determinac.)* y por mí *(Contrib.*, I) en numerosas localidades de las provincias de Córdoba, La Rioja y Buenos Aires; *Navicula Smithii* está representada por una variedad nueva y bien caracterizada, probable forma de adaptación; *Nivicula placentula* var. *lanceolata* y *Vanheurckia interposita* var. *incoperta,* son excepcionales y tal vez accidentales en la serie 239, esto es, en un afluente del río Grande ya bastante alejado de su desembocadura y de las consiguientes influencias de la marea; finalmente, *Amphora coffeaeformis, A. acutiuscula* y *Nitzschia vitrea,* si bien raras o escasas, las hallamos reunidas en la serie 234, procedente de chorrillo Uaquen en proximidad de la costa marina.

De todos modos, tanto en chorrillo Uaquen, donde, agregando estas últimas especies, el porcentaje de formas salobres (exclusivas o no) alcanza el máximum de 24 por ciento, como en los demás ríos y lagunas, a pesar de su situación cerca de la costa del mar, las aguas se conservan dulces y en ellas viven *Limnaea, Chilina* y *Sphaeriidae.*

Al considerar la distribución geográfica de las 218 formas encon-

(1) Podemos agregar también *Amphora coffeaeformis* Ag. (= *A. lineata* Greg.) que O. Müller *(Süd-Patagonien,* pág. 27) halló en charcos y aguas corrientes dulces de Patagonia austral.

tradas, vemos que 123, por su amplia distribución, pueden considerarse cosmopolitas. Las demás deben distinguirse como sigue:

Veintisiete nuevas (5 especies y 22 variedades) no incluyendo aquellas cuya nueva denominación responde sólo a la insuficiencia de determinaciones anteriores (éstas son: *Fragilaria construens* var. *minor, F. pinnota* var. *tetragona, Navicula cuspidata* var. *major, N. patagonica* var. *Schimidtii, N. viridis* var. *lata, Synedra pulchella* var. *Grunowii);*

Quince de distribución geográfica imperfectamente conocida: *Fragilaria virescens* var. *exigua, Navicula affinis* var. *undulata, N. appendiculata* var. *irrorata, N. cincta* var. *cari, N. cuspidata* var. *major, N. patagonica* var. *Schimidthii, N. placentula* var. *lanceolata, N. subcapitata* var. *hybrida, N. viridis* var. *lata, Nitzschia amphioxys* var. *capitellata* y var. *minor, Stauroneis anceps* var. *hyalina, St. phoenicenteron* f^a^ *maxima, St. quadrata, Synedra pulchella* var. *Grunowii;*

Seis (variedades) hasta ahora señaladas únicamente al estado fósil: una en el Canadá *(Navicula cuspidata* var. *gracilis)*, dos en Hungría *(Gymbella gastroides* var. *gigantea, Navicula dicephala* var. *subcapitata)*, y tres en los depósitos franceses de Auvergne *(Navicula borealis* var. *linearis, N. fasciata* var. *gigantea, Nitzschia amphioxys* var. *arverna);*

Ocho hasta ahora exclusivas de los continentes americanos: *Cymbella americana, Navicula pupula* var. *linearis* y *Vanheurckia interposita* var. *incoperta* en Estados Unidos, *Navicula divergens* var. *cuneata* en el río Demerara (Guayana), *N. latevittata* en Estados Unidos, Chile y Ecuador, *N. major* var. *subacuta* en Nueva Escocia, Guayana y Brasil, *N. pupula* var. *bacillarioides* en Estados Unidos y Méjico (fósil), *Surirella guatamalensis* en Estados Unidos, Guatemala, Chile, Ecuador y Argentina;

Diez hasta ahora exclusivas de la región magallánica, incluyendo una (entre paréntesis) propia de la región chilena austral (Puerto Montt): *Cymbella Nordenskioldii, Eunotia praerupta* var. *tridentata, Melosira lineolota* var. *patagonica, (Navicula iridis* var. *dubia), Navicula linearis, N. magellanica, N. portomonttana, N. silicula* var. *patagonica, Nitzschia elongata* var. *linearis, Surirella tuberosa;*

Ventinueve características de regiones alpinas, templadas, frías y polares (árticas y antárticas): *Amphora coffeaeformis* var. *borealis, A. acutiuscula, Cymbella Ehrenbergii* var. *delecta, C. naviculiformis, Fragilaria pinnata* var. *lapponica, Eunotia praerupta* var. *laticeps, Melosira distans* var. *alpigena, Navicula affinis* y var. *ampliata, N. appendiculata, N. bisulcata, N. Charcotii, N. cuspidata* var. *danaica,*

N. esox, N. gracilis, N. isostauron, N. lata y vars. *curta, latestriata, minor, N. minutissima, N. pusilla* var. *spetsbergensis, N. streptoraphe* y var. *gibbosa, N. viridis* var. *distinguenda, N. vulpina, Nitzschia amphioxys* var. *hyperborea, N. elongata, Stauroneis Boudetii.*

Estas últimas formas, junto con las propias y con algunas variedades nuevas de especies también características de países fríos (*Navicula Charcotii* var. *magellanica, N. magellanica* var. *Candelariae, N. muticopsis* var. *fuegiana, Surirella tuberosa* f^a^ *elongata),* forman un conjunto (45 formas) que, en relación con las condiciones climatéricas de Tierra del Fuego, caracterizan la flórula estudiada como propia de regiones frías.

Comparando nuestra lista con aquellas de nuestros predecesores, vemos que la flórula diatómica de aguas dulces de la región magallánica se enriquece de 109 formas nuevas. En efecto, de 218 formas determinadas sólo 113 se hallan en la lista general de Peragallo. Ésta, si bien comporta 343 formas, eliminando las de la isla Kerguelen y modificando algunos detalles inexactos, queda reducida a 333 formas y, tendremos por consiguiente, una lista total de 438 formas, entre especies y variedades.

Más sensibles son los resultados adquiridos, si comparamos la lista dada por Cleve para las diatomeas de la misma región (río Grande). Las formas de agua dulce o que viven indiferentemente en aguas dulces o levemente salobres, determinadas por este autor (Cleve, *Magellan,* págs. 274 a 276) son las siguientes:

Amphora pediculus Kütz.
Cymbella aspera Ehr. (= *C. gastroides* Kütz.).
Frustulia rhomboides Ehr. (= *Vanheurkia rhomboides* Bréb.).
* *Hantzschia elongata* Grun. (= *Nitzschia elongata* Hantz.).
* *Melosira* sp. Cleve (= *M. lineolata* var. *patagonica* O. Müll.).
* *Navicula anglica* var. *subsalsa* Grun.
* *Navicula avenacea* Bréb.
* *Navicula cincta* Ehr.
* *Navicula gregaria* Donk.
* *Navicula pygmaea* Kütz.
* *Neidium (oblique striatum* var.) *magellanicum* Cleve (= *Navicula magellanica* nob.).
Nitztschia apiculata Greg.
* *Nitzschia sigma* W. Sm.
* *Pinnularia borealis* Ehr. (= *Navicula borealis* Kütz.).

**Pinnularia (viridis* var.) *commutata* Grun. (=*Navicula viridis* var. *commutata* Cleve).

**Pinnularia (divergens* var. *elliptica* Grun. (=*Navicula divergens* var. *elliptica* Grun.).

Pinnularia gibba (Ehr.) W. Sm. (=*Navicula gibba* Kütz.).

**Pinnularia lata* Bréb. (=*Navicula lata* Bréb.).

**Pinnularia latevittata* Cleve (=*Navicula latevittata* A. Schm.).

Pinnularia (gibba var.) *luculenta* A. Schm. (=*Navicula luculenta* A. Schm.).

**Pinnularia major* Kütz. (var. *linearis* Cl.) (=*Navicula major* Kütz. var. *linearis* Cleve.

Pinnularia nodosa Ehr. (=*Navicula nodosa* Ehr.).

**Pinnularia stauroptera* Grun. (=*Nav. stauroptera* Grun.).

**Pinnularia viridis* Nitzsch. (=*Nav. viridis* Kütz.).

Rhoicosphenia curvata Kütz.

**Rhopalodea gibba* Kütz. (=*Epithemia gibba* Kütz.).

**Stauroneis phoenicenteron* var. *amphilepta* Ehr.

**Surirella guatemalinensis* Ehr. (=*S. guatemalensis* Ehr.).

Surirella splendida Ehr. var. *tenera* Greg. (=*S. tenera* Greg.).

Comprende 29 especies, de las cuales 20 (las marcadas por asterisco) contenidas también en nuestros materiales: así la flórula diatómica de los alrededores de río Grande se enriquece de 189 especies y variedades y, agregando las nueve especies más de Cleve, alcanza a 227 formas.

Además de las anteriores formas de aguas dulces o levemente salobres, nuestros materiales tienen un corto número de diatomeas marinas distribuídas irregularmente y, por lo común, representadas por individuos raros y fragmentarios. En el cuadro siguiente consigno la distribución de las especies determinadas:

Especies y variedades	234	236	237	238	239	241
Actinoptychus undulatus (Ehr.) Ralfs.....	—	—	—	—	*e*	—
Cocconeis distans A. Schm.....	—	—	—	—	—	—
— var. *minima* H. Per.....	—	—	—	*e*	—	—
Cocconeis scutellum Ehr var.....	*e*	—	—	—	—	—
Coscinodiscus excentricus Ehr.....	—	—	—	—	*e*	—
Coscinodiscus minor Ehr.....	—	—	—	—	*e*	—
Coscinodiscus radiatus Ehr.....	—	*e*	—	—	—	—
Melosira sulcata (Kütz.) Ehr.....	*r*	—	—	*e*	*s*	—
— var. *crenulata* Grun.....	—	—	—	—	*e*	—
Nitzschia constricta Ralfs.....	—	—	—	—	—	—
— var. *similis* Grun.....	—	—	—	—	—	*e*
Nitzschia panduriformis Greg.....	—	—	—	—	—	—
— var. *parva* n.....	*e*	—	—	—	*e*	—
Pleurosigma strigosum W. Sm.....	*r*	—	—	—	—	—
Pleurosigma Wansbeckii Donk.....	*r*	—	—	—	—	—
Rhaphoneis amphiceros Ehr.....	—	—	—	—	—	—
— var. *rhombica* Grun.....	—	—	—	—	*e*	—
Surirella striatula Turp.....	*e*	—	—	—	—	—

Señalaré, además, fragmentos de *Biddulphia, Coscinodiscus* y *Triceratium* que, por su estado, he considerado prudente no determinar.

Las especies indicadas, generalmente raras o excepcionales, se hallan, en su mayoría, reunidas en los materiales de chorrillo Uaquen donde también hallamos el porcentaje más elevado de formas salobres y su presencia puede estar en relación con su proximidad a las costas marinas. En las demás series, inclusive la 239 donde también son relativamente numerosas, pero que procede de una localidad (río Candelaria) seguramente alejada de las influencias de marea, estas especies marinas, por sus condiciones, deben considerarse accidentales, traídas, probablemente, por corrientes aëreas o adheridas a las patas y a las plumas de las aves de costumbres acuáticas.

II

MATERIALES SUBMARINOS

Los materiales de esta categoría puestos a mi disposición, se reducen a una sola muestra de fango de fondo, dragado en la bahía San Sebastián, en proximidad de punta Médanos, a siete brazas de pro-

fundidad. Es un limo gris verdusco, tenue, arenoso y arcilloso, ferrífero y calcarífero, conteniendo numerosos fragmentos de *Mactra fuegiensis* Sm. y un trocito de colonia de briozoarios, probablemente una *Tubucellaria*.

Forma la serie 235 de mi colección, y visto al microscopio, después de las manipulaciones de costumbre (con las cuales no se logró eliminar completamente sus finísimas partículas de cuarzo), contiene numerosas espículas silíceas *(amphioxa* y *tylostyla)* y escasas diatomeas, pertenecientes a un número muy limitado de formas, entre las cuales predomina en absoluto *Melosira (Paralia) sulcata*.

Las formas examinadas son las siguientes:

Especies y variedades	235
Actinoptichus undulatus (Ehr.) Ralfs	*f*
Coscinodiscus excentricus Ehr	*r*
Coscinodiscus radiatus Ehr	*r*
Hyalodiscus radiatus (O'Meara) Grun	*r*
Melosira sulcata (Kütz.) Ehr	*p*
— var. *biseriata* Grun	*s*
— var. *crenulata* Grun	*s*
Nitzschia panduriformis Greg	—
— var. *parva* n	*r*
Raphoneis amphiceros Ehr	—
— var. *rhombica* Grun	*r*
Surirella striatula Turp	*r*
Surirella tuberosa O. Müll	—
— var. *costata* n	*r*
Triceratium scitulum Brightw	*r*

Exceptuando las dos variedades nuevas y *Melosira sulcata* var. *crenulata*, propia de las regiones boreales (Tierra Francisco José y Siberia), todas las demás formas son cosmopolitas y ya señaladas por Cleve *(Magellan*, págs. 273 y 274) en el estuario de río Grande.

III

MATERIALES FÓSILES

El profesor Doello-Jurado tuvo la amabilidad de poner a mi disposición seis muestras de sedimentos procedentes de la región ex-

plorada; pero en ninguno de ellos me fué posible hallar restos de diatomeas. Las muestras examinadas son las siguientes:

1ª Formación magallánica, barranca de Carmen Sylva (bahía San Sebastián), hacia un tercio de la altura; fósil típico *Mactra n. sp.* M. D. J.: arenisca arcillosa poco coherente, verde grisáceo obscuro; al microscopio el residuo del tratamiento se compone de partículas de cuarzo, feldespatos, piroxenos verdes, anfibol, etc., y contiene numerosas esferulitas silíceas, hyalinas, muy refringentes, de 0,12 a 0,015 milímetros de diámetro, huecas, con paredes delgadas, superficie lisa o erizada de espinas muy finas, cortas y visibles con dificultad, y provistas de un único poro puntiforme;

2ª Formación magallánica, barranca Carmen Sylva (bahía San Sebastián) base con *Turritella ambulacrum* var. *Sylva* Iher. (M. D. J.): arenisca con los mismos caracteres y contenido de la anterior;

3ª Formación magallánica, barranca Carmen Sylva (Bahía San Sebastián) base con *Phacoides* cf. *neglecta* Ortm. (M. D. J.): arenisca gris verdusca, idéntica a la anterior, pero sin vestigios de corpúsculos de sílice organizada;

4ª Formación magallánica, río de Las Minas (Punta Arenas), capa con *Solemya* n. sp. M. D. J.: arenisca igual al anterior, sin restos de sílice organizada;

5ª Formación magállica, cerro de La Leña (río Grande), conglomerado con diversos fósiles: fragmento de conglomerado poligénico, de pequeños elementos en prevalencia silíceos y de cemento calcáreo-arenoso compacto y tenaz, grisáceo: al microscopio el residuo contiene sólo fragmentos de espículas monaxónicas de esponjas;

6ª Conglomerado glacial (o post-glacial):

Punta Sinaia, cerca de San Sebastián (Tierra del Fuego): muestra de fango morrénico pardusco, tenue, calcarífero, con numerosas gravas de rocas diversas: el residuo del tratamiento se compone, en su mayor parte, de partículas finísimas de cuarzo, sin contener restos de sílice organizada.

Creo útil recordar que, a pesar del resultado negativo de mis investigaciones, algunos sedimentos magallánicos han resultado diatomíferos.

O. Nordenskjöld, en *Cullen River*, coleccionó muestras de «clay which was met between tertiary strata, containing lignite and impression of leafs of *Fagus*, and unstratified *(glacial)* boulderclay» que dieron a Cleve *(Magellan*, págs. 279 a a 281) las diatomeas siguientes:

A. *Formas marinas*

* *Actinoptychus undulatus* Ehr.
* *Actinoptychus vulgaris* Schum.
Arachnoidiscus Eherenbergii Bail.
* *Biddulphhia rhombus* Ehr.
Endictya minor A. Schm.
* *Grammatophora marina* Lyngb.
* *Gyrosigma Wansbeckii* Donk. (= *Pleurosigma Wansbeckii*).
* *Hyalodiscus scoticus* Kütz.
Navicula (?) caniculata Cleve (n. sp.).
Navicula magellanica Cleve (n. sp.).
* *Navicula tumida* Bréb. (= *Scoliopleura tumida* Rabh.).
* *Nitzschia panduriformis* Greg.
Nitzschia scoliotropis Cleve (n. sp.).
* *Nitzschia sigma* Kütz.
* *Paralia sulcata* Ehr. (= *Melosira sulcata* Ehr.).
* *Pyscidicula cruciata* Ehr.
* *Rhabdomena arcuatum* Lyngb.
* *Raphoneis amphiceros* Kütz.
* *Trachyneis aspera* Ehr. (= *Navicula aspera* Ehr.).
* *Triceratium affine* Grun. (*Tr. scitulum* Brightw.).

B. *Formas de agua dulce*

* *Epithemia turgida* Kütz.
* *Epithemia zebra* Kütz.
Eunotia decussata Cleve (n. sp.).
* *Eunotia praerupta* f^a^ *compacta* Grun.
* *Frustulia rhomboides* Ehr. (= *Vanheurkia rhomboides* Bréb.).
* *Mastogloia imperfecta* Cleve.
Melosira Roeseana var. *dendroteres* Ehr.
* *Neidium magellanicum* Cleve (= *Naricula magellanica* nob.).
Orthosira sculpta Ehr. (= *Melosira sculpta* Kütz.).
* *Pinnularia borealis* Ehr. (= *Navicula borealis* Kütz.).
* *P. (viridis* var.) *commutata* Grun. (= *Nav. viridis* var. *commutata* Cl.).
* *P. dactylus* Ehr. (= *Navicula dactylus* Kütz.).
* *P. divergens* W. Sm. (= *Navicula divergens* W. Sm.).

**P. lata* Bréb. (=*Navicula lata* Bréb.).
P. subundulata Cleve (n. sp.).
Amphipleura sp. Cleve (n. sp.).

Exceptuando las especies, que Cleve describió como nuevas, la lista anterior comprende todas formas vivientes y casi todas (las indicadas con asterisco) vivientes en la localidad o en la región magallánica.

Pero esta lista es demasiado pobre para que pueda intervenir como factor de importancia en la controvertida cuestión de la edad de la « formación magallánica ».

ANÁLISIS DE LAS ESPECIES

1. **Amphora libyca** Ehr.

Amphora lybica, Ehrenberg, *Mb. Berl. Ak. 1840*, pág. 205.
Amphora ovalis var. *libyca*, O. Müller, *Süd-Patagonien*, pág. 27, pl. I, fig. 22.
Amphora libyca, Frenguelli, *Contrib.*, I, pág. 31, pl. 1, figs. 1 a 3.

En todos los materiales examinados, excepto en la serie 235. Generalmente escasa, pero en ejemplares típicos. Valva: largo 0,036 (1) a 0,052 mm.; ancho 0,009 a 0,012 mm.

Especie de aguas dulces y salobres; cosmopolita. Ya señalada en la región magallánica por Ehrenberg (islas Malvinas y cabo de Hornos) y por O. Müller (charco cerca de Tweedy en Patagonia austral).

2. **Amphora ovalis** Kütz. (pl. I, fig. 7)

Frustulia ovalis, Kützing, *Synopsis*, pág. 11, pl. 1, fig. 5.
Frustulia copulata, Kützing, *Synopsis*, pág. 13, pl. 1, fig. 6.
Navicula amphora, Ehremberg, *Erkenntnis*, pág. 80.
Ehrenberg, *Infusion*, pág. 188, pl. 14, fig. 3.
Cymbella ovalis, Brébisson, *Falaise*, pág. 56, pl. 7.
Amphora libyca, Ehrenberg, *Mikrogeol.*, pl. 5, 3, fig. 24?, pl. 6, 1, fig. 39 *a-b*, pl. 13, 1, fig. 20, pl. 13, 2, fig. 18, pl. 37, 1, fig. 1.
Amphora ovalis, Kützing, *Bacillarien*, pág. 107, pl. 5, figs. 35-39.
Rabenhorst, *Süssw. Diat.*, pág. 31, pl. 9, fig. 1.
Kützing, *Species Algarum*, pág. 93.
Rabenhorst, *Flora Europ.*, pág. 91.

(1) Como en mi primera contribución, la unidad de medida adoptada es el milímetro.

Amphora ovalis, W. Smith, *Synopsis*, I, pág. 19, pl. 2, fig. 26.
Ralfs, in Pritchard, *Infusoria*, pág. 883, pl. 7, figs. 5-6, pl. 9, fig. 153.
Weisse, *Hapsal*, pl. 1, fig. 21.
A. Schmitd, *Atlas*, pl. 26, figs. 106 a 111.
Pfitzer, *Bacillar*, pág. 82, pl. 4, fig. 9.
Borskow, *Süss. Bac.*, pl. 1, fig. 19.
Brun, *Alpes*, pág. 53, pl. 1, fig. 6.
Van Heurck, *Synopsis*, pág. 59, pl. 1, fig. 1.
Belloc, *Pyrénées*, pl. 3, fig. 9.
Pelletan, *Diat.*, I, pág. 230, fig. 128.
Wolle, *Diat. North-Americ.*, pl. 4, figs. 29-32.
De Toni, *Sylloge*, pág. 411.
Cleve, *Synopsis*, II, pág. 104.
Van Heurck, *Traité*, pág. 127, pl. 1, fig. 15.
Schütt, *Bacillar.*, pág. 45, fig. 56 (4-6).

Raros ejemplares, típicos, en las preparaciones números 238 y 239. Valva: largo 0,028 a 0,066 mm.; ancho 0,008 a 0,012 mm.

Especie cosmopolita, de agua dulce, ya señalada en la Argentina por Cleve, en La Rioja (Cleve, *Determinac.*, pág. 191); nueva para la región magallánica.

3. **Amphora (Halamphora) coffeaeformis** (Ag.) Kütz., pl. I, figs. 3-4

Frustulia coffeaeformis, Agardh, in Regensb., *Flora 1827 II*, pág. 627 (*teste* Kützing).
Agardh, *Ic. Alg. Europ.*, pl. 2 (*teste* Kützing).
Kützing, *Synopsis*, pág. 12.
Amphora coffeaeformis, Kützing, *Baciltarien*, pág. 108, pl. 5, fig. 37.
Kützing, *Species Algarum*, pág. 94.
Rabenhorst, *Flora Europ.*, pág. 89.
Rabenhorst, *Südw. Diat.*, pág. 31, pl. 9, figs. 5-6.
Ralfs, in Pritchard, *Infusoria*, pág. 882.
A. Schmidt, *Atlas*, pl. 26, figs. 56 a 58.
Cleve, *Vega*, pág. 461.
Wolle, *Diat. North-Amer.*, pl. 4, figs, 11, 19, 20, pl. 9, fig. 1.
De Toni, *Sylloge*, pág. 889.
Van Heurck, *Traité*, pág. 134, pl. 24, fig. 681.
Cleve, *Synopsis*, II, pág. 120.
Amphora aponina, Kützing, *Bacillarien*, pág. 108, pl. 4, figs, 1-5, pl. 5, fig. 33.
Kützing, *Species Algarum*, pág. 94.
Neupauer, *Asatag. Diat.*, pl. 1, fig. 29.
Amphora aponina, Rabenhorst, *Süd Diat.*, pág. 31, pl. 9, fig. 8.
Rabenhorst, *Flora Europ.*, pág. 89.
Ralfs, in Pritchard, *Infusoria*, pág. 882.

Amphora lineata, Gregory, *Glenshira*, II, pág. 71, pl. 1, fig. 33.
Gregory, *Diat. Clyde*, pág. 40, pl. 4, fig. 70.
Ralfs, in Pritchard, *Infusoria*, pág. 882.
A. Schmitd, *Atlas*, pl. 26, figs. 59, 82 a 86, pl. 27, fig. 15.
Cleve, *Vega*, pág. 461.
Grunow, *Kaspisch Meere*, pl. 3, fig. 5.
Wolle, *Diat. Nort-Amer.*, pl. 9, figs. 15-17.
De Toni, *Sylloge*, pág. 401.
Amphora Neupaueri, Pantocsek, *Ungarn.*, II, pág. 38, pl. 1, fig. 7.
De Toni, *Syllege*, pág. 401.

Atribuyo a esta especie escasos ejemplares, en la serie 234, que corresponden a la descripción de Cleve (*Synopsis*, II, pág. 120) y que se caracterizan especialmente por un «somewhat concave ventral margin». Estrías dorsales 20 en 0,01 mm.; valva: largo 0,050 a 0,057 mm.; ancho 0,009 mm.

Especie cosmopolita; en aguas salobres. Nueva para la región magallánica.

var. **borealis** (Kütz.) Cleve (pl. I, figs. 5-6)

Amphora borealis, Kützing, *Bacillarien*, pág. 108, pl. 3, fig. 18.
Kützing, *Species Algarum*, pág. 95.
Rabenhorst, *Süssw. Diat.*, pág. 31, pl. 9, fig. 12.
Ralfs, in Pritchard, *Infusoria*, pág. 844.
Schumann, *Preuss. Diat.*, II, pl. 2, fig. 31.
Amphora salina var. *minor*, Van Heurck, *Synopsis*, pág. 57, pl. 1, fig. 20.
De Toni, *Sylloge*, 381.
Van Heurck, *Traité*, 134, pl. 1, fig. 7.
Amphora coffeaeformis, var. *borealis*, Cleve, *Synopsis*, pág. 121.

Esta váriedad, también escasa en la serie 234, difiere del tipo por su tamaño menor y por los extremos valvares muy poco rastrados. Valva: largo 0,018 a 0,022 mm., ancho 0,0045 a 0,005 mm.; frústulo: ancho 0,014 mm. Estrías 21 en 0,01 mm.

Vive en agua dulce y salobre; señalada, hasta ahora, sólo en las regiones boreales de Europa (Helgoland, Blakenberghe, golfo de Bottnia). Nueva para la región magallánica, pero O. Müller (*Süd-Patagonien*, pág. 27) señala en la Patagonia austral (torrente de cerro Toro y charco en Tweedy) algunos ejemplares de *Amphora lineata* Greg. (= *A. coffeaeformis* Kütz.), que, por sus dimensiones reducidas (largo 0,027 a 0,039 mm.), probablemente corresponden a esta variedad.

4. **Amphora (Halamphora) acutiuscula** Kütz., pl. I, figs. 1-2

Amphora acutiuscula, Kützing, *Bacillarien*, pág. 128, pl. 5, fig. 32.
Kützing, *Species Algarum*, pág. 95.
Ralfs, in Pritchard, *Infusoria*, pág. 882.
Rabenhorst, *Flora Europ.*, pág. 89.
Van Heurck, *Synopsis*, pág. 59, pl. 1, fig. 13.
De Toni, *Sylloge*, pág. 385.
Van Heurck, *Traité*, pág. 134, pl. 1, fig. 5.
Cleve, *Synopsis*, II, pág. 121.
Amphora Fischerii, Neupauer, *Asatag. Diat.*, pl. 2, fig. 38.
Amphora coffeaeformis var. *salinarum*, Grunow, *Oesterr. Ungarn.*, pág. 148.
Amphora juvenalis, Pantocsek, *Ungarn.*, II, pág. 10, pl. 13, fig. 199.
Amphora striata, Pantocsek, *Ungarn.*, II, pág. 39, pl. 2, fig. 31.
De Toni, *Sylloge*, pág. 390.
Amphora striolata, Pantocsek, *Ungarn.*, II, pág. 39, pl. 2, fig. 25.
De Toni, *Sylloge*, pág. 395.

En la serie 234 existen algunos ejemplares que corresponden a esta especie por la forma de frústulo y de la valva, por las dimensiones (valva: largo 0,034 a 0,060 mm., ancho 0,006 a 0,08 mm.) y el número de las estrías (18 m. en 0,01 mm.); aunque éstas, en los ejemplares mayores, bajan a 14-17 m. en 0,01 mm., sobre el lado dorsal de la valva.

A. acutiuscula, tal vez, no representa sino una simple variedad de *A. coffeaeformis*, de la cual difiere especialmente por la forma del borde ventral, levemente convexo.

Es especie de aguas salobres y marinas, especialmente de regiones frías (Groenlandia, Spitsbergen, Finlandia, mar de Kara, mar Báltico, mar del Norte, etc.), pero ha sido señalada también en depósitos fósiles de agua dulce (Pantocsek, Tempère y Peragallo).

Nueva para la región magallánica.

5. **Cymbella americana** A. Schm. (pl. I, figs. 10-11)

Cymbella americana, A. Schmidt, *Atlas*, pl. 9, figs. 15, 20.
Wolle, *Diat. North-Amer.*, pl. 7, fig. 24.
De Toni, *Sylloge*, pág. 369.

Rara en las series 237 y 238, frecuente en la serie 239. Valva: largo 0,080 a 0,114 mm.; ancho 0,026 a 0,028 mm. Estrías, en la parte media del lado dorsal 9 en 0,01 y hasta 11-12 mm. en las extremidades.

Esta especie no ha sido suficientemente tomada en consideración por los autores porque no fué descrita ni por su fundador ni tampoco por De Toni. Wolle, quien reproduce un dibujo muy deficiente, agrega solamente «probably var. of *Ehrenbergii*». Nuestros ejemplares coinciden con las figuras de A. Schmidt y, especialmente, con los numerosos individuos que se observan en la preparación número 159 de Tempère y Peragallo *(Collection,* pág. 86), y, probablemente, deben considerarse como formas de transición entre *C. cuspidata* Kütz. y *C. Ehrenbergii* Kütz, de las cuales difiere especialmente por la forma de las extremidades valvares netamente rostradas y atenuadas. En vez, *C. cuspidata* tiene extremos rostrado-capitados y *C. Ehrenbergii* rostrado-obtusos. Además, difiere de esta última especie por el borde ventral casi recto.

Especie de agua dulce; señalada al estado viviente, sólo en países del norte de Estados Unidos (North Providence, Boxford y Georgetown en Massachussetts, Bristol en Connecticut, Orcas Islands) y fósil en California (Jones Valley).

var. **acuta** A. Schm. (pl. I, fig. 12)

Cymbella Davidsonii, Grunow in *Habirsh. Cat.,* pág. 86.
Cymbella americana var. *acuta,* A. Schmidt, *Atlas,* pl. 71, figs. 75 a 78, Petit, *Cap Horn,* pág. 114.
Cymbella acuta, Cleve, *Synopsis,* I, pág. 164.
O. Müller, *Süd-Patagonien,* pág. 23.

Rara en la serie 234, escasa en las series 236, 237, 238 y 239.

Los ejemplares examinados corresponden a la figura 78 de A. Schmidt y a la descripción de Cleve. Se diferencian del tipo exclusivamente por las extremidades valvares algo más cortas y de forma rostrada más o menos aguda. Valva: largo 0,080 a 0,095 mm.; ancho 0,021 a 0,024 mm.

Variedad de agua dulce, indicada al estado viviente en Suecia (lago Rosslängen), Siberia (desembocadura del río Jenissey) y en la Guayana inglesa (río Demerara); subfósil en Francia (lago Cazaux, Gironde).

Ha sido señalada también en la región magallánica por P. Petit, en aguas de deshielo a cabo de Hornos y por O. Müller en la Patagonia austral (arroyo de Moulet).

C. Laubyi (Héribaud, Foss., *Auvergne,* II, pág. 18, pl. 9, fig. 4) y *C. meniscus* (Hérib., *ibidem,* fig. 5) representan formas respectiva-

mente muy próximas si no idénticas con el tipo y la variedad recordada de *C. americana* A. Schm.

6. **Cymbella naviculiformis** Auersw. (pl. I, fig. 14)

Cymbella cuspidata, W. Smith, *Synopsis I*, pl. 2, fig. 22 *a'*.
Cymbella naviculiformis, Auerswald in Rabenshort, *Alg. Europ.*, nº 1065.
Kirchner, *Schlesien*, pág. 187.
Schumann, *Tatra*, pág. 63, pl. 2. fig. 69.
Wolle, *Diat. North-Amer.*, pl. 7, figs. 7, 14.
Cleve, *Synopsis*, I, pág. 166.
Cymbella anglica, Lagerstedt, *Spetsbergen*, pág. 42, pl. 2, fig. 18.
A. Schmidt, *Atlas*, pl. 9, fig. 63.
Van Heurck, *Synopsis*, pl. 2, fig. 4.
Truan, *Asturias*, pl. 1, fig. 11.
Pelletan, *Diat. I*, pág. 240, fig. 155.
Wolle, *Diat. North-Amer.*, pl. 7, figs. 33-34.
De Toni, *Sylloge*, pág. 352.
Cymbella cuspidata var. *naviculiformis*, Van Heurck, *Synopsis*, pág. 61.
De Toni, *Sylloge*, pág. 350.
Van Heurck, *Traité*, pág. 142, pl. 1, fig. 24.
Cymbella amphicephala var. *anglica*, Van Heurck, *Traité*, pág. 142, pl. 25, fig. 695.

Escasa en las series 238 y 239. Los ejemplares de nuestros materiales no se pueden considerar típicos, sino intermediarios entre la especie anterior y *C. anglica*. Pero coinciden bien con la figura de Van Heurck (en *Synopsis*, pl. 2, fig. 4) y con la descripción del mismo autor (en *Synopsis*, pág. 61); pero difieren por el tamaño de la valva (largo 0,05 a 0,06 mm.; ancho 0,01 mm., al nivel de la parte media dorsal).

Especie de agua dulce; viviente en Groenlandia, Spitsbergen, Beeren Eiland, Noruega, Suecia, Finlandia, Holstein, Harz, Jenissey, Connecticut, Nueva Zelandia, Australia; fósil en Francia (Puy-de-Dôme, Cantal).

En la región magallánica fué señalada por Cleve (*Magellan*, pág. 277) en la isla Desolación y por O. Müller (*Süd-Patagonien*, pág. 23) en Patagonia austral (charco de Mit Chico).

7. **Cymbella Ehrenbergii** Kütz. (pl. I, figs. 8-9)

Navicula inaequalis, Ehrenberg, *Infusion*, pág. 184, pl. 13, fig. 18.
Ehrenberg, *Mikrogeol.*, pl. 15 *a*, fig. 25.

Pinnularia inaequalis, Ehrenberg, *America*, pl. 2, 1, fig. 28, pl. 2, 2, fig. 6, pl. 4, 5, fig. 5.
Eherenberg, *Mikrogeol.*, pl. 6, 1, fig. 11, pl. 14, fig. 6, pl. 16, 2, fig. 6, pl. 17, 2, fig. 14.
Ehrenberg, *Nordpolar*, pl. 2, fig. 56.
Rabenhorts, *Süssw. Diat.*, pág. 43, pl. 6, fig. 12.
Cymbella Ehrenbergii, Kützing, *Bacillarien*, pág. 79, pl. 6, fig. 11.
Kützing, *Species Algarum*, pág. 57.
Rabenhorst, *Süssw. Diat.*, pág. 22, pl. 7, fig. 1.
W. Smith, *Synopsis*, I, pág. 17, pl. 2, fig. 21.
Ralfs, in Pritchard, *Infusoria*, pág. 875, pl. 7, fig. 46, pl. 9, fig. 154.
Rabenhorst, *Flora Europ.*, pág. 77.
Lagerstedt, *Spetsbergen*, pág. pl. 2, fig. 17.
A. Schmidt, *Atlas*, pl. 9, figs. 6 a 9.
Brun, *Alpes*, pág. 59, pl. 2, fig. 30.
Van Heurck, *Synopsis*, pág. 68, pl. 2, fig. 1.
Kirchner, *Schlesien*, pág. 187.
Pelletan, *Diat.*, I, pág. 62, fig. 34, pág. 194, fig. 95, pág. 225, fig. 131, etc.
Gerling, *Ostholstein*, pl., fig. 2.
Wolle, *Diat. North-Amer.*, pl. 7, figs. 3, 21, 25.
De Toni, *Sylloge*, pág. 349.
Cleve, *Synopsis*, I, pág. 165.
Van Heurck, *Traité*, pág. 142, pl. 1, fig. 22.

Rara en la serie 236, frecuente en la serie 237; típica según la descripción de Cleve quien, de acuerdo con W. Smith, Lagerstedt, Brun, etc., atribuye a esta especie una área axial angosta, en contraste con Grunow y Van Heurck, quienes, al contrario, la consideran de zona hialina ancha. Nuestros ejemplares por el ancho del área y por la forma general de la valva coinciden con la figura 6 de A. Schmidt.

Valva: largo 0,095 a 0,130 mm.; ancho 0,028 a 0,033 mm. Estrías dorsales medianas 8 en 0,01 mm.

Especie de agua dulce; cosmopolita. Para la región magallánica ya indicada por Ehrenberg y por P. Petit (*Cap Horn*, pág. 114) a cabo de Hornos.

var. **delecta** (A. Schm.) Cleve

Cymbella delecta, A. Schmidt, *Atlas*, pl. 9, fig. 17.
Cymbella Ehrenbergii vár.?, A. Schmidt, *Atlas*, pl. 91, fig. 80.
Cymbella Ehrenbergii var. *minor*, Grunow in Van Heurck, *Synopsis*, pl. 2, fig. 2.
Cymbella Ehrenbergii var. *delecta*, Cleve, *Synopsis*, I, pág. 165.

Atribuyo a esta variedad raros ejemplares que se mezclan al tipo en los materiales de la serie 239. Valva: largo 0,067 mm.; ancho 0,020 mm.

Variedad de agua dulce: en Groenlandia, Estados Unidos (Massachussets, Wáshington), Chile austral (Puerto Montt), Victoria; fósil en Francia y Maine (U. S. A.).

Para la región magallánica fué señalada por O. Müller *(Süd-Patagonien,* pág. 23) en charcos (Kark, Mit Chico, Tweedy) y aguas corrientes (río Baguales y arroyo de Laguna Blanca).

8. **Cymbella Clericii** n. sp. (pl. I, fig. 13)

Valva grande, levemente asimétrica, lanceolada, paulatinamente adelgazándose desde la parte media hasta las extremos subrostrados, obtusos. Área axial ancha; área central suborbicular u ovalada. Rafe derecho, con inflexiones en proximidad de los núdulos, muy pronunciadas y poros medianos y terminales retorcidos hacia el borde ventral. Estrías 7 $^1/_2$ en la parte media del lado dorsal, 8 $^1/_2$ en la parte media del ventral y 11 a 12, en 0,01 mm., en ambos lados de las extremidades; levemente radiantes y formadas por pequeñas perlas, bien netas y en número de 12 13 en 0,01 mm., en las estrías de la parte media de la valva. Largo 0,170 a 0,190 mm.; ancho 0,052 a 0,056 mm.

Esta hermosa especie que dedico a mi maestro, el profesor E. Clerici, de Roma, se halla, en escasos ejemplares, en las series 237 y 241. Se aproxima a los individuos mayores de *C. Ehrenbergii,* diferenciándose, sin embargo, por el tamaño, forma de la valva y de sus extremos y por el ancho del área.

9. **Cymbella (Cocconema) tumida** (Bréb.) H. V. H.

Cocconema tumidum, Brébisson in Kützing, *Species Algarum,* pág. 60.
Cymbella tumida, Van Heurck, *Synopsis,* pág. 64, pl. 2, fig. 10.
Frenguelli, *Contrib.,* I, pág. 35, pl. 1, fig. 21.

Raros ejemplares, fragmentarios, en la serie 239.

Especie de agua dulce y poco salobre; cosmopolita. Nueva para la región magallánica.

10. **Cymbella (Cocconema) gastroides** Kütz. var. **gigantea** (Pant.) (pl. II, fig. 1)

Gymbella gigantea, Pantocsek, *Ungarn.*, III, pág. 41, pl. 21, fig. 321.

Rara en la serie 236. Estrías 6 7 (medio) a 9 (extremidades). Valva: largo 0,225 a 0,250, ancho 0,052 a 0,055 mm.

Se diferencia del tipo especialmente por sus grandes dimensiones. Cleve *(Synopsis,* I, pág. 175) la incluye en el tipo a pesar que para *C. aspera* Ehr. (= *C. gastroides* Kütz.) establece 0,150 a 0,180 mm. de largo y 0,033 mm. de ancho. Pantocsek, que estableció su especie sobre ejemplares fósiles en capas terciarias de Bado (Transilvania), no indica en el texto las dimensiones relativas; pero la valva dibujada por el mismo autor mide 0,255 de largo por 0,052 mm. de ancho, aproximadamente.

Formas análogas, procedentes de materiales lacustres y palustres de Norte América, fueron determinadas también como *C. gastroides* por Tempère y Peragallo en *Collection:* así, por ejempo, en la preparación número 903 (pág. 439, Hatfield Swamps, New Jersey, U. S. A.), donde son frecuentes, alcanzando hasta 0,270 mm. de largo.

Variedad de agua dulce; nueva para la región magallánica. La especie fué señalada por Cleve *(Magellan,* págs. 275-277, *C. aspera)* en el río Grande de Tierra del Fuego y en la isla Desolación.

11. **Cymbella (Cocconema) Nordenskiöldii** O. Müller (pl. II, fig. 2)

Cymbella Nordenskiöldii, O. Müller, *Süd-Patagoniem,* pág. 25, pl. 1, fig. 18.

Escasos ejemplares en las series 238 y 241, concordando en todos sus delles con la descripción de O. Müller. Se apartan únicamente en lo que alcanzan dimensiones algo mayores. Valva: largo 0,140 a 0,170 mm.; ancho 0,023 a 0,027 mm. Los ejemplares de Müller miden 0,112 de largo por 0,018 mm. de ancho.

O. Müller fundó esta especie sobre ejemplares procedente de Patagonia austral (torrente de cerro Toro) en la región magallánica, de la cual hasta ahora parece exclusiva.

12. **Cymbella (Cocconema) lanceolata** (Ehr.) Kirch. (pl. II, fig. 3)

Cocconema lanceolatum, Ehrenberg, *Infusion,* pág. 224, pl. 19, fig. 6.
Kützing, *Bacillarien,* pág. 81, pl. 6, fig. 3.
Kützing, *Species Algarum,* pág. 60.

Ehrenberg, *Mikrogeol.*, pl. 10, 1, fig. 18, pl. 17, 2, fig. 32, pl. 38 *a*, fig. 10.
Ehrenberg, *Abhandl, 1869*, pl. 10, fig. 1, pl. 19, fig. 90.
Cocconema lanceolatum, W. Smith, *Pyrénées*, pág. 18, pl. 1, figs. 7-8.
Rabenhorst, *Süssw. Diat.*, pág. 23, pl. 7, fig. 3.
W. Smith, *Synopsis*, I, pág. 75, pl. 23, fig. 219.
Ralfs, in Pritchard, *Infusoria*, pág. 877, pl. 10, fig. 94.
Rabenhorst, *Flora Europ.*, pág. 93.
A. Schmidt, *Atlas*, pl. 10, figs. 8 a 10, pl. 72, figs. 22 a 24.
Pelletan, *Diat.*, I, pág. 226, fig. 133 (1).
Wolle, *Diat. North-Amer.*, pl. 6, figs. 1 a 3, 14 a 16.
Cocconema Bremii, Naegeli in Kützing, *Species Algarum*, pág. 890.
Rabenhorst, *Süssw. Diat.*, pág. 23.
Ralfs, in Pritchard, *Infusoria*, pág. 878.
Cocconema Bockii, A. Schmidt, *Atlas*, pl. 10, fig. 11.
Cocconema variabile, Cramer in Rabenhorst, *Europa's*, nº 1246.
Cymbella lanceolata, Kirchner, *Schlesien*, pág. 188.
Brun, *Alpes*, pág. 57, pl. 3, fig. 16.
Danufelt, *Baltic Sea*, pág. 20.
Van Heurck, *Synopsis*, pág. 63, pl. 2, fig. 7.
Truan, *Asturias*, pl. 1, fig. 6.
De Toni, *Sylloge*, pág. 362.
Cleve, *Synopsis*, I, pág. 174.
Van Heurck, *Traité*, pág. 146, pl. 1, fig. 37.
Schütt, *Bacillar.*, pág. 138, fig. 253 *a-d*.

Los ejemplares de Punta Arenas (series 238 y 239) difieren del tipo por el borde dorsal menos convexo y extremidades más atenuadas, en modo que la forma de la valva resulta más delgada y esbelta. Además, las estrías en la parte media del lado dorsal son apenas en número de 7 en 0,01 mm., y formadas por pequeñas perlas en número de 11 $^1/_2$ en 0,01 mm. Por estos caracteres, nuestros ejemplares podríanse considerar intermediarios entre el tipo y la var. *cornuta* (Ehr.) Grun. (Grunow, *Oesterr. Ungar.*, pág. 141, Cleve, *Synopsis*, I, pág. 174).

Especie de agua dulce y, a veces, salobre; cosmopolita. Nueva para la región magallánica.

13. **Cymbella (Cocconema) parva** (W. Sm.) Grun. (pl. 1, fig. 17)

Cocconema parvum, W. Smith, *Synopsis*, I, pág. 77, pls. 23-24, fig. 222.
Ralfs, in Pritchard, *Infusoria*, pág. 878, pl. 7, fig. 47.
Rabenhorst, *Flora Europ.*, pág. 85.
A. Schmidt, *Atlas*, pl. 10, figs. 14-15.
Danufelt, *Baltic Sea*, pág. 21.

Grunow, *Fr. Josefs Land,* pág. 45, pl. 1, fig. 9.
Wolle, *Diat. North-Amer.,* pl. 6, figs. 8-9.
Cocconema pachycephalum, Rabenhorst, *Alg. Europ.,* nº 1107.
Cymbella (cymbiformis var.) *parva,* Van Heurck, *Synopsis,* pág. 64.
De Toni, *Sylloge,* pág. 364.
Van Huerck, *Traité,* pág. 147, pl. 1, fig. 39.
Cymbella parva, Wolle, *Diat. North-Amer.,* pl. 7, fig. 19.
Cleve, *Synopsis,* I, pág. 172.
O. Müller, *Säd-Patagonien,* pág. 24.

Rara o escasa en las series 234, 238, 239. Típica por lo que refiere a los diversos detalles de la valva, exceptuando las estrías algo menos numerosas (8 en 0,01 mm. al nivel de la parte media del lado dorsal) y las dimensiones un poco mayores que aquellas establecidas por Cleve. Valva: 0,062 a 0,069 mm.; ancho 0,018. Por lo tanto, nuestros ejemplares se pueden considerar muy próximos a *C. Coudertii* Hérib., de los travertinos de Auvergne (Héribaud, *Auvergne,* pág. 135, pl. 1, fig. 4), probablemente una simple variedad de la misma especie.

C. parva vive en agua dulce y por su amplia distribución geográfica puede considerarse cosmopolita. En la región magallánica fué ya indicada por O. Müller, en el río Baguales, en cerro Toro (torrente) y en un charco entre Tweedy y Kork.

14. **Cymbella (Cocconema) cistula** (Hempr.) Kirch. (pl. I, fig. 15)

Lunularia olivacea, Bory, *Diat. class.* (1822), *teste* Peragallo, *Catalogue,* pág. 470.
Bacillaria cistula, Hemprich et Ehrenberg, *Symbol. phys. Phytoz.* (1828), pl. 2, fig. IV, 10.
Gomphonema semiellipticum, Agardh, *Conspectus,* pág. 33.
Kützing, *Synopsis,* pág. 37.
Gomphonema simplex, Kützing, *Synopsis,* pág. 37, pl. 4, fig. 52.
Cocconema cistula, Ehrenberg, *Infusion.,* pág. 224, pl. 19, fig. 7.
Ehrenberg, *Mikrogeol.,* pl. 37, 3, fig. 3, pl. 38 *a,* 20, fig. 5, pl. 7 *b,* 3, fig. 18.
Kützing, *Bacillarien,* pág, pl. 6, fig. 1.
Rabenhorst, *Süssw. Diat.,* pág. 24, pl. 7, fig. 4.
Rabenhorst, *Flora Europ.,* pág. 84.
W. Smith, *Synopsis,* I, pág. 76, pl. 23 y 24, fig. 221.
Ralfs, in Pritchard, *Infusoria,* pág. 878, pl. 10, figs. 196-197.
A. Schmidt, *Atlas,* pl. 10, figs. 1 a 4, 26, pl. 72, figs. 15 a 17.
Borskow, *Süssw. Bac.,* pl. 1, fig. 1.
Weisse, *Hapsal,* pl. 1, fig. 14.
Pelletan, *Diat.,* I, pl. 1, figs. 1 a 13, pág. 228, fig. 135.
Schütt, *Bacillar.,* pág. 52, fig. 62 *a-b.*

Cocconema cornutum, Gregory, *British. Diat.*, pág. 5, pl. 1, fig. 11.
Cocconema arcticum, A. Schmidt, *Atlas,* pl. 71, fig. 25.
Cymbella cistula, Kirchner, *Schlesien,* pág. 189.
Brun, *Alpes,* pág. 58, pl. 3, fig. 18.
Cymbella cistula, Dannfelt, *Baltic Sea,* pág. 21.
Van Heureck, *Synopsis,* pág. 64, pl. 1. fig. 12.
Pelletan, *Diat.*, I, pág. 51, pl. 2, figs. 3-4.
Wolle, *Diat. North-Amer.*, pl. 6, figs. 6, 7, 12, pl. 7, figs. 29 a 35.
Cleve, *Synopsis,* I, pág. 173.
Van Heurck, *Traité,* pág. 147, pl. 1, fig. 40.
Schütt, *Bacillar.*, pág. 35, fig. 48 *e*.
Cymbella cistula var. *maculata,* A. Schmidt, *Atlas,* pl. 71, fig. 21.
Cymbella cistula var. *fusidium,* Héribaud, *Auvergne,* pág. 71, pl. 3, fig. 12.

Raros ejemplares en la serie 238, algo más numerosos en 239. Valva: largo 0,070 a 0,076 mm.; ancho 0,018 mm. Estrías, en la parte media dorsal, 9 en 0,01 mm.

Especie cosmopolita, viviendo en agua dulce o levemente salobre.

Para la Patagonia austral fué citada por O. Müller *(Süd-Patagonien,* pág. 24) en varias localidades (charcos en Kark y Mit Chico, río Baguales, torrente de cerro Toro).

f^a^ **minor** H. V. H. (pl. I, fig. 16)

Cymbella cistula, A. Schmidt, *Atlas,* pl. 10, figs. 24-25.
Cymbella cistula f^a^ minor, Van Heurck, *Synopsis,* pl. 2, fig. 13.
Cymbella cistula formae minores, O. Müller, *Süd-Patagonien,* pág. 24.

Raros ejemplares en la serie 239, acompañando las formas típicas. Valva: largo 0,042 a 0,048 mm.; ancho 0,015 mm. Estrías 9, 10 en 0,01.

Para la región magallánica ha sido ya señalada por O. Müller en Patagonia austral (charcos en Kark, Tweedy y entre Tweedy y Kark; arroyos de Moulet y de Laguna Blanca, río Baguales y torrente de cerro Toro).

15. **Encyonema ventricosum** (Kütz.) Grun.

Frustulia ventricosa, Kützing, *Synopsis,* pág. 17, pl. 1, fig. 7.
Encyonema ventricosum, Grunow, in Kirchner, *Schlesien,* pág. 189.
Cymbella ventricosa, O. Müller, *Süd-Patagonien,* pág. 26.
Encyonema ventricosum, Frenguelli, *Contribución,* I, pág. 35, pl. 1, figs. 22-23.

Raros ejemplares típicos, sólo en la serie 239 raros.

Especie cosmopolita, de agua dulce, ya señalada en la Argentina (Buenos Aires y Córdoba) y en Patagonia austral (arroyo de Moulet, charco en Kark, río Baguales, torrente de cerro Toro y charco en Tweedy).

16. **Stauroneis phoenicenteron** (Nitzsch) Ehr. (pl. II, fig. 12)

Bacillaria phonicenteron, Nitzsch, *Beitrag* (1817), pág. 92, pl. 4, figs. 12, 14.
Cymbella phoenicenteron, Agardh, *Conspectus,* pág. 10,
Navicula phoenicenteron, Ehrenberg, *Infusion,* pág. 175, pl. 13, fig. 1.
Ehrenberg, *Mikrogeol.,* pl. 8, 3, fig. 4, pl. 10, 1, fig. 4, pl. 16, 1, fig. 5, pl. 16, 3, fig. 28.
Schütt, *Bacillar,* pág. 129, fig. 230.
Stauroptera phoenicenteron, Ehrenberg. *Mb. Berl. Ak., 1848,* pág. 12.
Pleurosinphonia phoenicenteron, Ehrenberg, *Mikrogeol.,* pág. 199.
Ehrenberg, *Abhandl, 1870,* pág. 50, pl. 3, fig. 1.
De Toni, *Sylloge,* pág. 327.
Stauroneis phoenicenteron, Ehrenberg, *America,* pl. 2, 5, fig. 1, pl. 3, 1, fig, 17, pl. 2, fig. 3.
Ehrenberg, *Mikrogeol.,* pl. 39, 3, fig. 105, etc.
Ehrenberg, *Abhandl., 1862,* pág. 64, pl. 1, fig. 6.
Kützing, *Bacillarien,* pág. 104, pl. 3, fig. 53.
Kützing, *Species Algarum.,* pág. 89.
Rabenhorst, *Süssw. Diat.,* pág. 47, pl. 1, fig. 1.
Stauroneis phoenicenteron, Rabenhorst, *Flora Europ.,* pág. 214.
W. Smith, *Synopsis,* I, pág. 59, pl. 19, fig. 185.
Ralfs, in Pritchard, *Infusoria,* pág. 919, pl. 9, fig. 139, pl. 12, figs. 17-18.
Grunow, *Diatom.,* pág. 563.
Ehrenberg, *Abhandl., 1870,* pl. 2, 1, fig. 39, pl. 3, 1, fig. 21.
Manoury, *Étude,* pág. 64, pl. 1, fig. 6.
Brun, *Alpes,* pág. 88, pl. 9, figs. 5 a 7.
Dannfelt, *Baltic. Sea,* pág. 32.
Van Heurck, *Synopsis,* pág· 67, pl. 4, fig. 2.
Belloc, *Pyrénées,* pág. 49, pl. 3, fig. 11.
Schultze, *Staten Island,* pág. 103, pl. 90, fig. 6.
Pelletan, *Diat.,* I, pág. 283.
De Toni, *Sylloge,* pág. 204.
Wolle, *Diat. North-Amer.,* pl. 8, figs. 12 a 15.
Pantocsek, *Ungarn.,* III, pág. 95, pl. 8, fig. 134.
Van Heurck, *Traité,* pág. 158, fig. 30, pág. 159, pl. 1, fig. 50.
Mills, *Hull,* pl. 13, fig. 7.
Pantocsek, *Balaton,* pág. 26, pl. 2, fig. 38.
A. Schmitd, *Atlas,* pl. 242, fig. 16.
O. Müller, *Süd-Patagonien,* pág. 15.

Stauroneis Brunii, Héribaud, *Auvergne*, pág. 76, pl. 3, fig. 22.
Stauroneis phoenicenteron var. *genuina*, Cleve, *Synopsis*, I, pág. 148.

Ejemplares típicos en los materiales de las series 234, 236, 238, 239. Valva: largo 0,100 a 0,130 mm.; ancho 0,026 a 0,028 mm. Estrías 14 en 0,01 mm.

Especie de agua dulce, cosmopolita, ya citada para la Argentina por Cleve en la sierra de Velasco y en Córdoba (Cleve, *Determinac.*, pág. 191) y para la región magallánica por Ehrenberg (islas Malvinas y cabo de Hornos), Petit (cabo de Hornos, en aguas de deshielo) y Müller (en charcos en Kark, Mit Chico, entre Kark y Tweedy, en Tweedy, en un arroyo en Bach y sobre las piedras en río Tres Pasos).

f^a **maxima** Temp. et Per. (pl. II, fig. 13)

Stauronies phoenicenteron f^a *maxima*, Tempère, *Collection*, pág. 211, n° 394.

Difiere del tipo por alcanzar dimensiones mayores y por sus extremidades más prolongadas y rostradas. Valva: largo 0,180 a 0,195 mm.; ancho 0,033 a 0,036 mm.; estrías 12 $^1/_2$ a 13 en 0,01 mm. Se puede considerar intermediaria entre el tipo y var. *Baileyi* (Ehr.) a la cual se aproxima por dimensiones y forma de la valva.

Tempère y Peragallo indicaron esta forma en materiales procedentes de Maclean's Pond en el Canadá. Nueva para la Argentina y la región magallánica.

var. **amphilepta** (Ehr.) Cleve (pl. II, fig. 14)

Stauroneis amphilepta, Ehrenberg, *America*, pl. 1, 2, figs. 9 a 13.
Ehrenberg, *Mikrogeol.*, pl. 14, fig. 18 *a*, 15, fig. 8. pl. 58 *a*, 16, figs. 3 a 5.
Kützing, *Bacillarien*, pág. 105, pl. 29, figs. 16 a 17.
Kützing, *Algarum*, pág. 89.
Rabenhorst, *Süssw. Diat.*, pág. 48, pl. 9, fig. 7.
Ralfs, in Pritchard, *Infusoria*, pág. 913.
Grunow, *Diatom.*, pág. 563.
Héribaud, *Auvergne*, pág. 77.
Pantocsek, *Balaton*, pág. 26, pl. 2, fig. 36.
Stauroneis gracilis, W. Smith, *Synopsis*, I, pág. 59, pl. 19, fig. 186.
Ralfs, in Pritchard, *Infusoria*, pág. 913.
Grunow, *Diatom.*, pág. 564.
Brun, *Alpes*, pág. 89, pl. 9, fig. 6.
De Toni, *Sylloge*, pág. 207.
Truan, *Asturias*, pl. 1, fig. 15.

Schultze, *Staten Island*, pág. 104, pl. 90, fig. 10.
Pelletan, *Diat.*, I, pág. 64, fig. 39, pág. 282, fig. 224 (2).
Wolle, *Diat. North-Amer.*, pl. 8, fig. 10.
Héribaud, *Auvergne*, pág. 76.
Van Heurck, *Traité*, pág. 159, pl. 25, fig. 702.
Mills, *Hull*, pl. 13, fig. 8.

Stauroneis phoenicenteron. var. *amphilepta*, Cleve, *Synopsis*, I, pág. 149.
Cleve A., *Lappmark*, pág. 13.

Stauroneis Boryana, Pantocsek, *Ungarn.*, III, pág. 94, pl. 5, fig. 78.

Difiere del tipo por su valva más pequeña y estrías más finas y más numerosas. Valva: largo 0,070 a 0,087 mm.; ancho 0,015 a 0,018 mm. Estrías 18 en 0,01 mm.

Van Heurck *(Traité*, pág. 159), examinando los materiales y preparaciones originales de W. Smith, reconoció que era simplemente ilusorio y dependiente de deficientes condiciones de observación el carácter del estauro (no alcanzando los bordes de las valvas) tal como aparece en la figura de W. Smith *(Stauroneis gracilis)* e identificó esta especie con *St. gracilis* Ehrenberg *(America*, pl. 1, 2, fig. 14). Por otra parte, Cleve *(Synopsis*, I, pág. 149) había ya identificado *St. gracilis* W. Sm. con *St. amphilepta* Ehr., mientras había considerado *St. gracilis* Ehr. como una simple variedad de *St. anceps* Ehr. He adoptado esta última interpretación, puesto que *St. gracilis* W. Sm., en realidad, con su estauro prolongado hasta los bordes de la valva, no se diferencia de *St. phoenicenteron* Ehr. más que por características de secundaria importancia.

Esta variedad, del mismo habitat del tipo, fué ya indicada por Cleve *(Magellan*, págs. 276 y 279) para la región magallánica en el río Grande de Tierra del Fuego y en la isla Desolación. Además, O. Müller *(Süd-Patagonien*, pág. 16), en algunas localidades de Patagonia austral, señala « formas menores » de *St. phoenicenteron* (largo 0,110 mm.) que considera « vielleicht var. *amphilepta* Ehr. ». Finalmente, M. Peragallo *(Déux. Expéd.*, pág. 35) indica como *St. phoenicenteron* var. *gracilis* J. Br. et M. Per. los ejemplares de *St. gracilis* hallados por Ehrenberg en las Malvinas y cabo de Hornos.

17. **Stauroneis anceps** Ehr. var. **amphicephala** (Kütz.) H. V. H. (pl. II, figs. 7-8)

Stauroneis amphicephala, Kützing, *Bacillarien*, pág. 105, pl. 30, fig. 25.
Kützing, *Species Algarum*, pág. 90.
Rabenhorst, *Süssw. Diat.*, pág. 48, pl. 9, fig. 12.
Ralfs, in Pritchard, *Infusoria*, pág. 912.

Lewis, *White Mount.*, pág. 12.
Schumann, *Preuss. Diat.*, II, pl. 2, fig. 29.
Stauroneis linearis, Grunow, *Diatom.*, pág. 564, pl. 4, fig. 11.
Stauroneis anceps var. *elliptica*, Brun, *Alpes*, pág. 89, pl. 9, fig. 1 *a*.
Stauroneis anceps var. *amphicephala*, Van Heurck, *Synopsis*, pág. 69, pl. 4, figs. 6-7.
Pelletan, *Diat.*, I, pág. 284, fig. 227 (2).
Cleve, *Synopsis*, I, pág. 148.
Van Heurck, *Traité*, pág. 161, pl. 1, fig. 57.
Mills, *Hull.*, pl. 13, fig. 14.
A. Schmidt, *Atlas*, pl. 242, fig. 10.
O. Müller, *Süd-Patagonien*, pág. 15.
Stauroneis anceps, Schultze, *Staten Island*, pág. 104, pl. 90, fig. 12.

Escasa en la serie 239. Algunos ejemplares típicos y otros de valva con extremos atenuados y estrías muy delgadas, próximos a *Stauroneis anceps* Ehr. var.? Cleve (*Färskwattens Diat.*, pág. 12, pl. 16, fig. 5, y *Determinac.*, pág. 197) de la sierra de Velasco (Rep. Argentina) de la cual difiere por la forma de las extremidades. Recuerdan también *Stauroneis anceps* var. *argentina* (Cleve, *Synopsis*, I, pág. 148 = *St. gracilis* var? *argentina* Cleve, *Färskwattens Diat.*, pág. 12, pl. 16, fig. 4 y *Determinac.* pág. 106), también hallada por Cleve en la sierra de Velasco, diferenciándose por el número de las estrías.

Valva: largo 0,048 a 0,064 mm., ancho 0,012 a 0,014 mm. Estrías 22 a 24 en 0,01 mm.

Especie de agua dulce, cosmopolita. Para la región mallagánica fué ya señalada por O. Müller en río Baguales y en un charco de Mit Chico.

var. **hyalina** Br. et Per. (pl. II, fig. 4)

Stauroneis anceps var. *hyalina*, Brun et Peragallo in Héribaud, *Auvergne*, pág. 78, pl. 3, fig. 19.
Cleve, *Synopsis*, I, pág. 147.
A. Schmidt, *Atlas*, pl. 242, fig. 11.

Los ejemplares, que en menor número acompañan la variedad anterior y que raramente se observan también en la serie 238, corresponden a la figura de H. Heiden (en A. Schmidt's, *Atlas*) y a los caracteres ya establecidos para esta variedad. Difiere de la anterior por sus dimensiones mayores, estrías algo más finas y numerosas, estauro lateralmente menos dilatado. Valva: largo 0,060 a 0,065 mm.; ancho 0,012 a 0,013 mm. Estrías 22 23 en 0,01 mm.

Esta variedad fué descrita, por vez primera, al estado fósil en Puy-de Dôme (Héribaud); luego fué hallada viviente en agua dulce de Australia (Blue Mountains, Rieva Lagoons, Alpes australianos), según Cleve, y en Sud América (río Demarara), según Heiden.

Nueva para la región magallánica.

var.? **abnormis** n. var. (pl. II, figs. 9, 10, 11)

Esta rara y curiosa forma acompaña las diferentes variedades de *St. anceps* en la serie 237 y supongo tratarse de un estado anormal o, quizá, esporangial de esta especie.

(Continuará.)

CORDYLOPHORA LACUSTRIS Allman

EN EL RÍO DE LA PLATA (1)

Por PABLO GAGGERO

No habiéndose aún señalado en el país, o siendo muy poco conocidas ciertas formas de la microfauna de agua dulce pertenecientes a grupos cuyos representantes son, en su inmensa mayoría, de agua salada, y que ofrecen interés desde el punto de vista biológico y zoogeográfico, me he dedicado a su búsqueda.

El primer resultado obtenido fué el hallazgo de una abundante fauna de Briozoarios en el llamado «río» Santiago, canal natural paralelo a la costa del río de la Plata y que atraviesa el puerto.

Sus aguas son turbias, arcillosas y sometidas a fuertes corrientes debidas a los vientos y a las mareas. Son, sin embargo, siempre dulces y la salinidad de las aguas del estuario exterior no se hace sentir ya en ninguna forma en estos parajes.

Llevo reconocidos ya varios estatoblastos que corresponden a especies distintas de Briozoarios y perfectamente establecida la gran abundancia en el citado «río» y canales vecinos de un ectoprocto filactolemado, al cual pertenece una de dichas formas de resistencia, de cuyo estudio me ocupo en la actualidad.

Más tarde tuve la suerte de encontrar en las aguas del mismo «río» un pólipo colonial de Hidrozoario, objeto de esta breve nota. Con los datos obtenidos del estudio de la pequeña colonia y la escasa bibliografía que he podido consultar, identifico a dicha forma como *Cordylophora lacustris* Allman.

(1) Trabajos del Laboratorio de Zoología del Museo (Universidad nacional) de La Plata, número 22.

Cordylophora es uno de los pocos Celenterados que viven en el agua dulce. Las especies conocidas y su distribución geográfica las enumero a continuación. Como no tengo a mi disposición la literatura completa, no sería difícil que omitiera algunos datos.

Cordylophora lacustris Allman. — Europa, África (Egipto), Asia

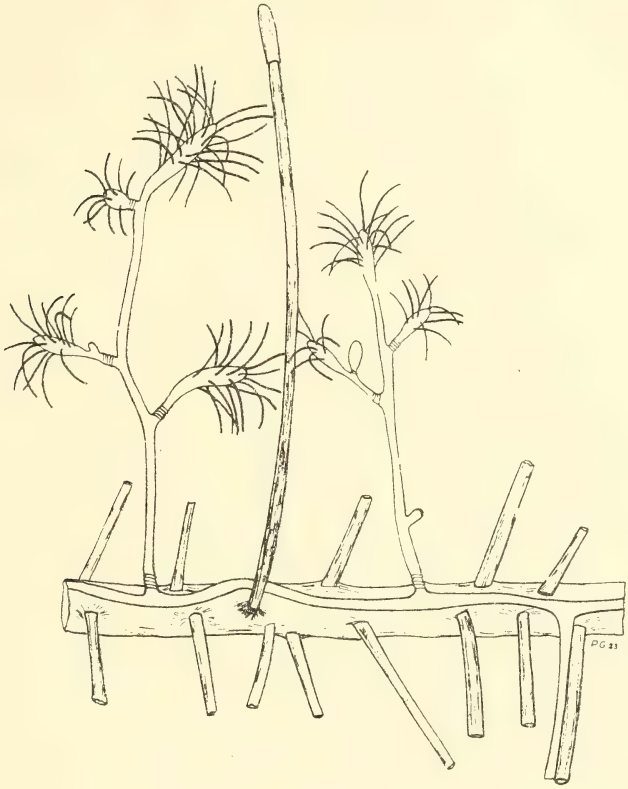


Fig. 1. — *Cordylophora lacustris* Allman. Parte de la colonia adherida a la *Pontederiácea*. Del natural (X 6)

(China, prov. de Kiangsu), Nueva Zelandia (¿?), Estados Unidos y Cuba.

Cordylophora albicola Kirchp. — Europa (río Elba, península de Schleswig).

Cordylophora Whiteleggei v. Lendenfeld. — Australia (v. Lendenfeld, 1887).

El ejemplar al que se refieren mis observaciones fué hallado, el 14 de abril del corriente año, en el « río » Santiago (en la margen opuesta

al local del Club de regatas La Pláta y a unos 800 m del mismo), adherido a una de las raíces del tallo de una Pontederiácea, muy abundante en el río de la Plata, que era arrastrada por la corriente.

En las raíces del mismo tallo estaban adheridos gran cantidad de los Briozoarios cuya abundancia recién acabo de hacer notar.

La colonia se extendía por dos raíces principales de la planta. Era, a simple vista, ligeramente blanquecina, casi incolora, y formada por una parte basilar rastrera, filiforme, que se extiende a lo largo de la raíz principal y raicillas de la planta sostén, emitiendo ya troncos

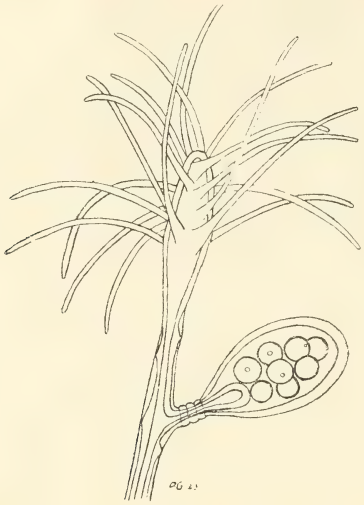


Fig. 2. — *Cordylophora lacustris* Allman. Hidrante y gonóforo femenino. Del natural (X 15)

ramificados o bien pólipos terminales aislados, sostenidos por una corta rama.

La mayor altura que he observado en los troncos erguidos es de 17 milímetros. El mayor de los dibujados en la figura 1 tiene 11 milímetros de altura. Los troncos son, por lo general, alternativamente ramificados. La parte basilar rastrera y los troncos están rodeados por una envoltura de aspecto quitinoso (periderma).

Generalmente los troncos erguidos, ramas que sostienen los hidrantes y gonóforos son anillados en su origen.

Los hidrantes son fusiformes. Los tentáculos, delgados y filiformes, distribuídos irregularmente en el cuerpo : la cantidad varía entre 8 y 28, el número más común oscila al rededor de 19.

Los gonóforos, abundantes en la colonia, son de forma ovalada, si-

tuados en las ramas debajo de los hidrantes y sostenidos por un corto pedúnculo. Los he observado en sus distintos estados de desarrollo: los que habían llegado a su madurez eran femeninos (muchos con huevos y algunos con embriones).

Sobre el periderma del ejemplar recogido estaban adheridos numerosos ciliados coloniales, rotíferos, diatomeas, etc.

La colonia, con la raíz de la Pontederiácea a la cual estaba adherida, fué recogida y llevada al laboratorio, colocándola en un cristalizador. A los dos días habían muerto los pólipos, excepto los de una pequeña parte, previamente separada, de la colonia.

Este resto fué colocado luego, con una ramita de *Elodea*, en un pequeño acuario, del que tuvo que ser sacado frecuentemente para observarlo. A pesar de este tratamiento poco favorable, la colonia vivió algún tiempo. *Cordylophora* parece ser un animal fácil de mantener en acuarios de agua dulce debidamente oxigenados. Colonias robustas de este género son, sin duda, dado el aspecto esbelto de sus pólipos blanquecinos, de largos y filiformes tentáculos, de las formas más bonitas que pueden criarse en acuarios de esta clase.

Ya en mayo observé la muerte de algunos hidrantes: a mediados de junio habían muerto todos. Quedan actualmente fragmentos de la parte basilar rastrera y de los troncos.

Septiembre 21 de 1923.

BIBLIOGRAFÍA

* ALLMAN, G. J., *On the Anatomy and Physiology of Cordylophora, a contribution to our Knowledge of the Tubularian Zoophytes. Phil. Transact. Roy. Society London*, 1853.

* ALLMAN, G. J., *A monograph of the Gimnoblastic or Tubularian Hydroids*, London, 1871-1872.

* BOULENGER, CH. L., *On the occurrence of the Hydroid Cordylophora* in *Egypt. Ann. Mag. N. H.*, serie 8, volumen I, páginas 492-493, 1908.

BRAUER, A., *Hydrozoa. Brauer's Süsswasserfauna Deutschlands*, Heft 19, VI, 1909.

CLAUS, C., *Zoología*, tomo I (tomo II de la *Historia natural* editada por Montaner y Simón), Barcelona, 1891.

CLARKE, S. F., *A new locality for Cordylophora*, en *American Naturalist*, volumen XII, 1878.

DELAGE, I. y HÉROUARD, E., *Traité de Zoologie concrète*, tomo II, 2ª parte, París, 1901.

* HAMILTON, A., *A Fresh-water Hydrozoon (Cordylophora lacustris?)*, N. Z. J. Sci. 1, páginas 419 y 420, 1883.

KÜKENTHAL, W., *Leitfaden für das Zoologische Prakticum*, Jena, 1905.

LENDENFELD, R. VON, *Die Süsswasser-Coelenteraten Australiens. Eine faunistische Studie. Zool. Jahrb. Syst.*, volumen II, 1887.

NUTTING, C. C., *The Hydroids of the Woods Hole Region. U. S. Fish. Com. Bull. for 1899*, 1901.

* SCHULZE, F. E., *Ueber den Bau und die Entwicklung von « Cordylophora lacustris » Allman, nebst Bemerkungen über Vorkommen und Lebensweise dieses Thieres* (4°, Leipzig, 52 págs., 6 pls.), 1871.

SMITH, FRANK, *Hydra and other Fresh-water Hydrozoa*, en *Ward y Whipple. Fresh-water Biology*, capítulo XI, Nueva York, 1918.

Los trabajos señalados con (*) no los he podido consultar en el original.

LOS YACIMIENTOS DE ESTAÑO EN BOLIVIA

Por el ingeniero ANTONIO PAULY

Sobre los yacimientos de estaño en Sud América, y especialmente en Bolivia, se han publicado varios trabajos, pero éstos han sido hechos por sabios que nunca han estado en este país y nunca han visto estas minas con sus propios ojos (como Stelzner), o que solamente han estado un tiempo muy breve en estos lugares, y por lo tanto han tenido que basarse sobre las indicaciones de los administradores o encargados de estas minas. Estos últimos, mayormente personas prácticas, con pocos conocimientos científicos o aun sin los más necesarios principios de la ciencia, tienen muchas veces ideas muy raras sobre las formaciones geológicas de los yacimientos, y por esta razón, los datos y las muestras suministradas por ellos carecen de valor y no son los que demuestran la relación de las vetas con las rocas encajonantes, en la forma en que fuera de desear para un trabajo científico sobre la materia.

Habiendo estado varios años en Bolivia y habiendo visitado y estudiado muchos yacimientos, he tenido oportunidad de formarme una idea de las relaciones geológicas y petrográficas sobre el terreno mismo.

Hubiera sido mi deseo escribir una monografía completa de los yacimientos de estaño en Bolivia, pero por el momento no me ha sido posible por causas ajenas a mi voluntad, de modo que tengo que contentarme con este pequeño bosquejo.

Desgraciadamente muchas de las muestras, de los apuntes y de las microfotografías hechas, se han perdido en un viaje de exploración que tuve que hacer a través de los territorios del Beni y del Matto

Grosso. Me permito también dar en este lugar mis gracias al señor A. Carnier, director de la Escuela nacional de ingenieros de Oruro (Bolivia), por la ayuda que me ha prestado y las muestras interesantes que me ha facilitado.

Los yacimientos de estaño en Bolivia se relacionan todos con rocas eruptivas, especialmente dacitas y granulitas, que han penetrado en sedimentos antiguos, perteneciente al silurio, devonio y quizá también al carbón. Esos sedimentos demuestran claramente las zonas de metamorfosis de contacto, especialmente el influjo de *agents minneralisateurs,* por lo que los restos paleontológicos son muy escasos y muchas veces deformados. Sin embargo, he podido comprobar la presencia de trilobitos, graptólitos, ortóceras, y otros restos menos seguros, como Coralas, conchas y braquiópodas. Los estratos pertenecientes al carbón están llenos de braquiópodas pertenecientes a la especie Espirifero.

Como he dicho, estos sedimentos han sido metamorfoseados por los gases que se desprendieron de estas rocas eruptivas al solidificarse (especialmente fluor, demostrado por la formación de turmalina).

Las zonas de contacto no son muy extensas, debido a que las rocas eruptivas se han enfriado y solidificado muy rápidamente y cerca de la superficie. (Las rocas eruptivas de la Argentina (Córdoba) se han solidificado a gran profundidad, y por lo tanto son granitos los que se relacionen con los yacimientos de estaño, igual a los yacimientos europeos y australianos.)

En Bolivia son riolitos, o mejor dicho, dacitas; pero también se encuentran granitos verdaderos como los granulitos en la masa del Illimani y en la cordillera de Quimsa-Cruz. Estas son probablemente las partes más inferiores de las dacitas que se han solidificado ya a gran profundidad y bajo gran presión se encuentran también en las partes relativamente más bajas de los yacimientos.

Gran parte de los yacimientos de estaño están ligados a las dacitas, que cubren casi toda la superficie entre Uyuni hasta Oruro, y que se ven todavía en forma de restos en la Pampa, formando las cimas de los pequeños cerros que surgen de ella o, mejor dicho, que han resistido a la erosión general que tuvo lugar durante la época postglacial.

Estas rocas datan del tiempo en que la cordillera se ha levantado del continente sudamericano. Parece que al subir la cordillera, la presión enorme, a la cual las rocas o sus magmas estaban sujetas, aflojó y los gases, encerrados en las mismas, se libertaron escapando por las grietas y alterando las paredes de las mismas.

El fluor, contenido en el magma, combinado con el estaño y el agua, bajo la fuerte presión, se libró, formando SnO_2 y FlH.

El óxido de estaño SnO_2 se precipitó y se condensó en las grietas, formando las vetas de casiterita, mientras que el FlH se combina con los minerales, pertenecientes a los grupos de los feldespatos, anfiboles y angitas, formando turmalinas y topacios, etc.

Una reacción parecida deben haber formado los rubís y zafiros, que se encuentran a menudo en los lavaderos de estaño (Potosí).

Esta teoría parece explicar con facilidad la formación de las enormes vetas de casiterita casi pura, en Bolivia. Pero no solamente por la influencia directa de las rocas volcánicas se han formado las vetas grandes de casiterita, sino por deposición de soluciones acuosas, cuya existencia ha sido casi negada hasta ahora, pero que se ha podido comprobar muy a menudo en Bolivia. Evidentemente no hubiera cómo explicar la existencia de vetas de casiterita pura de una enormidad como, por ejemplo, la veta Inca de la mina La Salvadora (Uncia), que tiene un ancho hasta de dos metros.

Junto con el estaño ha subido por las grietas ácido sílico y ha formado las vetas de cuarzo que a menudo acompañan la casiterita. Podemos distinguir varias clases de yacimientos, como sigue :

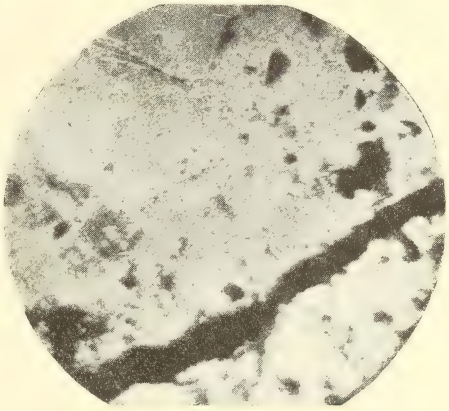


Fig. 1. — Cuarcita de Monteblanco
Pachaca veta. 16 ×

1. TIPO QUIMSA CRUZ

Casiterita, casi pura, con vetas de cuarzo blanco.

La roca *encajonante* es mayormente un cuarcito blanco, en la cual la casiterita se encuentra en pequeñas inclusiones o en pequeñas vetitas de menos de un milímetro hasta unos centímetros de ancho. La característica de estos yacimientos es la casi absoluta falta de piritas y óxidos de hierro y la asociación de minerales, como : wolframita, scheelita, molibdenita y depósitos de mica blanca y turmalina.

El cuarzo de estos cuarcitos es muy descompuesto y lleno de inclusiones de mica (sericita). Es evidente que estos cuarcitos se han

formado por la silicificación de sedimentos por el cuarzo ígneo que acompaña las rocas eruptivas y el estaño. No se han podido encontrar inclusiones de líquido bajo el microscopio. En donde los sedimentos resistieron más a la silicificación, el cuarzo eruptivo que los atravesó, formó vetas de cuarzo casi puro, como sucedió, por ejemplo, en la región de Pacuni (Quimsa Cruz). Estos cuarzos contienen la casiterita a veces en forma de pequeños cristales junto con wolframita y se pa-

Fig. 2. — Cuarcita de Monteblanco. Pachaca veta. 10 ×

recen mucho a las vetas cuarzosas auríferas ; acompañan estas vetas, pellejos de mica blanca, agregados de turmalina y a veces fluorita.

Cerca de estos yacimientos se encuentran granitos, en forma de granulitos o pegmatitos y a veces aplitos que han dejado rastros de metamorfosis en los sedimentos (siluro, devono, carbono), pizarras y gredas, que atravesaron. En las figuras 1 y 2 se ven microfotografías de estos yacimientos.

En este tipo se encuentran enriquecimientos secundarios, que aumentan mucho en la superficie la riqueza de las vetas, pero se pierden luego, de modo que vetas con más de 6 por ciento de estaño en la su-

perficie, no tienen más que 1 por ciento a los pocos metros de profundidad (Monteblanco).

2. TIPO UNCIA

Este tipo, que se encuentra en toda la zona desde Oruro o Quimsa Cruz hasta Uyuni, es caracterizado por la asociación de piritas a la casiterita, como también de sulfuro de estaño llamado estanita. Además se encuentra la bismutita y en las parte superiores, todavía, algo de wolframita. Las vetas están situadas en pizarras antiguas en contacto con riolitas y dacitas.

En este tipo, las vetas son a veces enormes y a él pertenecen las minas más ricas, actualmente en explotación. La casiterita se encuentra en forma de cristales o agregados cristalinos o bien diseminados en la roca (fig. 3), siempre mezclados con piritas de hierro, y muchas veces acompañados por blenda, que en las partes profundas se transforma en la bolivianita, de un negro azul, y contiene cinc, cobre, hierro y a veces algo de plata.

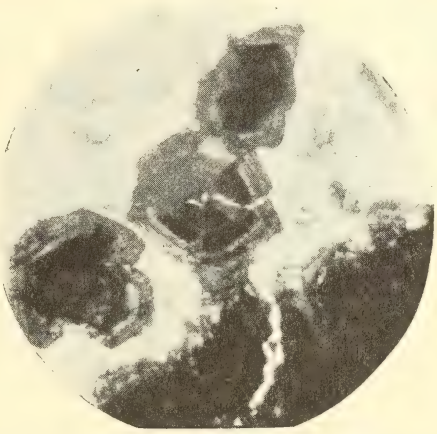


Fig. 3. — Dacita de Uncia. Cristales de casiterita en el borde de una veta de estaño. 16 ×. (Se ve la estructura zonar.)

En todas las vetas se nota que con la profundidad aumentan los sulfuros y entra a formar parte de su contenido la plata, acercándose así al próximo tipo de que hablaremos. Por ejemplo, en Huanuni se encontró una veta rica de plata en el pie del cerro Posoconi, explotado actualmente en su parte superior por estaño. En el cerro de la mina La Salvadora, cerca de Uncía, se encontró una veta de plata de bajo de las vetas de estaño que atraviesan la parte alta del cerro.

Junto con este tipo de yacimientos se encuentra la riolita, a lo largo del ferrocarril de Antofagasta a Bolivia, al pie de la cordillera, en estado muy caolinizada. Esta roca es entonces muy permeable a los agentes atmosféricos, y donde las vetas del tipo Uncia llegan a la

superficie, la pirita es convertida en hidróxidos de hierro, mezclados con la casiterita (llamados pacos) y el estaño de la superficie ha servido para aumentar la riqueza de la parte de las vetas situadas inmediatamente debajo.

En estos lugares se encuentran también sueltas, en la roca tofa, concreciones de óxido de estaño, llamados estaño-leña. Estas concreciones son un producto secundario de cementación, que se encuentra en profundidades diversas, y puede ser muy bien comparado con las concreciones de cal en la greda (loess en alemán). Como son fácil de explotar, son muy buscados por los mineros pobres.

Desgraciadamente estas concentraciones secundarias pertenecen a la zona de cementación muy pequeña, y terminan con ésta, bajando la del estaño, lo que sumado al mayor gasto de explotación en la roca firme, hace muchas veces imposible seguirla, perdiéndose los capitales invertidos.

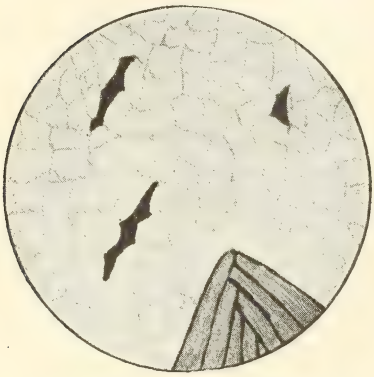


Fig. 4. — Estaño leña 50 ×. (Abajo, una concreción radial de turmalina)

Pero no solamente en la roca descompuesta se encuentran estos enriquecimientos secundarios del estaño, sino también en las vetas, en la roca firme, facilitadas por las grietas, las soluciones de estaño bajan de la superficie y depositan el óxido de estaño en partes más profundas, que más tarde por la erosión llegan a la superficie e inducen al minero a invertir grandes capitales en estos yacimientos, creyendo tener a la vista un mineral riquísimo, que se presta a la explotación en gran escala. Sin embargo, como queda dicho, las vetas de Uncia y Llallagua demuestran estos enriquecimientos secundarios hasta profundidades considerables (300 a 400 metros). Que estas vetas son el producto de enriquecimientos secundarios queda comprobado por la investigación microscópica del mineral (fig. 4).

Es probable que varios de los yacimientos del tipo Quimsa Cruz pertenecen a las partes altas del tipo Uncia, en los cuales las piritas han sido oxidadas por los agentes de la atmósfera y el hidróxido de hierro ha sido extraído por las aguas, al ser más soluble que el óxido de estaño.

3. TIPO POTOSÍ (1)

Este tipo se caracteriza por la introducción de la plata en cantidades apreciables en la mezcla de los minerales, y pertenece a la zona más baja de los yacimientos. El tipo se encuentra en la zona desde Oruro hasta Potosí.

El estaño desaparece con la profundidad, quedando residuos de este mineral solamente en combinaciones complejas, como la frankeita, tealita, cilindrita, argyrodita, canfieldita y el estaño nativo.

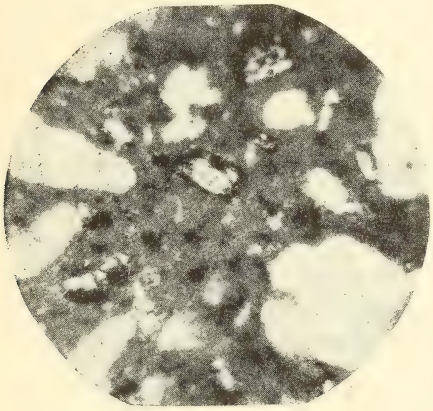


Fig. 5. — Dacita de Oruro, mostrando las descomposiciones. 16 ×

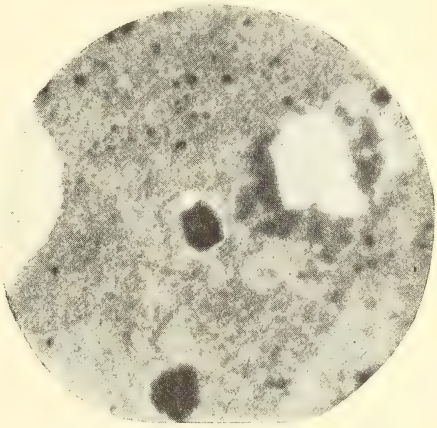


Fig. 6. — Dacita de Oruro con cristales de casiterita. 16 ×

El arsénico reemplaza al azufre, dando lugar a la serie de minerales llamados panabases o cobre gris (en inglés falores) (fig. 8).

La roca encajonante es una dacita como en los otros yacimientos con feldespatos triclínicos y pirámides dobles de cuarzo. Esta dacita es muy descompuesta y el cuarzo tiene muchas inclusiones de vidrio, lo que comprueba su procedencia volcánica, efusiva (fig. 7).

Los minerales ferruginosos de la roca son descompuestos, quedando su centro decolorado y el borde verde obscuro por la formación de clorita (?) (fig. 5). Los feldespatos son igualmente muy descompuestos y llenos de lamelas de mica y otros pequeños minerales, cuya determinación me es imposible (figs. 5, 6 y 7).

(1) Este tipo no tiene nada que ver con el tipo Potosí, de Stelzner.

Fig. 7. — Inclusiones de vidrio en el cuarzo. 600 ×

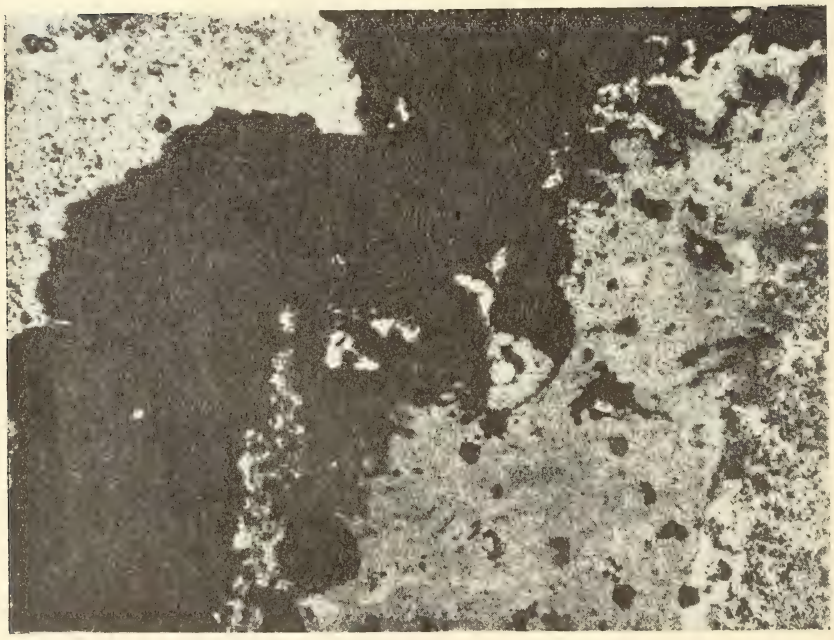


Fig. 8. — Borde de una veta: *a*, cobre gris; *b*, pirita de hierro; *c*, casiterita; *d*, dacita

4. TIPO PULACAYO

El tipo Potosí se transforma con la profundidad en el tipo Pulacayo, propio de este lugar minero tan rico en plata. El mineral es caracterizado por la introducción de antimoniuros complejos (panabases), las combinaciones más importantes son la tetraedrita, la polibasita y la proustita, y en las partes más hondas la pirargirita. El arsénico desaparece con la profundidad y el antimonio y plata aumenta. La roca encajonante se ve en la figura 9, y pertenece al grupo de las andesitas descompuestas, parecido a la propilita. (El cuarzo de la

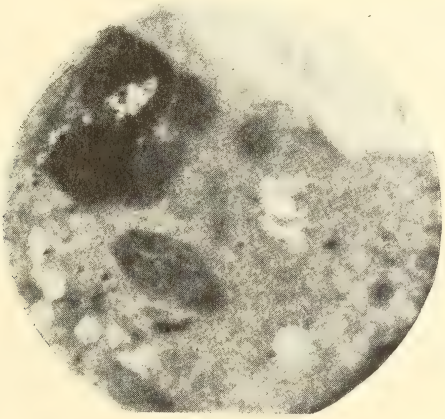


Fig. 9. — Propilita de Pulacayo. 26 ×. Mostrando las seudomorfas de clorita según hornablenda

dacita ha desaparecido.) En ellas se ven muy bien las seudomorfas de clorita verde, imitando los cristales de hornablenda, de los cuales ha hablado ya Becker al tratar de los propílitas de los estados del oeste de Estados Unidos de Norte América.

Resumiendo lo que he podido estudiar y determinar con certeza, al recorrer los yacimientos de Bolivia y analizar sus minerales bajo el micróscopio, se llega a lo siguiente :

Las vetas de estaño se han formado con ayuda de rocas eruptivas (dacita y granito) al traspasar los sedimentos antiguos. Las rocas conectadas con estos yacimientos son rocas volcánicas (efusivas).

El contenido de estaño desaparece con la profundidad, aumentando la plata a la par con minerales complejos, e introduciéndose también

el cobre. Los minerales sencillos de la superficie (óxidos) se transforman en sulfuros, después en arseniuros, y por último, en las partes más bajas, en antimoniuros complejos.

Las vetas más ricas en estaño lo son por enriquecimientos secundarios en la zona de cementación y pierden muy rápidamente su ley en estaño con la profundidad.

Se ha comprobado la solución del óxido de estaño y su depósito en partes más hondas, en grietas o huecos de la roca en forma de estaño leña, como sucede con todos los demás minerales útiles.

Buenos Aires, 20 de abril 1923.

CURCULIONIDES

DE L'EXPLORATION LIZER-DELÉTANG AU CHACO BOLIVIEN

PAR A. HUSTACHE

MM. Charles Lizer et Louis F. Delétang m'ayant proposé l'étude des Curculionides rapportés par eux du Chaco bolivien et de la région comprise entre Santa Cruz de la Sierra et Trinidad, je me suis empressé d'accepter leur offre. Les matériaux recueillis sont d'ailleurs d'une importance exceptionnelle; ils se répartissent en effet en plus de deux cents espèces parmi lesquelles 94 espèces et 6 genres sont nouveaux. Mais les espèces du Chaco bolivien ne peuvent rivaliser avec celles du Brésil pour la taille et l'éclat de la coloration; le plus grand nombre d'entre elles sont de petite taille et de modeste livrée. Dans certains genres il eut été imprudent de décrire sur un seul spécimen des formes qui peuvent être variables, ou qui présentent habituellement chez les espèces connues du même groupe des différences sexuelles notables, pour ces motifs, certains groupes, par exemple *Cryptorhynchus, Bagous, Apion,* n'ont pu être complétement étudiés, mais l'existence au Chaco bolivien de véritables *Bagous* n'en est pas moins fort remarquable.

Conformément aux intentions de MM. C. Lizer et L. Delétang cette collection a été déposée au Museum de Paris qui possédera ainsi, sauf indication contraire, tous les types des espèces décrites dans le présent travail.

Pseudopantomorus Sharpi Hell., *Anal. Soc. Cient. Arg.*, XCI, pág. 6, fig. 1.

Santa Cruz (IX, 1917); Villa Montes (XI, 1917); Yacuiva (VIII, 1917); Lagunillas (XI, 1917); Yzozo (VIII, 1917); Cuatro Ojos (XI, 1917).

Nombreux spécimens.

Signalée par Heller du Tucumán (C. Bruch) et du Paraguay (coll. Faust) cette espèce est très répandue dans le Chaco bolivien comme on le voit par les localités citées ci-dessus.

Archopactus cyphoides Hell., *l. c.*, pag. 8, fig. 3.

Espèce décrite du Tucumán (C. Bruch).

Bolivie : Lagunillas (XI, 1917); Yacuiva (VIII, 1917).

var. *griseomaculatus* n. var.

Revêtement dorsal des élytres dense, fauve, entremêlé de nombreuses petites taches cendrées.

République Argentine : Río Salado, Chaco de Santiago (ma coll.).

Chez cette espèce le ♂ n'a pas de caractères secondaires spéciaux; il est seulement un peu plus petit que la ♀ mais de forme semblable.

Le revêtement est variable chez cette espèce comme chez tous les Naupactides (1). La forme type a le dos des élytres « pallide cervino-squamosis, raro squamulis albis dispersis », la v. *griseomaculatus* a un fascies tout différent et semble être la forme la plus commune.

Hoplopactus lateralis Arrow, *Proc. zool. Soc. Lond.*, 1903, II, pag. 251, pl. 28, fig. 3.

Santa Cruz (IX, 1917); Cuatro Ojos (IX, 1917).

Espèce décrite de Matto Grosso.

Naupactus pithecius Germ.

Santa Cruz (IX, 1917).

Cette forme bolivienne diffère légèrement de la forme type du Brésil par la ponctuation élytrale du ♂ plus forte et plus régulière.

Naupactus Lizeri n. sp.

♂. Allongé, brun, les pattes et les antennes ferrugineuses, revêtu en dessus de squamules serrées d'un beau vert doré brillant, une large bande longitudinale sur le milieu du prothorax, la suture sur les deux premiers interstries de chaque côté, les bords latéraux des ély-

(1) Cette variabilité individuelle du revêtement chez les *Naupactus* a été notée, il y a déjà longtemps par Lacordaire.

tres, dénudés; muni sur les élytres d'une pubescence double, l'une très longue, dressée, fournie, flave sur les parties claires, foncée sur les parties denudée, l'autre très courte, éparse et presque couchée, le prothorax et la tête munis d'une pubescence courte; dessous uniformément revêtu de squamules serrées, vertes, moins brillantes que celles du dessus.

Tête et rostre à ponctuation fine, écartée, peu densément squamulés, finement canaliculés au milieu, le rostre plus étroit et presque aussi long que la tête, non élargi en avant. Yeux oblongs et saillants. Antennes longues et très fines, revêtues d'une pubescence cendrée dense et assez longue, tous les articles du funicule faiblement noueux au sommet et au moins du triple aussi long qu'épais, la massue étroite, allongée, fusiforme. Prothorax à peine plus large que long, faiblement et régulièrement arqué sur les côtés, assez fortement bisinué à sa base qui est finement rebordée et à peine plus large que le bord antérieur; disque convexe, marqué derrière le bord antérieur d'un fin sillon transversal plus profond sur les côtés, à sa base d'une petite fossette antéscutellaire, sur sa ligne médiane d'un sillon très fin, obsolète; à ponctuation superficielle et écartée, les points cachés par les squamules rondes qui les recouvrent, excepté sur la ligne médiane et une bande latérale, en dessous, mal déterminée. Écusson triangulaire, ponctué, dénudé. Élytres un peu plus larges à la base et trois fois aussi longs que le prothorax, arrondis assez fortement et isolément à la base, obtusément arrondis aux épaules, graduellement rétrécis des épaules au sommet, acuminés-arrondis ensemble à l'extrémité; ponctués-striés, les points des stries médiocres, peu serres, graduellement effacés vers la partie apicale, squamulés, ceux de la première rangée plus serrés, plus profonds et dénudés; interstries plans. Pattes assez longues; fémurs peu densément squamulées, inermes; tibias inermes sur leur tranche interne, munis d'une pubescence cendrée assez dense, les antérieurs médiocrement arqués en dedans au sommet; tarses allongés, velus, spongieux en dessous; ongles robustes et noirâtres.

♀. Forme générale plus large, moins élancée, les élytres à bords latéraux parallèles jusqu'au milieu, à revêtement presque uniforme, la suture squamulée quoique moins densément que les autres interstries, antennes plus courtes. Fémurs foncés. Long.: 10-12 mm. (1).

Santa Cruz (IX, 1917).

Quoique les tibias ne soient pas denticulés sur leur tranche inter-

(1) Longueur du rostre non comprise.

ne, cette espèce; par l'ensemble de ses caractères est bien un vrai *Naupactus*.

Le mâle est très constant de coloration, les 25 individus examinés étant identiques. Par contre, la femelle passe du vert au gris uniforme avec les mélanges intermédiaires de ces colorations et prend ainsi un fascies tout différent, sans qu'aucun caractère plastique autorise la dénomination de ces formes même comme simple variété. Voici ces variations :

Var. *a* ♀. Revêtement vert et d'un cuivreux doré, ce dernier plus abondant sur les interstries pairs. Santa Cruz (IX, 1917).

Var. *b* ♀. Revêtement, formé en majeure partie de squamules d'un gris cendré, entremêlées de squamules vertes. Santa Cruz (IX, 1917).

Var. *unicolor* ♀ n. var. Revêtement cendré ou cendré-flave, uniforme, recouvrant le dessus et le dessous, sans aucune bande dénudée. Santa Cruz (IX, 1917), Cuatro Ojos (IX, 1917), Yacuiva (XII, 1917), un spécimen.

Naupactus viridimicans n. sp. ♀.

Forme et taille de *N. Lizeri,* dont elle diffère par le prothorax un peu plus long, les élytres à épaules plus élevées, à bords latéraux sinués derrière les épaules et en arrière avant le sommet, les stries un peu plus fortes, distinctes jusqu'au sommet, et tout particulièrement par les soies très courtes et très nombreuses, et les tibias antérieurs denticulés sur leur tranche interne. Brun, les antennes foncées, les pattes ferrugineuses, densément revêtu de squamules vertes et rosées, assez brillantes. Tête à squamules rosées sur les bords, vertes dans le centre; rostre à squamules vertes, sillonné ainsi que la base de la tête. Antennes à pubescence courte et très éparse. Prothorax aussi long que large, couvert de squamules vertes et roses, mêlées, parfois avec des traces de bandes latérales roses. Élytres munis de soies courtes et très nombreuses, orués d'un dessin vert sur fond rose, ce dessin vert formé sur chaque élytre d'une tache sur le calus huméral, d'une linéole arquée autour de l'épaule, de deux macules allongées sur le 3ᵉ interstrie, l'une vers la base, l'autre au tiers antérieur, de deux linéoles parallèles, sur le milieu des 3ᵉ et 5ᵉ interstries, d'un grand anneau sur le calus apical encerclant une linéole rose. Fémurs presque entièrement verts; tibias et tarses testacés, pubescents, éparsément squamulés, les tibias antérieurs seuls finement denticulés sur leur bord interne; ongles noirâtres. Dessous en majeure partie

rose, revêtu d'une pubescense dense sur l'abdomen; trochanters verts; épimères et épisternes bordés de vert. Long. : 12 mm.

Cuatro Ojos, type (IX, 1917); Santa Cruz (IX, 1917).

Un spécimen de chacune de ces localités.

Naupactus glaucivittatus Blanch., *Voy. d'Orb.*, 1843. pag. 202, pl. 17, fig. 13.

Villa Montes (XI, 1917); Yacuiva (VIII, 1917).

Naupactus fatuus Bohem., in *Schönh. Gen. Curc.*, I, pag. 588.

Santa Cruz (IX, 1917); Yacuiva (VIII, 1917).

Naupactus flavipennis Bohem., in *Schönh. Gen. Curc.*. VI, 1, pag. 55.

Santa Cruz (IX, 1917).

Naupactus denudatus n. sp.

♂. Subcylindrique, allongé, noir, peu brillant, paraissant dénudé, glabre, revêtu (vu sous un assez fort grossissement) de très petites squamules rondes, cendrées et espacées, muni sur la déclivité postérieure des élytres de soies dressées, blanches, assez courtes, peu nombreuses; écusson et épimères métathoraciques densément couverts de squamules blanches, mates.

Rostre aussi long que la tête, un peu élargie au sommet, légèrement déprimé longitudinalement, muni en son milieu d'un profond sillon longitudinal prolongé en arrière jusqu'au vertex, brièvement déprimé autour de l'échancrure apicale, celle ci forte et bordée de soies rousses, couverte de points médiocres mais serrés et confluents en rides longitudinales sur les bords. Tête à ponctuation éparse, fine, dans le milieu, plus forte et confluente en rides autour des yeux. Yeux oblongs et saillants. Antennes longues et assez robustes; scape brusquement et fortement claviforme au sommet, atteignant juste le bord antérieur du prothorax, revêtu d'un pubescence fine, cendrée, appliquée, peu serrée; funicule revêtu d'une fine pubescence cendrée appliquée, peu serrée, tous ses articles munis en outre vers leur sommet de quelques longues soies hérissées, le 1er article le plus court, obconique, le 2e du double de la longueur du 1er, noueux au sommet, les articles 3-7 peu différents de longueur, peu épaissis au sommet, et au moins du triple aussi longs qu'épais; massue fusiforme, étroite, cendrée. Prothorax aussi long que large à la base, peu plus étroit en avant qu'en arrière, les bords latéraux régulièrement et médiocrement arqués, la base

subtronquée et brièvement relevée, les angles postérieurs aigus; disque peu convexe, couvert de granules applatis, petits et très serrés. Écusson triangulaire revêtu de squamules blanches très serrées. Élytres à peine aussi larges ensemble que le prothorax en son milieu, et à peine du double aussi longs que le prothorax, très légèrement échancrés en arc à leur base, les épaules arrondies, graduellement rétrécis des épaules au sommet; peu convexes en avant, plus fortement au milieu, fortement et brusquement déclives en arrière; assez fortement ponctués-striés, les interstries légèrement convexes, formant en avant quelques rugosités transversales, indistinctement pointillés. Pattes robustes; fémurs lisses, éparsément squamulés et pubescents, les antérieurs fortement renflés, tibias pubescents, parfois d'un brun foncé, villeux au sommet, les antérieurs assez fortement denticulés et faiblement bisinués sur leur tranche interne, brièvement arqués en dedans au sommet et munis d'un petit onglet apical interne; tarses d'un brun foncé, allongés, pubescents hérissés en dessus, spongieux en dessous; onychium long et velu, les ongles grands et robustes. Dessous à ponctuation fine et peu serrée, les points émetant chacun une courte squamule sétiforme. Segment anal marqué en son milieu d'un large et profond sillon longitudinal.

♀. Forme plus large; bords de la tête et rostre plus fortement ponctués striolés; antennes un peu plus courtes; prothorax moins arrondi sur les côtés; élytres dès la base un peu plus larges que le prothorax, graduellement et assez sensiblement élargis jusque un peu au delà du milieu, brusquement rétrécis en arrière, les stries plus fortes, les interstries plus convexes et plus rugueux; tarses plus courts. Long.: 9-11 mm.

Villa Montes, types ♂ ♀ (XI, 1917); Yacuiva (VIII, 1917).

Une vingtaine de spécimens de la forme typique.

Var. *vicinus* n. var. ♀.

Dessus revêtu de squamules grises ou d'un gris-jâune, plus serrés sur les bords, dessous revêtu de squamules de même coloration mais plus fines et moins serrées.

Cette variété d'un fascies bien différent de celui de la forme typique se trouve mélangée à cette dernière à Villa Montes et Yacuiva.

Naupactus quatuordecimpunctatus n. sp.

Oblong, brun; les pattes et les antennes rousses, très densément revêtu de squamules ovales grisâtres, le prothorax avec 14 points

dénudés, les élytres munis de fines soies soulevées mêlées en arrière de longues soies dressées.

Rostre court, pas plus long que large à la base, légèrement triangulaire, plan en dessus, muni à sa base d'un fin sillon médian prolongé en arrière jusqu'au vertex, déprimé et fortement échancré au sommet, muni en outre de chaque côté d'une petite carène obtuse au-dessus de l'insertion antennaire; couvert de squamules serrées, grandes, ovales-acuminées, concaves, entrêmelés de courtes soies, la dépression apicale avec des squamules rondes, planes, peu serrées, les soies plus longues, les cils de la bouche très longs. Antennes médianes, grêles, allongées, pubescentes; scape atteignant juste le bord antérieur du prothorax; tous les articles du funicule beaucoup plus longs que larges, le 2e trés long, une fois et demi aussi long que le 1er, le 3e plus court que le 1er, le 5e plus long que les 4e et 3e, les 6e et 7e plus courts, la massue fusiforme. Tête convexe, squamulée comme la base du rostre, les yeux saillants. Prothorax subcylindrique, aussi long que large, modérément rétréci en avant, légèrement arrondi sur les côtés, la base assez fortement rebordée et tronquée; convexe, la sculpture cachée par le revètement analogue à celui de la tête; orné de 14 points dénudés assez forts, dont 4 dans le milieu disposés en carré, et 5 de chaque côté non loin des bords, 2 en avant, 2 en arrière, 1 gros, en forme de fossette près du milieu, les 3 points internes à peu près en ligne droite, les points extérieurs plus rapprochés entre eux que les points internes extrêmes. Écusson triangulaire, petit, dénudé. Élytres oblongs, leur plus grande largeur au milieu, deux fois et demie aussi longs que le prothorax, ensemble légèrement échancrés en arc, et à peine plus larges à leur base que le prothorax, l'angle latéral de la base marqué et légèrement saillant en dehors; stries fines, ponctuées, interstries larges, légèrement convexes; le revêtement dense, formé de squamules planes ou convexes, les soies longues nombreuses en arrière, rares en avant. Pattes élancées, densément squamulées; fémurs inermes; tibias antérieur spinulés sur leur tranche interne, légèrement arqués au sommet, armés d'un onglet apical interne fort; les autres tibias droits et inermes; 1er article des tarses aussi long que les 2e et 3e ensemble. Dessous densément squamulé, mais criblé de petits points dénudés d'où naissent de courtes soies blanches, le milieu des segments abdominaux dénudé. Long. : 10-12 mm.

Bolivie : Yacuiva (XII, 1917), type.

Symmathetes setulosus n. sp.

Ovale, brun, revêtu d'une couche compacte de squamules d'un gris jaunâtre, entremêlées par places de squamules brun-foncé formant quelques petites taches éparses, muni en outre en dessus de nombreuses soies redressés, claires, assez longues et alignées sur les interstries des élytres, beaucoup plus courtes et dirigées en avant sur le prothorax et la tête.

Rostre aussi long et à sa base aussi large que la tête, cunéiforme, densément squamulé et sétosulé, muni d'un étroit sillon longitudinal commençant dans une petite fovéole placée en son milieu et prolongée en arrière jusque sur le vertex. Antennes assez courtes, ferrugineuses, sétosulées; articles 3-7 du funicule obconiques, la massue ovale, assez grosse. Yeux coniques, très saillants. Prothorax aussi long que large à la base, cette dernière rebordée et à peine aussi large que le bord antérieur, les côtés médiocrement arrondis; marqué de trois impressions transversales, étroites, l'une derrière le bord antérieur plus profonde vers les côtés, la deuxième courte, latérale vers le milieu des côtés, la troisième en avant du rebord basal. Élytres ovales à peine du double de la longueur du prothorax, convexes, assez fortement ponctués-striés, les points des stries dépourvus de soies, les interstries beaucoup plus larges que les stries, convexes, munis chacun d'un rang de soies. Pattes squamulées et sétosulées; tibias antérieurs fortement denticulés sur leur tranche interne. Long. : 5-5,2 mm.

Brésil : Goyaz, Porto Nacional (coll. E. Cordier et la mienne). Quinze spécimens; Bolivie : Villa Montes (XI, 1917).

L'unique spécimen de Bolivie a les côtés du prothorax et une fascie élytrale postmédiane plus clairs mais il est identique quant aux autres caractères aux spécimens du Brésil.

Menetypus maculatus n. sp.

Brun roux, revêtu en dessus de squamules d'un blanc teinté de crême, les élytres ornés d'une tache médiane et latérale et d'une fascie transversale antéapicale d'un blanc plus clair, la tache et la fascie bordées de brun. Antennes, tibias et tarses d'un testacé clair.

Rostre plus court que la tête, subparallèle, densément squamulé, finement sillonné longitudinalement, éparsément ponctué. Tête convexe à ponctuation éparse. Yeux assez saillants. Prothorax visiblement plus long que large à la base, cette dernière notablement plus

étroite que le bord antérieur, les côtés médiocrement dilatés-arrondis au tiers antérieur, assez fortement étranglés vers la base, les angles postérieurs droits; transversalement impressionné vers le tiers antérieur et le long du rebord basal; couvert de gros points, profonds, peu serrés; densément squamulé. Écusson petit triangulaire. Élytres obtusément arrondis aux épaules, élargis de ces dernières jusqu'au delà du milieu, rétrécis-acuminés ensemble au sommet; plans sur le disque, brusquement déclives en arrière, la suture formant une petite gibbosité au sommet de la déclivité traversé par la fascie blanche et ondulée; stries ponctuées assez fortes, les interstries convexes. Pattes antérieures très développées, les fémurs très gros, squamulés et pubescents, les tibias arqués pubescents et denticulés sur leur tranche interne. Dessous blanc. Long. : 5-6 mm.

République Argentine : Río Paraná, territoire des Missions, type (ma coll.); Bolivie : Santa Cruz (IX, 1917), Cuatro Ojos (XI, 1917).

Menetypus albus n. sp.

Brun foncé, les pattes et les antennes ferrugineuses, revêtu en dessus et en dessous d'une couche compacte de squamules blanches.

Rostre à peine plus étroit et un peu plus long que la tête, largement et assez profondément déprimé en dessus, muni en son milieu d'un sillon longitudinal fin et court, profondément échancré au sommet, l'incision ciliée, couvert ainsi que la tête de points profonds et espacés. Antennes subglabres, le sommet des articles muni seulement de quelques cils courts, premier article du funicule subconique beaucoup plus gros et plus long que le 2e, la massue oblongue. Yeux saillants. Prothorax plus long que large à la base, les bords latéraux dilatés-arrondis dans leur milieu, étranglés légèrement en avant, fortement à la base, la base beaucoup plus étroite que le bord antérieur étroitement rebordée et précédée d'une impression transversale étroite; disque à convexité irrégulière, largement impressionné transversalement en avant, le bord antérieur relevé, couvert de gros points profonds mais espacés. Écusson blanc. Élytres à peine plus larges à la base que le prothorax au milieu, les épaules brièvement arrondies, graduellement élargis des épaules jusque vers le tiers postérieur; ponctués-striés, les points serrés, beaucoup moins gros que ceux du prothorax, les interstries convexes. Pattes éparsément ponctuées, couvertes de fines squamules blanches; tibias antérieurs presque droits, denticulés sur leur tranche interne. Long. : 4,5-5 mm.

République Argentine : Chaco de Santiago, type (ma coll.) ; Bolivie : Villa Montes (XI, 1917) ; Brésil : Mendès à 92 kilom. du Rio de Janeiro (ma coll.).

BRACHYSTYLODES n. gen. (Cyphini).

Rostre court, épais ; pourvu de cicatrices mandibulaires, échancré au sommet, l'échancrure ciliée sur ses bords, scrobes latéraux, étroits, profonds, en avant, arqués, s'élargissant dès l'insertion des antennes, s'effaçant devant les yeux. Antennes dépassant à peine la base du prothorax, le scape arqué, épaissi au sommet atteignant le bord postérieur de l'œil, les deux premiers articles du funicule allongés, le deuxième le plus long, la massue ovale. Yeux latéraux, légèrement oblongs, convexes. Prothorax subcylindrique, tronqué en avant, faiblement bisinué à la base. Écusson arrondi. Élytres bisinués et plus larges que le prothorax à la base, pourvus de dix stries-ponctuées, entières. Pattes antérieures un peu plus longues et peu plus robustes que les autres ; fémurs inermes ; tibias antérieurs légèrement arqués en dedans au sommet, denticulés sur leur tranche interne, tibias intermédiaires et postérieurs à corbeille ascendante, longue, densément ciliée, celle des tibias postérieurs fermée et squamulée au sommet ; tarses spongieux en dessous, les deux premiers articles allongés, le 3e plus court, bilobé ; ongles soudés à la base. Deuxième segment abdominal beaucoup plus long que les 3e et 4e réunis, séparé du premier par une suture fine et légèrement anguleuse au milieu ; saillie intercoxale postérieure plus large que la hanche, légèrement arquée en avant. Épimère mésothoracique s'avançant le long de l'épisterne jusqu'à la base même de l'élytre. Insecte ailé.

Ce genre voisin de *Brachystylus* Schœn. s'en distingue par la conformation des scrobes et des tibias.

Brachystylodes pilosus n. sp.

Brun, les pattes ferrugineuses, revêtu de squamules d'un brun foncé et blanchâtres, ces dernières formant un dessin irrégulier et variable composé de deux bandes longitudinales sur le prothorax, parfois reliées entre elles par une bordure basale, d'une bordure large et irrégulière aux élytres, d'une linéole sur la base du 3e interstrie, d'une tache transversale près du milieu des 3e et 4e interstrie, d'une fascie transversale au sommet de la déclivité postérieure le plus sou-

vent reliée à la bordure apicale par une bande suturale; dessous et pattes revêtus de squamules blanchâtres; muni en outre de soies en majeure partie brunes, assez longues, dressées et alignées sur les interstries des élytres, plus courtes dirigées en avant sur le prothorax la tête et le rostre.

Tête et rostre à ponctuation allongée, confluente en rides longitudinales voilées par le revêtement, parcourus par un sillon longitudinal étroit et profond. Rostré déprimé au sommet, plus court que la tête. Antennes ferrugineuses, le scape squamulé et pubescent, tous les articles du funicule plus longs que larges ainsi que la massue. Prothorax moins long que large, à peine arqué sur les côtés rugueux-granulé, la granulation voilée par le revêtement. Élytres, à la base presque du double de la largeur du prothorax, les épaules en angle droit brièvement arrondi, un peu élargis des épaules jusqu'au tiers postérieur, arrondis ensemble au sommet; convexes, fortement déclives en arrière, fortement striés-ponctués, les points serrés, les interstries convexes et plus larges que les stries. Pattes sétosulées, les fémurs médiocrement claviformes, les antérieurs plus épais et armés en dessous de 3-4 épines courtes, les tibias intermédiaires et postérieurs droits; tarses squamulés et pubescents en dessus. Long.: 5-7 mm.

Bolivie: Cuatro Ojos (XI, 1917), type; Santa Cruz (IX, 1917), nombreux spécimens.

Cyphus inhalatus Germ.

Bolivie: Lagunillas (XI, 1917); Yacuiva (VIII, 1917).

Compsus molitor Rosensch.

Bolivie: Santa Cruz (IX, 1917); Villa Montes (XI, 1917).

Compsus albarius Bohem.

Bolivie: Cuatro Ojos (IX, 1917). Un spécimen.

Compsus argyreus L.

Bolivie: Santa Cruz (IX, 1917); Cuatro Ojos (IX, 1917); Izozo (VIII, 1917).

Nombreux spécimens de cette espèce variable de taille et de coloration.

Compsus bimaculatus n. sp.

Entièrement recouvert d'un enduit crétacé chaque élytre orné d'une macule d'un brun noir placée un peu en arrière du milieu sur les 3e, 4e et 5e interstries.

Rostre plus long que la tête, peu élargi au sommet, muni d'un sillon médian assez large prolongé sur la tête. Tête légèrement impressionnée latéralement en dessus contre les yeux et assez fortement impressionné transversalement derrière les yeux. Yeux convexes. Antennes à soies blanches, les deux premiers articles du funicule de même longueur, les suivants obconiques, épais, peu plus longs qu'épais, le 5e le plus court, la massue grisâtre. Prothorax plus long que large, un peu plus étroit en avant qu'à la base, faiblement arqué sur les côtés, le disque irrégulièrement convexe, marqué de fossettes profondes dont les plus grandes sont disposées en deux rangées transversales. Écusson arrondi. Élytres à épaules en angle obtus, une fois et demie aussi larges et plus du double aussi longs que le prothorax: séparément subacuminés au sommet; ponctués-striés, les points gros et peu serrés, les interstries convexes, les impairs plus fortement relevés, le 3e muni au sommet de la déclivité postérieure d'un gros tubercule obtus, le 5e terminé au milieu de la déclivité postérieure par un petit tubercule; convexe, le disque presque plan entre les troisièmes interstries, la déclivité postérieure verticale; les interstries munis chacun d'un rang de soies blanches, très courtes, épaisses, espacées et presque couchées. Long.: 7-8 mm.

République Argentine: Chaco de Santiago, Río Salado, type (ma coll.); Bolivie: Izozo (VIII, 1917). Deux spécimens.

Polyteles Guerini Bohem.

Bolivie: Villa Montes (XI, 1917).

Polyteles Steveni Bohem.

Yacuiva (XII, 1917). Un spécimen.

Platyomus elegantulus n. sp.

Brun, densément recouvert en dessus de squamules d'un blanc de neige, la tête; le rostre, les antennes, les pattes, le dessous, trois bandes longitudinales sur le prothorax, le bord latéral et deux fascies transversales dentelées sur les élytres d'un beau jaune-brun.

Rostre plus long que la tête, assez fortement impressionné de l'insertion antennaire au sommet, marqué d'un étroit sillon médian commençant près de sa base et prolongé jusqu'au vertex. Tête transversalement impressionnée derrière les yeux, ornée d'une tache blanche contre les yeux, en arrière, et d'une bande blanche latérale en dessous, plus ou moins longuement prolongée en avant sous le rostre et continuant en arrière celle du prothorax. Antennes très robustes; scape arqué, fortement applati, très épais dès la base, atteignant juste le bord antérieur du prothorax; funicule à deuxième article subconique, plus long que le 1er, aussi long que les 3e et 4e réunis, les 3e et 4e aussi longs qu'épais, le 5e, 6e, 7e transversaux, graduellement élargis, rembrunis, la massue ovale acuminée et noire. Yeux convexes. Prothorax faiblement transversal, trapézoïdal, les côtés presque droits, la base fortement bisinuée mais à peine plus large que le bord antérieur; peu convexe, marqué sur les côtés de quelques rugosités transversales faibles et derrière le bord antérieur d'une ligne enfoncée; plus profonde latéralement; orné de quatre bandes longitudinales blanches et de trois brunes dont la médiane est élargie en avant. Écusson triangulaire, blanc teinté de jaune à la base. Élytres fortement bisinués et une fois et demi aussi larges à la base que le prothorax, les épaules obtusément arrondies et à peine projetées latéralement, le bord latéral faiblement sinué derrière l'épaule, convexes, finement ponctuées-sériées, les points distants, les interstries larges et faiblement convexes; ornés de deux fascies transversales jaunes, dentelées, composées de linéoles d'inégale longueur, placées l'une un peu avant le milieu, l'autre au sommet de la déclivité postérieure. Dessous et pattes jaunes; pattes munies de très courtes soies claires. Long. : 9-10 mm.

République Argentine : Chaco de Santiago, type (ma coll.); Tucumán : Colmenar (24, XII, 1899) (ma coll.). Bolivie : Lagunillas (XI, 1917). Un spécimen frotté.

L'un des spécimens de Santiago est dépourvu de la 1re fascie élytrale et la 2e fascie se réduit à des taches isolées; par contre ces mêmes fascies sont très developpées chez les spécimens du Tucumán qui en ont en outre une 3e basale de sorte que le dessin élytral est formé d'une série de linéoles blanches et jaunes alternées.

Eustylus bolivianus Marsh., *Ann. Nat. Hist.*, 1916, pag. 463.

Bolivie : Cuatro Ojos (XI, 1917); Santa Cruz (IX, 1917).

Hyphantus sp. ?

Santa Cruz, un spécimen appartenant à une espèce probablement nouvelle.

BOLIVIANUS n. gen. **(Phytoscaphides).**

Rostre beaucoup plus long et beaucoup plus étroit que la tête, plan en dessus, latéralement comprimé, les mandibules squamulées, triangulairement échancré au sommet, les ptérygies peu saillantes en dehors; scrobes latéraux, foveiformes et profonds en avant, s'élargissant fortement en devenant superficiels en arrière dès l'insertion des antennes; cette dernière partie entièrement squamulée, limité inférieurement et supérieurement par une fine arète légèrement flexueuse, atteignant le bord antérieur des yeux où ils sont aussi larges que ces derniers, la partie fovéiforme en partie visible de dessus. Tête courte, les yeux grands, latéraux, légèrement ovales, presque plats. Antennes subapicales, grêles; scape atteignant le bord antérieur du prothorax, faiblement épaissi au sommet; funicule de sept articles, tous plus longs que larges, le deuxième très long et presque du double aussi long que le premier, la massue oblongue, acuminée. Prothorax bisinué à sa base, le bord antérieur légèrement sinueux, faiblement avancé sur le vertex, latéralemente muni de lobes oculaires larges, arrondis, mais peu saillants et pourvus d'une frange de cils courts. Un écusson assez grand. Élytres bisinués et beaucoup plus larges que le prothorax à leur base, les épaules brièvement arrondies, munis de 10 stries-ponctuées entières. Pattes intermédiaires un peu plus courtes et un peu plus grêles que les autres; fémurs inermes, les postérieurs plus épais et épaissis dès la base; tibias droits, les antérieurs et intermédiaires faiblement élargis et brièvement arqués en dedans au sommet, les postérieurs plus fortement élargis au sommet, leur corbeille tarsale fortement caverneuse et squamulée. Tarses longs, le 3e article fortement bilobé, l'onychium long terminé par deux ongles libres et robustes.

Prosternum largement échancré en arc en avant. Hanches antérieures contiguës, les intermédiaires étroitement séparées, les postérieures largement séparées, la saillie intercoxale postérieure plus étroite que la hanche et subtronquée en avant. Deuxième segment ventral plus court que les 3e et 4e ensemble mais considérablement plus long que chacun d'eux pris isolément, séparé du 1er par une suture légèrement sinueuse au milieu, le cinquième en triangle équila-

téral aussi long que les 3e et 4e réunis. Épisternes métathoraciques assez larges. Épimères mésothoraciques larges, atteignant le bord postérieur du prosternum sur une assez grande longueur.

Insecte ailé.

Par l'ensemble de ses caractères ce genre appartient aux *Phytoscaphides* de Lacordaire.

Bolivianus variabilis n. sp.

Brun, les pattes et les antennes d'un rouge ferrugineux, densément revêtu en dessus et en dessous de squamules petites, rondes, vertes (type) ou cendrées (var.), muni en outre de soies blanchâtres, excessivement courtes et couchées sur les élytres, un peu plus longues et dressées sur le prothorax, la tête et le rostre.

Rostre densément squamulé, muni d'une fine ligne longitudinale prolongée sur la tête. Antennes à pubescence cendrée, courte et éparse. Prothorax un peu plus large que long, subcylindrique et d'égale largeur à ses extrémités (♂) ou un peu plus court, et plus large à la base qu'au bord antérieur (♀), faiblement arrondi sur les côtés (♂), un peu plus fortement dans le tiers postérieur (♀); médiocrement convexe, transversalement impressionné derrière le bord antérieur, la base fortement bisinuée et légèrement rebordée, finement ponctué-rugueux, mais la ponctuation cachée par le revêtement. Écusson arrondi au sommet, densément squamulé. Élytres subparallèles jusqu'au milieu, séparément acuminée brièvement au sommet; médiocrement convexes, la déclivité postérieure brusque, les stries fines, leurs points allongés et serrés; interstries larges, presque plans, de largeur peu régulière, le 6e visiblement élargi vers son milieu. Pattes pubescentes, les fémurs finement et peu densément squamulés.

♀. Tibias antérieurs munis de quelques petits denticules sur leur tranche interne.

♂. Forme plus étroite, les tibias postérieurs armés d'un fort onglet dentiforme à l'angle apical interne. Long. : 5-6 mm.

Bolivie : Villa Montes (XI, 1917), types ; Santa Cruz (IX, 1917); Cuatro Ojos (IX, 1917); Yacuiva (XII, 1917); Lagunillas (XI, 1917). Nombreux spécimens.

La coloration varie du vert glauque uniforme au cendré-blanchâtre uniforme.

Conothorax luctuosus Lac.

Lagunillas (XI, 1917); Yacuiva (VIII, 1917).

WAGNERIELLA n. gen. (1) **(Promécopides).**

Rostre incliné, presque aussi large et un peu plus court que la tête, échancré au sommet, les ptérygies peu saillantes en dehors; pourvu de cicatrices mandibulaires; scrobes latéraux, linéaires, profonds, arqués, terminés en arrière au niveau inférieur des yeux dont ils restent assez eloignés, leur partie antérieure visible de dessus. Yeux grands, oblongs, latéraux, modérément saillants. Antennes submédianes; scape atteignant à peine le bord postérieur de l'œil, très différent suivant le sexe: ♂ arqué, mince à la base s'élargissant très fortement, son sommet plus large que celui des fémurs, en outre fortement comprimé applati; ♀ mince, brusquement et modérement épaissi au sommet, indistinctement arqué à la base et non comprimé; funicule filiforme de sept articles, le 1er court, le 2e excessivement long, trois fois aussi long que le 3e, ce dernier trois fois aussi long qu'épais et plus long que le 1er, les suivants plus longs qu'épais, la massue oblongue articulée. Prothorax tronqué en avant, légèrement bisinué à la base. Écusson médiocre. Élytres légèrement bisinués et notablement plus larges que le prothorax à leur base, brièvement arrondis aux épaules, brièvement arrondis au sommet, pourvus de 10 stries-ponctuées entières. Pattes médiocres, les antérieures à peine plus longues que les postérieures; fémurs inermes; tibias presque droits, les antérieurs un peu épaissis au sommet, les postérieurs à corbeille fortement caverneuse et squamulée; tarses intermédiaires et postérieurs robustes, le 1er article allongé, le 3e court et profondément bilobé; tarses antérieurs différents suivant le sexe: ♂ 1er article très large, arrondi, dilaté en forme de palette, le 2e presque aussi long mais beaucoup plus étroit que le 1er, triangulaire, le 3e court, large, profondément bilobé; ♀ 1er article subcylindrique, peu élargi, le 2e triangulaire et plus court, le 3e bilobé; le 4e article long, terminé par deux ongles robustes et libres.

Échancrure buccale petite, arrondie. Prosternum entier sur son bord antérieur. Hanches antérieures contiguës, les intermédiaires très rapprochées, les postérieures arrondies, médiocres, non contiguës au bords latéraux des élytres, la saillie intercoxale postérieure plus étroite que les hanches et obliquement tronquée de chaque côté en avant. Deuxième segment ventral un peu plus long que le troisième, sa suture avec le premier arquée en avant au milieu. Épisternes

(1) Dédié à MM. E. et R. Wagner.

métathoraciques assez larges. Épimères mésothoraciques acuminés au sommet, atteignant l'angle des élytres et du prothorax. Insecte ailé.

Le fascies de ce genre rappelle celui de certains *Cyphides* de petite taille, mais les pièces buccales visibles rattachent ce genre aux *Promécopides* malgré l'absence de lobes oculaires au prothorax.

La conformation spéciale des antennes et des tarses antérieurs chez le ♂ permet de le reconnaître aisément.

L'espèce typique est la suivante :

Wagneriella lineata n. sp.

Brun, les pattes et les antennes d'un ferrugineux foncé, revêtu en dessus de petites squamules brunes et blanchâtres, ces dernières formant quatre bandes longitudinales sur le prothorax et quelques linéoles sur les élytres particulièrement vers le sommet.

Rostre transversal, plan, densément couvert de squamules brunes sur le disque, cendrées sur les bords et en dessous. Tête courte, peu convexe, munie d'un fin sillon longitudinal, médian et prolongé sur la base du rostre, squamulée de brun en dessus, de cendré autour des yeux en dessous. Antennes à pubescence cendrée, très éparse, la massue foncée. Prothorax subcylindrique, fortement transversal, faiblement arqué sur les côtés, d'égale largeur à ses extrémités; convexe, marqué d'un fin sillon transversal derrière le bord antérieur, plus profond sur les côtés, et d'une légère impression transversale devant la base; densément et finement ponctué-granulé, mais la sculpture voilée par le revêtement, revêtu de squamules serrées, les squamules blanches formant quatre bandes séparées par trois bandes brunes dont la médiane est assez large, les deux latérales étroites. Écusson triangulaire, ponctué, squamulé, impressioné à son centre. Élytres une fois et demie aussi large et quatre fois aussi longs que le prothorax subparallèles jusqu'au quart apical, le calus huméral saillant; convexes, à déclivité postérieure oblique, les stries fines, un peu flexueuses en avant, ponctués, les points petits, serrés; interstries larges, faiblement convexes, finement ponctués-granulés, la sculpture voilée par le revêtement; couvert de squamules brunes et blanchâtres, ces dernières formant des linéoles sur le tiers antérieurs des interstries 6-11, et sur les interstries 2-8 sur la déclivité postérieure, le calus apical foncé. Fémurs épais, peu densément et finement squamulés; tibias rugueux et pubescents; premier article des tarses postérieurs presque du double aussi long que le 2e. Dessous squamulé de cendré. Long. : 7-8 mm.

République Argentine : Chaco de Santiago, types (ma coll.; acquis de Le Moult ex Wagner). Bolivie : Lagunillas (XI, 1917). Un spécimen ♀, entièrement brun et défloré.

Wagneriella albula ♂ n. sp.

Brun, les pattes et les antennes ferrugineuses, densément revêtu en dessus de squamules cendrées teintées de bleuâtre sur le disque, de jaune orange sur les bords du prothorax, légèrement teintées de jaunâtre sur les élytres; pattes en totalité et scape des antennes densément revêtus de petites squamules d'un cendré. Teinté de bleuâtre; dessous cendré.

Rostre légèrement rétréci en avant, fortement impressionné au sommet. Prothorax un peu plus large et plus fortement arrondi sur les côtés que chez l'espèce précédente. Écusson petit, squamulé. Élytres graduellement quoique faiblement rétrécis dès les épaules, le calus huméral à peine saillant; stries plus fortes; interstries convexes, les impairs un peu plus larges que les pairs; couvert de squamules serrées entremêlées de nombreuses et très courtes soies dressées, claires. Premier article des tarses antérieurs en palette plus large que le sommet du scape; premier article des tarses postérieurs notablement moins épais que dans l'espèce précédente. Quant au reste semblable à *W. lineata*. Long. : 7 mm.

République Argentine : Chaco de Santiago, type (ma coll.). Bolivie : Santa Cruz (IX, 1917).

L'unique spécimen de cette dernière provenance ne diffère du type que par la coloration des bords du prothorax qui est cendrée-blanchâtre au lieu d'être d'un jaune orange, les élytres d'un cendré uniforme tandis que chez le type ils ont quelques petites taches foncées mal définies.

Promecops carinicollis n. sp.

Noir brun, les pattes et les antennes ferrugineuses, revêtu de squamules rondes d'un brun foncé sur le dessus du corps, cendrées en dessous, sur la déclivité postérieure des élytres, sur l'écusson et une tache latérale triangulaire posthumérale, muni en outre de soies dressées assez longues de la coloration du fond.

Rostre un peu plus long que la tête, légèrement rétréci au niveau de l'insertion antennaire, plan et finement sillonné longitudinalement, le sillon prolongé sur la tête, densément squamulé excepté au sommet. Tête munie de soies dressées presque aussi longues que celles

du prothorax, le front entre les yeux aussi large que le rostre entre l'insertion des antennes. Antennes pubescentes, les articles du funicule graduellement épaissis, la massue aussi longue que les 4 articles précédents réunis. Prothorax transversal, aussi large en avant qu'à la base, fortement arqué sur les côtés, sa plus grande largeur au milieu, le bord antérieur subtronqué, les lobes oculaires larges, arrondis et avancés; couvert de gros points, assez serrés et squamulés, muni en son milieu d'une carène fine, noire, lisse, atteignant la base, mais non le sommet. Écusson arrondi, blanc. Élytres à peine une fois et demie aussi larges et deux fois et demie aussi longs que le prothorax, légèrement échancrés en arc à la base, les épaules en angle obtus, net, les bords latéraux parallèles jusqu'au tiers apical, arrondis ensemble au sommet; convexes, assez fortement ponctués-striés, les points munis au fond d'une squamule ronde et blanche, les interstries convexes, plus larges que les stries, munis chacun d'un rang de soies dressées; ornés chacun d'une tache cendrée, grande, triangulaire, s'étendant du bord latéral, contre l'épaule jusque sur le 3e interstrie où elle est très rétrécie; la déclivité postérieure est aussi entièrement cendrée. Pattes assez courtes et assez robustes, hérissées de nombreuses soies blanches, les fémurs couverts en outre de squamules cendrées et ornés vers leur milieu d'un large anneau brun; corbeilles tarsales postérieures assez fortement caverneuses; ongles soudés à la base. Long. : 3-3,2 mm.

Brésil : Yatahy, type (ma coll.). Bolivie : Santa Cruz (IX, 1917).

Promecops brevis n. sp.

Brun-noir, les antennes et les tarses ferrugineux, revêtu en dessous de squamules cendrées, en dessus de squamules variées brun-noir, brun-clair et cendrées-jaunâtres, ces dernières couvrant l'écusson, la déclivité postérieure des élytres et sur chacun de ces derniers formant une grande tache humérale; muni en outre de soies de la coloration du fond, assez longues et presque verticales sur les élytres, plus courtes et penchées en avant sur le prothorax la tête et le rostre.

Rostre à peine plus long et très peu plus étroit que la tête, plan, densément squamulé, finement sillonné au milieu, le sillon antéoculaire limité en dedans par une assez vive et courte carène. Tête plane, squamulée et sillonée comme le rostre. Antennes finement pubescentes, la massue oblongue. Prothorax aussi long que large en avant, les bords latéraux faiblement arqués en avant jusqu'au milieu, plus for-

tement rétrécis en arrière, la base subtronquée et visiblement plus étroite que le bord antérieur, le bord antérieur subsinué et légèrement avancé sur le vertex, les lobes oculaires larges, arrondis et avancés; marqué de gros points profonds, squamulés, confluents, particulièrement vers les bords, en sillons transversaux rendant la surface inégale; couvert de squamules d'un brun foncé, orné de chaque côté d'une bande peu régulière d'un blanc-jaunâtre. Écusson arrondi, plan, blanchâtre. Élytres en ovale court, peu plus longues que larges en leur milieu, légèrement échaucrés en arc à leur base, les épaules très obliques, l'angle huméral très obtus et peu accusé, les côtés arqués, brièvement arrondis ensemble au sommet; fortement convexes, la convexité (vue de côté) régulière et présentant son maximum vers le milieu du dos; fortement ponctués-striés, les points pupillés, les interstries très convexes, munis chacun d'un rang de soies dressées. Pattes hérissées de soies cendrées et squamulées, les fémurs ornés en leur milieu d'un large anneau brun. Corbeilles tarsales postérieures assez fortement caverneuses; ongles cornés à la base. Long. : 4 mm.

Bolivie : Santa Cruz (IX, 1917).

Promecops puncticollis n. sp.

Brun noir, le revêtement blanc en dessous, d'un brun rouge en dessus, varié sur les élytres de nombreuses petites taches blanches et d'un brun foncé; l'écusson blanc; le prothorax avec deux bandes dorsales, longitudinales, foncées, et quatre points blancs transversalement disposés vers le milieu.

Rostre légèrement conique (vu de face), les pterygies à peine saillantes latéralement, beaucoup plus long et à sa base aussi large que la tête, plan en dessus et muni d'un fin sillon longitudinal presque indistinct sur la tête, densément squamulé. Tête très fortement transversale, très courte, le front entre les yeux notablement plus large que le rostre entre l'insertion des antennes. Antennes ferrugineuses presque glabres, la massue oblongue. Prothorax aussi long que large à la base, d'égale largeur à ses extrémités, les côtés peu arqués en avant, presque rectilignes dans leur moitié postérieure, le bord antérieur légèrement sinué et avancé sur la tête, les lobes oculaires larges, arrondis, la base nettement bisinuée; médiocrement convexe, à ponctuation fine, serrée, peu visible; le revêtement dense, orné de deux bandes discales foncées, de quatre points blancs placés sur une ligne transversale vers le milieu, deux rapprochés sur les bandes fon-

cées, deux sur les bords, et un peu plus en avant, ayant en outre de chaque côté du milieu, près du bord antérieur deux point blancs rapprochés. Écusson grand, arrondi, plan, blanc. Élytres une fois un tiers aussi larges et trois fois aussi long que le prothorax, subparallèles jusqu'au tiers postérieur, l'angle huméral obtus, net, largement arrondis ensemble au sommet; régulièrement convexes, fortement ponctués-striés, les points pupillés, les interstries peu plus larges que les stries, convexes, munis d'un rang de soies excessivement courtes, arquées, couchées, visibles seulement de profil avec un assez fort grossissement. Pattes ferrugineuses densément couvertes de squamules cendrées et munies de quelques poils cendrés soulevés, les fémurs postérieurs annelés de brun; corbeilles tarsales postérieures médiocrement caverneuses; ongles cornés à la base. Long. : 3,5-4 mm.

République Argentine : Río Paraná, territoire des Misiones, type (ma coll.); sept individus. Bolivie : Santa Cruz (IX, 1917). Un spécimen.

Promecops carinellus n. sp.

Brun noir, le revêtement d'un jaune grisâtre plus foncé, brunâtre, sur le disque du prothorax la base et une vague fascie transversale postmédiane des élytres.

Rostre à peine plus long que la tête, large, nettement et fortement rétréci au niveau de l'insertion antennaire, ses bords fortement sinués, les ptérygies fortement saillantes en dehors, longitudinalement déprimé et muni d'un fin sillon médian, densément squamulé. Tête large, le front entre les yeux un peu plus étroit que le rostre entre l'insertion des antennes. Antennes robustes, ferrugineuses, assez densément pubescentes de cendré, la massue oblongue. Prothorax un peu plus long que large à la base, presque d'égale largeur à ses extrémités, les côtés faiblement dilatés un peu en avant du milieu, le bord antérieur largement avancé sur la tête, les lobes oculaires très larges mais relativement peu avancés, la base faiblement bisinuée; médiocrement convexe, un peu inégal, marqué de quatre légères impressions transversalement disposées derrière le bord antérieur, ces impressions à revêtement plus foncé, muni en son milieu, sur le tiers basal d'une très fine carène lisse; ponctuation fine, serrée; peu visible, cachée par le revêtement, ce dernier dense et entremêlé de quelques très courtes soies couchées. Écusson arrondi, grand, cendré. Élytres une fois et demie aussi larges et trois fois aussi longs que le prothorax, subparallèles jusqu'au tiers postérieur, isolément

faiblement arqués à leur base, les épaules saillantes, peu obliques, en angle faiblement obtus; médiocrement convexes, la déclivité postérieure brusque, presque verticale; fortement ponctués-striés, les points ronds, assez espacés, munis chacun d'une squamule ronde et plus claire que le reste du revêtement, les interstries plus larges que les stries, faiblement convexes, munis d'un rang de soies courtes, arquées et soulevées, de la coloration du fond; la portion foncée du revêtement formant à la base une large tache, mal limitée ne couvrant ni les épaules ni les bords latéraux. Pattes robustes, densément squamulées, les fémurs finement et éparsément pubescents, les tibias hérissés de soies courtes et blanches; corbeilles tarsales postérieures fortement caverneuses; ongles soudés à la base. Long. : 5 mm.

Bolivie : Santa Cruz (IX, 1917).

(À suivre.)

BIBLIOGRAFÍA

Notes sur les courroies de transmission, par R. Delaveuve, ingénieur. A. M. Librairie Polytechnique Ch. Béranger, rue des Saint-Pères, 15, Paris, 1922.

Se caracteriza esta publicación por el hecho de reunir, además de las fórmulas usuales y de los detalles de fabricación que en los manuales y en obras generales se encuentran, tablas y gráficos que facilitan el trabajo en la elección y determinación de diferentes clases de correas.

Trae también un estudio matemático algo extendido, pero claro, del teorema de Prony, con el cual sienta la relación de adherencia en el momento de producirse el deslizamiento, teniendo en cuenta la influencia de la fuerza centrífuga; pero sobre todo debe señalarse un cuadro de fórmulas aproximadas para el cálculo del ancho de las correas y las láminas intercaladas en el texto. Gráficos semejantes también suelen presentarse en otras publicaciones, pero aquí se ofrecen en forma práctica para el cálculo de correas balata y de cuero simple o caucho vulcanizado.

Como el autor hace presente la influencia de la postguerra en la fabricación de correas, podríamos decir que, en breves páginas, su publicación reune lo más interesante y eficaz sobre ese tema.

H. Shehan.

Analyse générale des eaux, par F. Touplain. Editeur Ch. Beranger, 1922.

El jefe de los laboratorios de física e higiene del Instituto de hidrología y climatología de Francia, autor de la obra cuyo título anotamos, se ha propuesto, y lo ha conseguido efectivamente, procurar, a quienes se dedican a investigaciones analíticas aplicadas a aguas, un plan metódico de determinaciones de este orden.

Este plan, dentro de las características de selección que se le ha dado, permite al analizador poseer la documentación necesaria, expuesta en forma clara y concisa, para llevar a cabo un análisis de agua, dentro de las pautas que impone un punto de vista moderno y la consecuente interpretación de resultados sujeta a los dictados racionales que en cada caso deben aplicarse.

No diremos que M. Touplin haya hecho una obra completa de análisis de aguas, en el sentido de una documentación bibliográfica y exposición general de métodos, pues que no ha sido éste precisamente su objeto, sino que constituye una guía que, dentro de normas estrictas, con métodos seleccionados, es capaz de prestar toda su utilidad a quien desee entrar directamente en la cuestión.

Las determinaciones físicas, tales las de refractometría, crioscopía y resistividad eléctrica, merecen la atención del autor ; asimismo el empleo del espectrofotómetro de Arsonval para ensayos calorimétricos. Las determinaciones químicas abarcan los datos comunes y aquellos que interesan a las aguas minerales. Los métodos adoptados son los que se consideran, en los laboratorios, como los más convenientes por su exactitud o aplicabilidad.

Sigue un apéndice con las leyes, reglamentos y decretos referentes a cuestiones hidro y climatológicas que rigen en Francia, así como un mapa hidromineral de este mismo país.

R. VANOSSI.

Teoría Ravasini de la disgregación del electrón.

Después de largas y exactas indagaciones sobre aquellas masículas al límite de la cognoscibilidad — que por su descubridor fueron nombradas hipelectrones, mientras por Ehrenhaft y Targonski fueron denominadas subelectrones, — el afamado cosmólogo profesor doctor Jorge José Ravisini — conocido por muchas teorías que sirvieron a sintetizar el conocimiento de los fenómenos, entre las cuales se distinguen la teoría del Monelectrónica, que ha traído el monismo en el dominio de la ciencia, y la teoría del Autocatálisis, que explica el origen de la vida orgánica — ha llegado a recoger en una concepción sintética el dominio de la electronología, ya sistematizado, y el dominio de la hipelectronología, apenas superficialmente explorado.

Ehrenhaft y Targonski, por vía experimental, han llegado a confirmar la presencia de unidades con masa electromagnética inferior a la del electrón, y a calcular la masa del mismo en 1 : 2000 del electrón. El doctor Ravasini, basado sobre los trabajos de Targonski y de Ehrenhaft, como sobre la demostración del peso de la luz por Einstein y Mohorovicic, y sobre la absorción de la fuerza centrípeta por la materia, demostrada por el profesor Majorana, ha venido a la conclusión que existen unidades inferiores al electrón, y que estas unidades son aquellas que forman la luz, el calor, los rayos actínicos, los rayos γ, los rayos Röntgen, etc.

El electrón, como el átomo, es un sistema planetario en el cual las masículas se equilibran, como los planetas, en el interior del sistema. Y como el átomo se disgrega en sus partes, así se disgrega el electrón. La radioactividad divide los átomos mayores en menores, liberando contemporáneamente electrones; ¿ cuál es el fenómeno análogo en el cual el electrón se disgrega liberando hipelectrones ?

De los estudios del doctor Ravasini resulta que en muchos fenómenos se observa la disgregación de electrones. Recordamos algunos de los mejor estudiados :

1º Los electrones de la electricidad, cuando encuentran un obstáculo, se disgregan con el empuje enorme de su masa lanzada a 300.000 kilómetros por segundo contra la materia mala conductriz, y resultan hipelectrones que dan origen a los fenómenos térmicos, luminosos y actínicos, producidos por la energía eléctrica;

2° Los electrones de los rayos β, emitidos por la materia radioactiva, empujando contra el vidrio u otras materias, se disgregan en sus electrones produciendo rayos γ.

Esta nueva concepción de los fenómenos cósmicos ensancha mucho el dominio de nuestro conocimiento y prepara las bases de siempre más amplias ideas.

La teoría de la disgregación del electrón fué expuesta, por el profesor doctor Jorge José Ravasini, en la reunión de diciembre del Comité internacional para la exploración hipelectrónica de la Academia « Ciencia y Arte », en Trieste (Europa).

ÍNDICE GENERAL

DE LAS

MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO NONAGÉSIMOSEXTO

Memoria anual del presidente de la Sociedad Científica Argentina, ingeniero Santiago E. Barabino 5
OTTOMAR SCHMIEDEL, Del pasado de nuestra tierra 31
SPEGAZZINI CARLOS, Breves notas cactológicas 61
F. DE BASALDÚA, La catástrofe glacial 76
MARTINIANO LEGUIZAMÓN PONDAL, La teoría de Darwin y las industrias de fermentación 83
Una distinción 88
Conferencias 89, 199
Biblioteca de la Sociedad Científica Argentina : obras recibidas 94, 207
RAMÓN G. LOYARTE, La hipótesis de los « Quanta » en la teoría estadística de la materia y en la teoría de la radiación 97
JOSÉ BABINI, Integración gráfica de las ecuaciones diferenciales de la cinética química 149
HANS KRIEG, Sobre el desarrollo de la distribución del colorido en los mamíferos. 172
OTTO GOTTSCHALK, Cálculo automático de sistemas hiperestáticos 177, 212
FEDERICO KRUMM, Noticias topográficas y geológicas sobre la región situada al oriente del lago Ranco, en el sur de Chile, y especialmente sobre la erupción volcánica más reciente « Los Azufres » 191
Segundo Congreso de Química (marzo de 1924) 203
R. LEHMANN-NITSCHE, El grupo lingüístico Tshon de los territorios magallánicos. 209
Resultados de la primera expedición a Tierra del Fuego (1921), enviada por la Facultad de Ciencias exactas, físicas y naturales de la Universidad nacional de Buenos Aires : JOAQUÍN FRENGUELLI, Diatomeas de Tierra del Fuego ... 225
PABLO GAGGERO, *Cordylophora lacustris* Allman en el río de la Plata 264
ANTONIO PAULY, Los yacimientos de estaño en Bolivia 269
A. HUSTACHE, Curculionides de l'exploration Lizer-Delétang au Chaco bolivien. 279

BIBLIOGRAFÍA

Sous-marins, Torpilles et Mines, par A. Laubeuf et H. Stroh 205
Revista chilena de historia natural 206
Notes sur les courroies de transmission, par R. Delaveuve 301
Analyse générale des eaux, par F. Touplain 301
Teoría Ravasini de la disgregación del electrón 302

SOCIOS ACTIVOS *(Conclusión)*

Larreguy, José.
Lasso, Alfredo.
Latzina, Eduardo.
Laub, Jacobo J.
Lavalle, Francisco P.
Lea, Allan B.
Lebedinsky, Marco.
Leguizamón Pondal, Martuo.
Lenhardtson, Emilio.
Loyarte, Ramón.
Lizer, Carlos.
Lombardi, Alberto,
Lorenzetti, Miguel V.
Lozano, Nicolás.
Lugones, Arturo M.
Luro, Rufino.
Madrid, Enrique de.
Mainini, Carlos.
Magnin, Jorge.
Magnin, Félix J.
Mallol, Emilio.
Mamberto, Benito.
Marín, Plácido.
Marcó del Pont, Enrique.
Maradona, Santiago.
Marotta, Pedro.
Martinent, Enrique.
Massini, Carlos.
Mayol, J. A. Jorge.
Maza, Benedicto.
Medina, José A.
Melo, Carlos F.
Meoli, Gabriel.
Mercante, Víctor,
Mercau, Agustín.
Mermoz, Fco. Alberto.
Mignaqui, Luis P.
Molina Civit, Juan.
Molino Torres, Alejandro.
Morales, Carlos María.
Moreno, Evaristo V.
Moreno, Jorge.
Moreno, José M.
Möhring, Walther.
Mosca, Juan C.
Mulhall, Jaime.
Narbondo, Juan L.
Nágera, Juan José.
Natale, Alfredo.
Negri, Mario L.
Nielsen, Juan.
Noceti, Domingo.
Novillo, Andrés B.
Ocampo, Manuel S.
O'Connor, Eduardo.
Odorisio, José A.
Olmos, Miguel.
Olivieri, Alfredo.
Onelli, Clemente.
Ortiz de Rosas, Jorge.
Ortuzar, Alejandro de.
Orús, José M.
Orús, Antonio (hijo).
Otamendi, Rómulo.
Otamendi, Gustavo.
Otamendi, Belisario.
Outes, Félix F.
Paez, José Ma.
Paitoví Oliveras, Antonio.
Palacio, Emilio.
Palma, Luis.
Palma, José M.
Paoli, Humberto J.
Parodi, Edmundo.
Parodi, Lorenzo R.
Pasman, Raúl G.
Pastore, Franco.
Paquet, Carlos.
Paulsen, Emilio F.
Paz Anchorena, José M.
Péndola, Agustín.
Pérez Hernández, Ángel.
Pestalardo, Agustín.
Petre, Martín.
Piana, Juan S.
Pico, Jorge A.
Quartino, José N.
Raffo, Bartolomé.
Rebuelto, Emilio.
Rebuelto, Antonio.
Renacco, Ricardo.
Ricaldoni, Horacio B.
Rodríguez Aravena, Santos.
Roffo, Juan.
Roldán, Raimundo.
Rokotnitz, Otto.
Romero, Julián.
Romero, Antonio.
Rospide, Juan.
Rossell Soler, Pedro A.
Sabaría, Enrique.
Sabatini, Ángel.
Salomone, Gabriel A.
Sáenz Valiente, Eduardo.
Sánchez Díaz, Abel.
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez, Oviedo Cornelio.
Sanromán, Iberio.
Santángelo, Rodolfo.
Saporiti, Héctor J.
Sarhy, José S.
Sarhy, Juan F.
Scala, Augusto.
Schaefer, Guillermo F.
Schnack Benno, J.
Schmiedel, Ottomar.
Schneidewind, Alberto.
Schoo Lastra, Oscar.
Selva, Domingo.
Senet, Rodolfo.
Spota, Víctor J.
Solari, Miguel A.
Sobral, Arturo.
Soldano, Ferruccio A.
Sorojovich, Gustavo.
Spinetto, David J.
Storni, Segundo R.
Taiana, Alberto.
Tarelli, Carlos A.
Tello, Eugenio.
Torre Bertucci, Pedro.
Torello, Pablo.
Trelles, Rogelio A.
Trovati, Francisco.
Ucha, Manuel.
Uriarte Castro, Alfredo.
Urquiza, Carlos de.
Vallebella, Colón B.
Valentini, Argentino.
Valençon, Luis A.
Valerga, Oronte A.
Valiente Noailles, Luis.
Valle, Juan A.
Vanossi, Reinaldo.
Varela, Rufino (hijo).
Varela Gil, José.
Vidal, Antonio.
Volpatti, Eduardo.
Wauters, Carlos.
Wernicke, Roberto.
Williams, Adolfo T.
White, Guillermo.
White, Guillermo J.
Zuloaga, Ángel M.
Zeman, Víctor.

SOCIOS ADHERENTES

Álvarez, Jerónimo.
Andisco, Juan F.
Basterreix, Francisco.
Buzzacarini David.
Canaveris, Rogelio G.
Dorado, Luis.
Frers, Arturo German.
Gandolfo José S.
Goñi, José.
González, Santiago.
Grau, Carlos A.
Lambertini, Miguel.
« La Sulfúrica ».
Maldonado, Bruzzone R.
Moresco, Enrique.
Massone, Atilio.
Nicola, Carlos de.
Pascual, Oliveras Antonio.
Peirano, Santiago F.
Pelosi, Elías.
Pini, Aldo S.
Real, Enrique B.
Repetto, Cayetano.
Soler, Antonio L.
Saez, Francisco A.
Sáenz Valiente, Casto.
Sheahan, Juan F.
Vernengo, Roberto E.
Vidal, Eduardo.
Vignaux, Juan C.
Weinstock, Zelman.
Zanetta, Alberto J.
Zanetta, Atilio.
Zapata, Ciriaco L.
Zimmermann Resta, Alfredo.

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACIÓN DIDÁCTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás.
Tornquist, Ernesto y Comp. (Lim.).

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01357 2961